

Министерство образования и науки РФ
Алтайский государственный университет
Рубцовский институт (филиал)

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Учебное пособие



Рубцовск — Барнаул

Издательство
Алтайского государственного
университета
2016

УДК 519.6
ББК 22.19
Ч 67

Автор-составитель:

А. С. Шевченко

Рецензент:

доктор физико-математических наук *А. Г. Петрова*

Ч 67 **Численные методы** [Текст] : учебное пособие / авт.-сост. А. С. Шевченко. — Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2016. — 388 с.

ISBN 978-5-7904-2151-8

В данном пособии излагаются основы численных методов решения задач алгебры, математического анализа и обыкновенных дифференциальных уравнений. Значительное внимание уделяется вопросам алгоритмизации методов. Пособие может быть использовано при выполнении лабораторных, курсовых и дипломных исследовательских работ. Каждая тема содержит теоретическое обоснование и большое количество примеров решения практических задач с использованием математического пакета Maple.

Пособие предназначено для студентов, аспирантов, преподавателей вузов, а также инженеров и научных работников, применяющих численные методы при решении прикладных задач.

УДК 519.6
ББК 22.19

ISBN 978-5-7904-2151-8

© Авт.-сост. Шевченко А. С., 2016
© Оформление. Издательство
Алтайского государственного
университета, 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
-------------------	---

Тема 1

ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ.....	5
1.1. Источники и классификация погрешностей.....	5
1.2. Абсолютная и относительная погрешности	7
1.3. Десятичная запись приближенных чисел. Значащая цифра числа. Верная значащая цифра.....	9
1.4. Связь относительной погрешности приближенного числа с количеством верных знаков этого числа.....	13
1.5. Погрешность суммы, разности, произведения, частного, степени, корня. Вычисления без точного учета погрешностей	15
1.6. Прямая задача теории погрешностей.....	20
1.7. Обратная задача теории погрешностей	22
1.8. Точность определения аргумента для функции, заданной таблицей	23
1.9. Влияние выбора вычислительного алгоритма на результаты вычислений.....	24
1.10. Типовые задачи	26
Практическая работа	31
Контрольные вопросы:.....	38

Тема 2

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ)	39
2.1. Необходимые сведения из линейной алгебры	39
2.1.1. Матрицы и векторы	39
2.1.2. Норма векторов и матриц	43
2.1.3. Понятие о системе линейных уравнений	45
2.2. Обусловленность СЛАУ. Число обусловленности матрицы... ..	48
2.3. Методы решения СЛАУ	52
2.3.1. Классификация методов решения СЛАУ	52
2.3.2. Прямые методы решения СЛАУ	53
2.3.2.1. Метод Гаусса	53
2.3.2.2. Метод прогонки.....	62
2.3.2.3. Вычисление определителя по методу Гаусса	64

2.3.3. Итерационные методы решения СЛАУ	65
2.3.3.2. Метод Зейделя.....	71
2.4. Решение задач линейной алгебры с использованием Maple...75	
Лабораторная работа № 1.	
Решение систем линейных алгебраических уравнений	91
Контрольные вопросы.....	95

Тема 3

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ.....	96
3.1. Постановка задачи	96
3.2. Отделение корней	98
3.2.1. Графический метод.....	99
3.2.2. Аналитический метод (табличный или шаговый)	100
3.3. Алгоритмы уточнения корней уравнения	102
3.3.1. Метод половинного деления (Дихотомии)	102
3.3.2. Итерационные методы решения алгебраических и трансцендентных уравнений	106
3.3.2.1. Метод простой итерации	108
3.3.2.2. Метод Ньютона	117
3.3.2.3. Метод хорд.....	121
3.4. Решение систем двух нелинейных уравнений.....	126
3.4.1. Метод простой итерации.....	127
3.4.2. Метод Ньютона	133
3.5. Двумерная графика в Maple	138
3.6. Использование Maple для решения нелинейных уравнений и систем.....	142
Лабораторная работа № 2.	
Методы отделения корней уравнений с одной переменной	147
Контрольные вопросы.....	148
Лабораторная работа № 3.	
Приближенное вычисление корней системы нелинейных уравнений	149
Контрольные вопросы.....	150

Тема 4

АППРОКСИМАЦИЯ И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ	151
4.1. Задача интерполирования	151
4.2. Интерполяционный многочлен Лагранжа.....	154
4.2.1. Построение многочлена Лагранжа	154
4.2.2. Оценка погрешности интерполирования	157
4.3. Интерполяционная формула Ньютона	160

4.3.1. Разделенные разности и их свойства.....	160
4.3.2. Вывод формулы Ньютона с разделенными разностями	161
4.4. Интерполяционные и экстраполяционные формулы при равноотстоящих значениях аргумента	167
4.4.1. Конечные разности и их свойства.....	167
4.4.2. Первая интерполяционная формула Ньютона для равноотстоящих узлов интерполяции.....	171
4.4.3. Вторая интерполяционная формула Ньютона для равноотстоящих узлов интерполяции.....	175
4.4.4. Оценки погрешностей интерполяционных формул Ньютона.....	179
4.5. Интерполирование с кратными узлами.....	181
4.6. Интерполяция сплайнами.....	184
4.6.1. Кусочно-линейное и кусочно-квадратичное интерполирование.....	185
4.6.2. Кубические сплайны дефекта 1	187
4.7. Среднеквадратичное приближение (метод наименьших квадратов)	192
4.7.1. Подбор коэффициентов линейной зависимости	196
4.7.2. Функции приводимые к линейной.....	198
4.7.3. Аналитический способ выбора эмпирических формул для нелинейных зависимостей	205
4.8. Решение задачи интерполяции средствами Maple	209
Лабораторная работа № 4. Интерполирование функций	215
Контрольные вопросы.....	219
Лабораторная работа № 5. Аппроксимация функций. Методы обработки экспериментальных данных.....	220
Контрольные вопросы:.....	224

Тема 5

ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ.....	225
5.1. Постановка задачи численного дифференцирования	225
5.2. Интерполяционный подход	226
5.2.1. Вычисление производных на основании многочлена Лагранжа	226
5.2.2. Вычисление производных на основании многочлена Ньютона	234
5.3. Оценка погрешности численного дифференцирования	239

5.4. Метод неопределённых коэффициентов	243
5.5. Полная вычислительная погрешность численного дифференцирования	244
5.6. Возможности Maple для дифференцирования	248
Лабораторная работа № 6. Численное дифференцирование	251
Контрольные вопросы:.....	252

Тема 6

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ	256
6.1. Постановка задачи численного интегрирования	256
6.2. Общий подход к построению квадратурных формул. Квадратурные формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона	258
6.2.1. Формула прямоугольников	259
6.2.2. Формула трапеций	265
6.2.3. Формула Симпсона	268
6.2.4. Метод Рунге — Ромберга — Ричардсона повышения порядков точности	271
6.3. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической точности. Построение. Погрешность	272
6.3.1. Квадратурные формулы интерполяционного типа в общем виде	272
6.3.2. Формулы Ньютона-Котеса. Численная устойчивость квадратурных формул	275
6.3.3. Квадратурные формулы Гаусса	279
6.3.3.1. Постановка задачи	279
6.3.3.2. Выбор узлов для квадратурных формул Гаусса	284
6.3.3.3. Существование и единственность квадратурных формул наивысшей алгебраической степени точности.....	285
6.3.3.4. Свойство квадратурных формул Гаусса.....	286
6.3.3.5. Погрешность квадратур Гаусса.....	287
6.3.3.6. Практическое применение формул Гаусса.....	288
6.4. Возможности Maple для интегрирования	293
Лабораторная работа № 7. Приближенное вычисление определенных интегралов.....	299
Контрольные вопросы:.....	299

Тема 7

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	301
7.1. Некоторые сведения из теории обыкновенных дифференциальных уравнений	301
7.2. Понятие о методе конечных разностей. Порядок точности разностной схемы	305
7.3. Одношаговые методы	307
7.3.1. Метод Эйлера.....	307
7.3.2. Модификации метода Эйлера	312
7.3.3. Методы Рунге-Кутта	321
7.4. Многошаговые методы	330
7.4.1. Метод Адамса	330
7.3.2. Метод Милна	334
7.5. Решение дифференциальных уравнений в Maple	337
Лабораторная работа № 8.	
Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка	347
Контрольные вопросы:.....	349

Приложение

ОСНОВЫ MAPLE	350
1. MAPLE — универсальная система обеспечения научных расчетов.....	350
2. Интерфейс Maple 6	354
2.1. Общий вид интерфейса Maple 6.....	354
2.2. Работа с меню	356
2.3. Структура меню	356
2.4. Стандартное меню рабочего листа.....	357
3. Рабочие листы	361
3.1. Область ввода и ввод данных	362
3.2. Активная и инертная форма команды	366
3.3. Область вывода	366
4. Справочная система	367
5. Основные объекты и команды Maple 6	372
5.1. Объекты, переменные и выражения.....	372
5.2. Числа.....	372
5.3. Константы.....	376
5.4. Переменные.....	377
5.5. Выражения	378
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	382

Учебное издание

Автор-составитель:
А. С. Шевченко

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Учебное пособие

Издается в авторской редакции

Подготовка оригинал-макета,
оформление обложки — *О. В. Майер*

Издательская лицензия ЛР 020261 от 14.01.1997.

Подписано в печать 02.12.2016.

Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.

Усл.-печ. л. 22,5. Тираж 100. Заказ 283.

Типография Алтайского государственного университета:
656049, Барнаул, ул. Димитрова, 66