

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Алтайский государственный университет»

Факультет математики и информационных технологий

Кафедра дифференциальных уравнений

## ЧИСЛЕННОЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ВНУТРЕННЕЙ ЭРОЗИИ ГРУНТА

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

Допустить к защите:  
Зав. кафедрой  
дифференциальных уравнений  
д.ф.-м.н., проф.

\_\_\_\_\_ *Папин А. А.*

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2017 г.

Диссертацию выполнил студент  
2 курса магистратуры  
456М-МиКН группы

\_\_\_\_\_ *Сибин Н. Н.*

Научный руководитель  
д.ф.-м.н., проф.

\_\_\_\_\_ *Папин А. А.*

Магистерская диссертация  
защита

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2017 г.

Оценка \_\_\_\_\_

Председатель ГАК:

\_\_\_\_\_

## Реферат

### диссертации на соискание степени магистра математики Н. Н. Сибин « Численное и аналитическое исследование модели внутренней эрозии грунта»

Работа включает: 46 страниц, 17 рисунков, 37 использованных источников.

**Ключевые слова:** многофазная фильтрация, пористая среда, суффозия, фазовый переход, насыщенность.

**Цель и задачи исследования.** Разработка математических методов и вычислительных алгоритмов для решения задач, возникающих при исследовании процесса внутренней изотермической эрозии грунта при напорном движении вод.

В работе исследованы следующие задачи:

- Дана постановка математической модели изотермической суффозии (на основе классической модели Маскета – Леверетта).

- Предложен алгоритм численного решения одномерной начально-краевой задачи фильтрации грунтовых вод с учетом внутренней эрозии грунта и капиллярных сил и проведены тестовые численные расчеты. Найдены скорости движения и давление грунтовых вод, пористость и концентрация подвижных частиц грунта для грунтов имеющих различную суффозионную устойчивость.

- Предложен алгоритм численного расчета физических характеристик почвогрунтов в процессе внутренней эрозии с учетом капиллярных сил. Найдены пористость и концентрация подвижных частиц грунта.

- Предложен алгоритм численного решения двумерной начально-краевой задачи фильтрации грунтовых вод с учетом внутренней эрозии грунта и капиллярных сил и проведены тестовые численные расчеты.

**Объект исследования** – задача движения грунтовых вод с учетом суффозионных процессов.

**Предмет исследования** – Процесс изотермической внутренней суффозии.

Рассматривается движение подземных вод в водоносном горизонте, который соприкасается с песчаным грунтом. В процессе фильтрации грунта и при достижении определенной величины скорости фильтрации происходит вынос частиц грунта из области течения и образование подземных полостей. В результате увеличения и достижения критических размеров этих полостей, происходит обрушение свода пород. На поверхности грунта формируются провальные формы рельефа (суффозионные воронки).

Математическая постановка задачи связана с рассмотрением фильтрационных течений, процессов суффозии и обрушения грунта.

**Апробация результатов исследования.** Основные положения диссертации были доложены на:

- ▶ Международной школе-семинаре "Ломоносовские чтения на Алтае" (Барнаул, 2015);
- ▶ Всероссийской конференции «Математика и ее приложения: фундаментальные проблемы науки и техники» (Барнаул, 2015);
- ▶ Всероссийская научная конференция «Математики – Алтайскому краю» (Барнаул, 2016);
- ▶ III Региональной молодёжной конференции «Мой выбор – НАУКА!» (Барнаул, 2016);
- ▶ IV Региональной молодёжной конференции «Мой выбор – НАУКА!» (Барнаул, 2017);
- ▶ Всероссийская научная конференция «Математики – Алтайскому краю» (Барнаул, 2017);

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ №16-08-00291 и РФФИ №17-41-220314.

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>1 Аналитическое и численное исследование автомодельной задачи внутренней эрозии</b>	<b>4</b>
1.1 Постановка задачи . . . . .	4
1.2 Интенсивность фазового перехода . . . . .	7
1.3 Автомодельный случай . . . . .	9
1.4 Численное решение автомодельной задачи внутренней эрозии с учетом капиллярных сил . . . . .	13
<b>2 Численное исследование задачи о внутренней эрозии</b>	<b>19</b>
2.1 Постановка задачи. . . . .	19
2.2 Алгоритм численного решения одномерной задачи . . . . .	22
2.3 Расчет физических характеристик почвогрунтов в процессе внутренней эрозии . . . . .	29
2.4 Алгоритм численного решения двумерной задачи . . . . .	33
<b>Заключение</b>	<b>43</b>
<b>Список литературы</b>	<b>44</b>

## Введение

Изменения окружающей среды приводят к активизации инженерно-геологических процессов. Одним из таких процессов, представляющим серьезную опасность инженерным сооружениям, является термосуффозия, которая до настоящего момента времени изучена недостаточно.

Проблемы, связанные с эрозией грунта в том числе и в водоносном горизонте широко изучались на протяжении последнего столетия. Геологическим исследованиям посвящено большое количество работ (см., например, [1]).

Механическая суффозия является весьма нежелательным элементом в работе гидротехнических и некоторых других сооружений, так как приводит к нарушению устойчивости грунтов, а следовательно, и самих сооружений. Поэтому до последнего времени исследователи занимались главным образом вопросами изучения критических скоростей для различных размеров частиц грунта, соотношение размеров частиц, при которых возможна механическая суффозия, т.е. изучали так называемый начальный период механической суффозии. Это и понятно, так как знание указанных выше условий для начала механической суффозии дает возможность проектировщику предусмотреть те или иные меры, предотвращения подобного явления [2].

Однако во многих практических случаях вымыв мелких частиц из пор скелета грунта является желательным фактором, например: вымыв некоторого ограниченного количества мелких частиц из пор грунта вокруг скважины при глубинном водоотливе и при нефтедобыче, приводящий к увеличению дебита водоотдачи и нефтедобычи; очистка обратным потоком жидкости фильтров от загрязнения; очистка призабойной зоны нагнетательных скважин от проникших в поры грунта осевших частиц в процессе нагнетания воды и другие.

Данный процесс имеет большое значение при решении прикладных задач в сельском хозяйстве: ирригация и дренаж сельскохозяйственных полей [3] и процесс внутренней эрозии, сопутствующий каналному орошению почвогрунтов [4]. Процесс эрозии необходимо учитывать в исследованиях, связанных с прогнозом распространения загрязнений, фильтрацией вблизи водохранилищ и других гидротехнических сооружений [5]. Более того, аналогичные проблемы, связанные с процессом эрозии грунта, возникают и в других областях, включая добычу нефти и газа [6].

Наиболее изученным, с точки зрения математического моделирования, является процесс образования термокарстовых озер и талой зоны под ними [7,8]. В работе З.Л. Хусаиновой [9] изучен процесс внешней эрозии грунта, приводящий к образованию оврагов. В работе Н.А. Протоdjяконовой [10], изучена линейаризованная одномерная модель фильтрационной консолидации, которая описывает деформацию оттаивающего насыщенного грунта и фильтрацию грунтовых вод. Но в этих работах не рассматривался процесс внутренней эрозии и образования подземных полостей.

Математические модели суффозионных процессов при постоянной температуре изучались в работах многих авторов (см., например, [11–16]).

Существует множество подходов моделирования деформации грунтов с

подземными полостями (см., например, [17–19] ). Особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что развитие подземной полости происходит в движущейся водной среде, при изменяющейся температуре.

Таким образом, до настоящего времени, не было предложено математической модели внутренней эрозии грунта и образования суффозионных воронок.

В первой главе рассмотрена автомодельная задача внутренней эрозии грунта без учета капиллярных сил. Доказаны физические принципы максимума для пористости и концентрации и теорема существования автомодельного решения. Проведено численное решение автомодельной задачи о внутренней эрозии грунта с учетом капиллярных сил.

В второй главе предложен алгоритм численного решения одномерной начально-краевой задачи фильтрации грунтовых вод с учетом внутренней эрозии грунта и проведены тестовые численные расчеты. Найдены скорости движения и давление грунтовых вод, пористость и концентрация подвижных частиц грунта для грунтов имеющих различную суффозионную устойчивость. Предложен алгоритм численного расчета физических характеристик почвогрунтов в процессе внутренней эрозии. Найдены пористость и концентрация подвижных частиц грунта. Предложен алгоритм численного решения двумерной начально-краевой задачи фильтрации грунтовых вод с учетом внутренней эрозии грунта.

# 1 Аналитическое и численное исследование автомобильной задачи внутренней эрозии

## 1.1 Постановка задачи

Рассматриваются процессы фильтрации подземных вод и внутренней суффозии. Грунт моделируется как трехфазная сплошная пористая среда. Поры полностью заполнены смесью воды ( $i = 1$ ) и подвижных твердых частиц ( $i = 2$ ). Доля пор в грунте ( $i = 3$ ) определяется пористостью  $\phi = (V_1 + V_2)/V$ , где  $V = V_1 + V_2 + V_3$  – общий объем грунта,  $V_1, V_2, V_3$  – соответственно объемы воды, подвижных твердых частиц и скелета грунта.

Уравнения сохранения массы для каждой из фаз с учетом фазового перехода имеют вид [20]

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_1 \vec{u}_1) = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_2 \vec{u}_2) = \dot{m}, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \rho_3}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_3 \vec{u}_3) = -\dot{m}, \quad (1.3)$$

где  $\dot{m}$  – интенсивность фазового перехода (суффозионный поток);  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$  – соответственно истинные скорости воды, подвижных твердых частиц грунта и скелета грунта;  $\rho_1 = \phi s_1 \rho_1^0$ ,  $\rho_2 = \phi s_2 \rho_2^0$ ,  $\rho_3 = (1 - \phi) \rho_3^0$  – приведенные плотности воды, подвижных твердых частиц грунта и скелета;  $s_1 = V_1/(V_1 + V_2)$ ,  $s_2 = V_2/(V_1 + V_2)$  – концентрации воды (насыщенность) и подвижных твердых частиц в порах;  $\rho_1^0, \rho_2^0, \rho_3^0$  – истинные плотности воды, подвижных твердых частиц грунта и скелета грунта;  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$  – оператор градиента,  $x = (x_1, x_2, x_3)$ . В рассматриваемом случае  $\rho_3^0 = \rho_2^0$ , так как подвижные частицы захватываются суффозионным потоком из грунта.

Уравнения сохранения импульса для воды и подвижных твердых частиц грунта берем в виде [20–22]

$$s_i \phi (\vec{u}_i - \vec{u}_3) = -K_0(\phi) \frac{\bar{k}_{0i}}{\mu_i} (\nabla p_i + \rho_i^0 \vec{g}), \quad i = 1, 2. \quad (1.4)$$

Здесь  $K_0(\phi)$  – симметрический тензор фильтрации пористой среды;  $\bar{k}_{0i}$  – относительные фазовые проницаемости ( $k_{0i} = k_{0i}(s_i) \geq 0$ ,  $k_{0i}|_{s_i=0} = 0$ ,  $0 \leq s_i \leq 1$ );  $\mu_i$  – коэффициенты динамической вязкости;  $\vec{g}$  – ускорение силы тяжести;  $p_1, p_2$  – соответственно давления первой и второй фаз.

Пусть  $s = s_1$ , тогда  $1 - s = s_2$ . Разность фазовых давлений удовлетворяет соотношению вида [20, 22]

$$p_2 - p_1 = p_c(s, x) \geq 0, \quad (1.5)$$

где  $p_c$  – заданная функция обладающая свойствами [23, 24]:

$$p_c(x, s) = p_0(x) j(s), \quad p_0(x) > 0, \quad j(s) \geq 0,$$

$$j(0) = \infty, \quad j(1) = 0, \quad \frac{\partial j}{\partial s} < 0.$$

В дальнейшем предполагается, что скелет грунта неподвижен ( $\vec{u}_3 = 0$ ), истинные плотности  $\rho_i^0$  постоянны. В этом случае система приводится к эллиптической – параболической системе [21] и уравнению кинетики. Действительно, используя сделанные предположения вместо (1.1) – (1.4) получим

$$\frac{\partial(s\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (s\phi\vec{u}_1) = 0, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial(1-s)\phi}{\partial t} + \nabla \cdot ((1-s)\phi\vec{u}_2) = \frac{\dot{m}}{\rho_2^0}, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} = -\frac{\dot{m}}{\rho_3^0}, \quad (1.8)$$

$$s_i\phi\vec{u}_i = -K_0(\phi)k_{0i}(\nabla p_i + \rho_i^0\vec{g}), \quad k_{0i} = \frac{\bar{k}_{0i}}{\mu_i}. \quad (1.9)$$

Сложив уравнения (1.6), (1.7) и (1.8), выводим

$$\nabla \cdot (s\phi\vec{u}_1 + (1-s)\phi\vec{u}_2) = 0. \quad (1.10)$$

Положим

$$\vec{v} = s\phi\vec{u}_1 + (1-s)\phi\vec{u}_2.$$

Используя (1.9) и (1.5) для  $\vec{v}$  получим следующее представление

$$\begin{aligned} -\vec{v} &= K_0(\phi)(k_{01}(\nabla p_1 + \rho_1^0\vec{g}) + k_{02}(\nabla(p_1 + p_c) + \rho_2^0\vec{g})) = \\ &= K_0(k(\nabla p_1 + \frac{k_{02}}{k} \frac{\partial p_c}{\partial s} \nabla s) + k_{02} \nabla_x p_c + \vec{g}(\rho_2^0 k_{02} + \rho_1^0 k_{01})) = \\ &= K_0(k \nabla (p_1 - \int_s^1 \frac{k_{02}(\xi)}{k(\xi)} \frac{\partial p_c}{\partial \xi} d\xi) + k \int_s^1 \frac{k_{02}(\xi)}{k(\xi)} \nabla_x \frac{\partial p_c(\xi, x)}{\partial \xi} d\xi + \\ &\quad + k_{02} \nabla_x p_c + \vec{g}(\rho_2^0 k_{02} + \rho_1^0 k_{01})) = = K_0(\phi)k(s) \nabla p + \vec{f}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где  $p$  так называемое "приведенное" давление [21]

$$p = p_1 - \int_s^1 \frac{k_{02}(\xi)}{k(\xi)} \frac{\partial p_c}{\partial \xi} d\xi, \quad (1.12)$$

а так же введены обозначения

$$k(s) = k_{01} + k_{02},$$



$$\vec{f} = K_0(k_{02} \nabla_x p_c + k \int_s^1 \frac{k_{02}(\xi)}{k(\xi)} \nabla_x \frac{\partial p_c(\xi, x)}{\partial \xi} d\xi + (k_{01}\rho_1^0 + k_{02}\rho_2^0)\vec{g}),$$

Здесь символ  $\nabla_x$  применяется только по переменной  $x$ , входящей явно, например

$$\nabla_x p_c(s, x) = \left( \frac{\partial p_c(s, x)}{\partial x_1}, \frac{\partial p_c(s, x)}{\partial x_2}, \frac{\partial p_c(s, x)}{\partial x_3} \right).$$

С учетом (1.12) для  $\vec{v}_1 = s\phi\vec{u}_1$  имеем

$$-\vec{v}_1 = K_0 a \nabla s + K_0 k_{01} \nabla p + \vec{f}_0, \quad (1.13)$$

где

$$a = -\frac{k_{01}k_{02}}{k} \frac{\partial p_c}{\partial s},$$

$$\vec{f}_0 = K_0 k_{01} \left( \int_s^1 \frac{k_{02}(\xi)}{k(\xi)} \nabla_x \frac{\partial p_c(\xi, x)}{\partial \xi} d\xi + \rho_1^0 \vec{g} \right).$$

Используя (1.11), находим

$$K_0 k_{01} \nabla p = -k_{01}(\vec{v} + \vec{f})/k.$$

Тогда вместо (1.13) получим

$$-\vec{v}_1 = K_0 a \nabla s - b\vec{v} + \vec{F}, \quad (1.14)$$

где

$$\vec{F} = \vec{f}_0 - b\vec{f}, \quad b(s) = \frac{k_{01}}{k}.$$

Подставляя (1.13) в (1.6), привлекая (1.8) и (1.10) приходим к системе уравнений относительно  $s$ ,  $p$  и  $\phi$

$$\frac{\partial(s\phi)}{\partial t} = \nabla \cdot (K_0 a \nabla s + K_0 k_{01} \nabla p + \vec{f}_0), \quad (1.15)$$

$$\nabla \cdot (K_0(\phi)k(s) \nabla p + \vec{f}) = 0, \quad (1.16)$$

$$\rho_3^0 \frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} = -\dot{m},$$

Используя (1.14) приходим к следующей эквивалентной системе относительно  $s$ ,  $p$ ,  $\phi$  и  $\vec{v}$ :

$$\frac{\partial s\phi}{\partial t} = \nabla \cdot (K_0 a \nabla s - b\vec{v} + \vec{F}),$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0,$$

$$\rho_3^0 \frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} = -\dot{m},$$

$$-\vec{v} = K_0(\phi)k(s) \nabla p + \vec{f}.$$

*Замечание 1.* Решение начально краевой задачи для системы (1.8), (1.15), (1.16) в которой  $\dot{m}$  является функцией  $\phi, s, \vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ , можно построить следующим образом: подставляя в (1.15), (1.16) вместо  $\phi$  известную функцию  $\phi_0$  приходим к эллиптико – параболической системе для  $p$  и  $s$  (данная система исследовалась в [21, 23]). Найденные значения  $p$  и  $s$  позволяют определить  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  и тем самым из (1.8) найти новое значение  $\phi$ .

Особенностью рассматриваемой задачи является возможное вырождение на решение уравнения (1.15) поскольку  $a(0) = a(1) = 0$ , а коэффициент фильтрации как правило задается следующим образом  $K_0 = K'_0 \phi^3 / (1 - \phi)^2$  [24]. Кроме того пористость и насыщенность должны удовлетворять условиям  $0 \leq s \leq 1, 0 \leq \phi < 1$ .

*Замечание 2.* Частный случай модели (1.6) – (1.9) при  $p_1 = p_2$  рассматривается в работах [16, 25–31].

## 1.2 Интенсивность фазового перехода

На основе обработки экспериментальных данных были предложены различные формулы для интенсивности фазового перехода. В работе [25] суффозионный поток задается следующим образом

$$\dot{m}_{er} = \rho_2^0 \lambda (1 - \phi) s_2 \|\vec{v}_1\|. \quad (1.17)$$

где  $\lambda$  – определяемая экспериментально функция (отвечает за устойчивость грунта суффозионному воздействию),  $\vec{v}_2 = \phi(1 - s)(\vec{u}_2 - \vec{u}_3)$  – поток подвижных частиц грунта.

Обобщение формулы (1.17) предложено в серии работ [24–26]

$$\dot{m} = \dot{m}_{er} - \dot{m}_{dep}, \quad (1.18)$$

где  $\dot{m}_{er}$  поток твердых частиц (процесс суффозии),  $\dot{m}_{dep}$  поток осевших твердых частиц (процесс кольматации).

Для определения  $\dot{m}_{dep}$  в работе [25] предлагается использовать соотношение

$$\dot{m}_{dep} = \rho_2 \lambda (1 - \phi) \frac{s_2^2}{s_{cr}} \|\vec{v}_1\|. \quad (1.19)$$

Здесь  $s_{cr}$  – критическое значение концентрации подвижных твердых частиц грунта при достижении которой ( $s_2 = s_{cr}$ ) процессы суффозии и кольматации уравниваются друг друга. Подставив (1.17) и (1.19) в (1.18) получим соотношение [25]

$$\dot{m} = \rho_2^0 \lambda (1 - \phi) \phi \left( s_2 - \frac{s_2^2}{s_{cr}} \right) \|\vec{v}_1\|,$$

В работе [15] сделан анализ экспериментов из которого следует, что суффозионный процесс начинается после достижения скоростью фильтрации критического значения  $v_k$ . Так же из экспериментов получено соотношение для

определения критической скорости фильтрации воды

$$v_k = 4.2\phi\sqrt[9]{g\nu^7} \frac{1}{\sqrt[3]{37.21 \frac{\nu K_0}{\phi g}}},$$

где  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости воды,  $g$  – модуль ускорения силы тяжести.

В работах [24, 28] для  $\dot{m}$  используется зависимость

$$\dot{m} = \begin{cases} \lambda\rho_3^0(1-\phi)(1-s)\phi|\vec{v}_1 - \vec{v}_k|, & |\vec{v}_1| \geq |\vec{v}_k|; \\ 0, & |\vec{v}_1| < |\vec{v}_k|. \end{cases}$$

В работах S. Vonnelli (см. например [32]) движение воды, подвижных частиц и отрыв частиц от скелета моделируется на основе подходов, развитых в задачах с неизвестной границей. Вода и подвижные частицы грунта рассматриваются как однородная смесь (несжимаемая вязкая жидкость со стандартной реологией), которая движется со скоростью  $\vec{u}$  и имеет плотность  $\rho = \phi\rho_1^0 + (1-\phi)\rho_2^0$ . Неизвестная граница  $\Gamma$  между областями занятыми смесью и твердым скелетом определяется из уравнения переноса вида

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \vec{c} \cdot \nabla\psi = 0$$

где функция  $\psi$  имеет следующие свойства:  $\psi = 0$  на  $\Gamma$ ,  $\psi > 0$  в твердом скелете, а в области фильтрации  $\psi < 0$ ;  $\vec{c} = c_\Gamma\vec{n}$ ,  $\vec{n}$  – вектор нормали к границе  $\Gamma$ . Скорость движения последней равна

$$c_\Gamma = \begin{cases} k_d(\tau - \tau_c), & \tau \geq \tau_c; \\ 0, & \tau < \tau_c. \end{cases}$$

где  $k_d$  – коэффициент пропорциональности,  $\tau$  – модуль касательного напряжения

$$\tau = \sqrt{(T\vec{n})^2 - (\vec{n}T\vec{n})^2},$$

$\tau_c$  – критическое значение касательного напряжения при достижении которого начинается суффозионный процесс.

Тензор напряжений и тензор скоростей деформации имеют вид

$$T = -PI + 2\mu_w D(\vec{u}),$$

$$D(\vec{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^T).$$

В данном подходе интенсивность фазового перехода определяется формулой

$$\dot{m} = \rho(c_\Gamma - \vec{u} \cdot \vec{n}).$$

В настоящей работе предлагается использовать следующее соотношение для определения суффозионного потока

$$\dot{m} = \delta(s)R(\phi)\max\{|\vec{v}_1| - v_k, 0\}. \quad (1.20)$$

Здесь

$$\delta(s) = \begin{cases} 0, & s \geq 1; \\ 1 - s, & 0 < s < 1; \\ 1, & s \leq 0. \end{cases}$$

$$R(\phi) = \begin{cases} 0, & \phi \geq 1; \\ \phi(1 - \phi), & 0 < \phi < 1; \\ 0, & \phi \leq 0. \end{cases}$$

### 1.3 Автомоделный случай

Рассмотрим одномерное движение при условиях  $\vec{g} = 0$ ,  $\vec{v}_3 = 0$ . Система (1.6) – (1.8) преобразуется к виду [20]

$$\frac{\partial(s\phi)}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial(1-s)\phi}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{\dot{m}}{\rho_2^0}, \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} = -\frac{\dot{m}}{\rho_2^0}. \quad (1.23)$$

Решение системы (1.21) – (1.23) ищется в области  $(-\infty, ct)$  в предположении, что все искомые функции зависят лишь от переменной  $\xi = x - ct$  ( $c$  - неизвестная постоянная). Вместо (1.21) – (1.23) получим [20]

$$-c \frac{d(s\phi)}{d\xi} + \frac{dv_1}{d\xi} = 0, \quad (1.24)$$

$$-c \frac{d(1-s)\phi}{d\xi} + \frac{dv_2}{d\xi} = \frac{\dot{m}}{\rho_2^0}, \quad (1.25)$$

$$-c \frac{d(1-\phi)}{d\xi} = -\frac{\dot{m}}{\rho_2^0}. \quad (1.26)$$

Здесь искомыми являются функции  $s(\xi)$ ,  $\phi(\xi)$ ,  $v_1$ ,  $v_2$  и постоянная  $c$ .

Из (1.24) следует

$$v_1 - cs\phi = A_1. \quad (1.27)$$

Складывая уравнения (1.25) и (1.26), получим [20]

$$v_2 - c(1 - s\phi) = A_2, \quad (1.28)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  - постоянные. Определим  $A_1$  и  $A_2$  из следующих краевых условий:

$$v_1|_{\xi=0} = v_1^+, \quad v_2|_{\xi=0} = v_2^+, \quad s|_{\xi=0} = s^+, \quad \phi|_{\xi=0} = \phi^+,$$

$$v_1|_{\xi \rightarrow -\infty} = v_1^-, \quad v_2|_{\xi \rightarrow -\infty} = v_2^-, \quad s|_{\xi \rightarrow -\infty} = s^-, \quad \phi|_{\xi \rightarrow -\infty} = \phi^-.$$

Из (1.27) и (1.28) следует [20]

$$\begin{aligned}v_1^- - cs^- \phi^- &= A_1, \\v_2^- - c(1 - s^- \phi^-) &= A_2, \\v_1^+ - cs^+ \phi^+ &= A_1, \\v_2^+ - c(1 - s^+ \phi^+) &= A_2.\end{aligned}$$

Рассмотрим случай когда

$$s^+ \phi^+ \neq s^- \phi^-, \quad v_1^+ \neq v_1^-, \quad v_2^+ \neq v_2^-.$$

Положим

$$v_1^- = \frac{v_1^+ s^- \phi^-}{s^+ \phi^+}, \quad v_2^- = \frac{v_1^+ - v_1^-}{s^+ \phi^+}, \quad v_2^+ = \frac{v_1^+}{s^+ \phi^+} - v_1^+.$$

Тогда

$$A_1 = 0, A_2 = 0, \quad c = \frac{v_1^+}{s^+ \phi^+}, \quad s^+ = \frac{v_1^+}{(v_2^+ + v_1^+) \phi^+}.$$

При сделанных ранее предположениях из уравнения (1.9) выводим [20]

$$v_1 = -K_0 k_{01} \frac{dp_1}{d\xi}, \quad (1.29)$$

$$v_2 = -K_0 k_{02} \frac{dp_2}{d\xi}. \quad (1.30)$$

Вычитая из равенства (1.30) равенство (1.29) предварительно домножив (1.29) на  $k_{02}$ , а (1.30) на  $k_{01}$  получим [20]

$$k_{01}c(1 - s\phi) - k_{02}cs\phi = -K_0 k_{01} k_{02} \frac{\partial p_c}{\partial s} \frac{ds}{d\xi}. \quad (1.31)$$

Разделив (1.31) на  $k$  и на  $K_0$  получим уравнение для  $s$  [20]

$$a(s) \frac{ds}{d\xi} = \frac{k_{01}c}{kK_0} - \frac{cs\phi}{K_0}.$$

На множестве  $A = \{\xi | 0 < s < 1; 0 < \phi < 1; |v_1| > v_k\}$  имеем  $v_1 = |c|s\phi > 0$  и  $\dot{m} \neq 0$ . Уравнение (1.8) с учетом (1.20) на множестве  $A$  имеет вид [20]

$$-c \frac{d\phi}{d\xi} = \lambda(1 - s)\phi(1 - \phi)(|c|s\phi - v_k).$$

Система уравнений определяет искомые насыщенность  $s$  и пористость  $\phi$ :

$$a(s) \frac{ds}{d\xi} = \frac{k_{01}c}{kK_0} - \frac{cs\phi}{K_0}. \quad (1.32)$$

$$-c \frac{d\phi}{d\xi} = \lambda(1-s)\phi(1-\phi)(|c|s\phi - v_k). \quad (1.33)$$

Краевые условия имеют вид:

$$v_1|_{\xi=0} = v_1^+, v_2|_{\xi=0} = v_2^+, s|_{\xi=0} = s^+, \phi|_{\xi=0} = \phi^+, \quad (1.34)$$

$$v_1|_{\xi \rightarrow -\infty} = v_1^-, v_2|_{\xi \rightarrow -\infty} = v_2^-, s|_{\xi \rightarrow -\infty} = s^-, \phi|_{\xi \rightarrow -\infty} = \phi^-.$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Решением задачи (1.32) - (1.34) называются функции  $\phi(\xi)$ ,  $s(\xi)$ , и фиксированный параметр  $c < 0$  если:

1) функция  $\phi(\xi)$  имеет непрерывную производную, удовлетворяет уравнению

$$-c \frac{d\phi}{d\xi} = \lambda(1-s)\phi(1-\phi) \max\{|c|s\phi - v_k, 0\}$$

и условиям  $\phi(0) = \phi^+$ ,  $\phi|_{\xi \rightarrow -\infty} = \phi^-$ ;

2) функция  $s(\xi)$  имеет непрерывную производную с весом  $a(s)$ , удовлетворяет уравнению

$$a(s) \frac{ds}{d\xi} = \frac{k_0 c}{k K_0} - \frac{cs\phi}{K_0}$$

и условиям  $s(0) = s^+$ ,  $s|_{\xi \rightarrow -\infty} = s^-$ .

Во многих практических задачах капиллярным давлением пренебрегают. Рассмотрим случай, когда  $p_c = 0$ , т. е.  $p_1 = p_2$ . Система (1.32), (1.33) примет вид:

$$k_0 c - k c s \phi = 0, \quad (1.35)$$

$$-c \frac{d\phi}{d\xi} = \lambda(1-s)\phi(1-\phi)(|c|s\phi - v_k),$$

$$\phi(0) = \phi^+, \quad \phi|_{\xi \rightarrow -\infty} = \phi^-, \quad s(0) = s^+, \quad s|_{\xi \rightarrow -\infty} = s^-. \quad (1.36)$$

Решением задачи (1.35) - (1.36) удовлетворяет определению решения задачи (1.32) - (1.34) с учетом изменения уравнения для  $s$ .

Из равенства (1.36) найдем пористость грунта  $\phi = \frac{s^{n_1-1}}{k}$ .

**Лемма 1.** Пусть  $\phi(\xi)$  - решение задачи (1.35), (1.36) и дополнительно известно, что  $\phi^+ \geq 0$ ,  $\phi^- \geq 0$ . Тогда справедлива оценка  $0 \leq \phi \leq 1$  для  $\xi \in (-\infty, \infty)$ .

*Доказательство.*

Введем срезающую функцию  $\bar{\phi} = \max(-\phi; 0)$ . Имеем  $\bar{\phi}(0) = 0$ . Пусть  $\phi < 0$ , тогда  $\bar{\phi} = \phi$ .

Умножив уравнение (1.35) на  $\bar{\phi}$  и проинтегрировав, получим

$$\int_{\xi}^0 \bar{\phi} d\xi = \frac{c}{2} \int_{\xi}^0 \frac{d\bar{\phi}^2}{d\xi} d\xi = -\frac{c}{2} \bar{\phi}^2(\xi).$$

Отметим, что в силу определения срезки  $\bar{\phi}$  интегралы берутся в области, в которой  $\bar{\phi}(\xi) = \phi$  и  $R(\phi) = 0$ . Из равенства следует, что  $\bar{\phi}(\xi) = 0$ . Оценка снизу доказана.

Введем срезающую функцию  $\underline{\phi} = \max(\phi - 1; 0)$ ,  $\underline{\phi} = 0$ . Пусть  $\phi > 1$ , тогда  $\underline{\phi} = \phi - 1$ .

Умножив уравнение (1.35) на  $\underline{\phi}$  и проинтегрировав, получим

$$\int_{\xi}^0 \dot{m} \underline{\phi} d\xi = \frac{c}{2} \int_{\xi}^0 \frac{d\underline{\phi}^2}{d\xi} d\xi = -\frac{c}{2} \underline{\phi}^2(\xi).$$

Отметим, что в силу определения срезки  $\underline{\phi}$  интегралы берутся в области, в которой  $\underline{\phi}(\xi) = \phi - 1$  и  $R(\phi) = 0$ . Из равенства следует, что  $\underline{\phi}(\xi) = 0$ . Оценка сверху доказана.

Лемма 1 может быть усилена.

**Лемма 2.** Пусть  $\phi(\xi)$  - решение задачи (1.35),(1.36) и  $0 \leq \phi \leq 1$ ,  $\phi^+ > \phi^- > 0$ , тогда  $\phi^- < \phi < \phi^+$ .

*Доказательство.*

Поскольку  $\dot{m} \geq 0$ , то  $\frac{d\phi}{d\xi} \geq 0$  и, следовательно,  $\phi(\xi)$ - монотонно возрастает, т. е.  $\phi^- \leq \phi \leq \phi^+$ .

**Лемма 3.** Пусть  $s(\xi)$  - решение задачи (1.35),(1.36) и дополнительно выполнены следующие условия

$$s^- < s^+, \quad 0 < k_0^{-1} \leq k \leq k_0 < 1.$$

Тогда справедлива оценка

$$0 < s^- < s < s^+ < 1,$$

причем

$$s^+ = \sqrt[n_1-1]{k^1 \phi^+}, \quad s^- = \sqrt[n_1-1]{k \phi^-}.$$

*Доказательство.*

Используя представление  $\phi = \frac{s^{n_1-1}}{k}$  и используя результаты леммы 2 выводим неравенства

$$\phi^- < \frac{s^{n_1-1}}{k} < \phi^+,$$

$$\sqrt[n_1-1]{k \phi^-} < s < \sqrt[n_1-1]{k \phi^+}.$$

Поэтому

$$s^+ = \sqrt[n_1-1]{k_0 \phi^+} \leq \sqrt[n_1-1]{k \phi^+} \leq \sqrt[n_1-1]{k_0 \phi^+} < 1,$$

$$s^- = \sqrt[n_1-1]{k \phi^-} > 0.$$

**Лемма 4.** Если начальные данные таковы, что  $|v_1^-| < v_k < |v_1^+|$ , то существует точка такая  $\xi_*$ , что для всех  $\xi < \xi_*$  выполняется равенство  $|v_1| = v_k$ .

*Доказательство.*

Проверим монотонность функции  $|v_1(\xi)|$ .  
Продифференцировав соотношение (1.27) по  $\xi$ , получим

$$\frac{d|v_1|}{d\xi} = |c|s\frac{d\phi}{d\xi} + |c|\phi\frac{ds}{d\xi}.$$

Отметим, что

$$|c| > 0, s > 0, \frac{d\phi}{d\xi} > 0,$$

т. е.  $|c|s\frac{d\phi}{d\xi} > 0$ .

Дифференцируя соотношение для  $\phi$  по  $\xi$ , получим

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \frac{1}{k} \frac{ds^{n_1-1}}{d\xi} = \frac{n_1-1}{k} s^{n_1-2} \frac{ds}{d\xi}.$$

Имеем

$$|c| > 0, \phi > 0, \frac{ds}{d\xi} > 0,$$

тем самым  $c\phi\frac{ds}{d\xi} > 0$ .

Поэтому  $\frac{d|v_1|}{d\xi} > 0$  и, следовательно,  $|v_1|$  – монотонная функция.

Ввиду монотонности  $|v_1|$  и свойства  $|v_1^+| > v_k > |v_1^-|$ , существует такая точка  $\xi_*$ , что  $|v_1(\xi_*)| = v_k$ .

Поэтому  $\frac{d\phi}{d\xi} = 0$  для всех  $\xi \leq \xi_*$ , т.е.  $\phi$  постоянна на этом множестве.

Таким образом получена теорема.

**Теорема.** При выполнении условий лемм 1-4 существует решение задачи (1.35), (1.36).

## 1.4 Численное решение автомодельной задачи внутренней эрозии с учетом капиллярных сил

Рассматривается система уравнений

$$\frac{ds}{d\xi} = \frac{k_{01}c}{a(s)kK_0} - \frac{cs\phi}{a(s)K_0}, \quad (1.37)$$

$$\frac{d\phi}{d\xi} = -\frac{\lambda}{c}(1-s)\phi(1-\phi)(|c|s\phi - v_k) \quad (1.38)$$

при следующих краевых условиях:

$$v_1|_{\xi=0} = v_1^+, v_2|_{\xi=0} = v_2^+, s|_{\xi=0} = s^+, \phi|_{\xi=0} = \phi^+, \quad (1.39)$$

$$v_1|_{\xi \rightarrow -\infty} = v_1^-, v_2|_{\xi \rightarrow -\infty} = v_2^-, s|_{\xi \rightarrow -\infty} = s^-, \phi|_{\xi \rightarrow -\infty} = \phi^-.$$

Здесь

$$v_1^- = \frac{v_1^+ s^- \phi^-}{s^+ \phi^+}, \quad v_2^- = \frac{v_1^+ - v_1^-}{s^+ \phi^+}, \quad v_2^+ = \frac{v_1^+}{s^+ \phi^+} - v_1^+.$$



Параметр  $c$  вычисляется по формуле

$$c = \frac{v_1^+}{s^+ \phi^+}.$$

Особенностью данной задачи является возможность обращения коэффициента  $a(s)$  в ноль. Знаменатель уравнения (1.37) обращается в ноль при  $a(s) = 0$ . Этот случай рассмотрим отдельно. Пусть  $a(s) = 0$  при  $s = 0$  или  $s = 1$ . То правая часть уравнения (1.38) становится равной нулю. Т. е.  $\frac{d\phi}{d\xi} = 0$ .

Пористость  $\phi$  не изменяется.

Для получения численного решения системы (1.37), (1.38) с заданными краевыми условиями (1.39) используется метод Рунге-Кутты 4 порядка точности. Численный алгоритм решения системы реализован на языке C++ с использованием библиотеки QT.

Используемые в расчетах значения параметров представлены в таблице 1. Таблица 1. Значения параметров.

Символ	Значение
концентрация $s _{\xi \rightarrow -\infty}, s^-$	0.503
концентрация $s _{\xi=0}, s^+$	0.99
пористость $\phi _{\xi \rightarrow -\infty}, \phi^-$	0.9
пористость $\phi _{\xi=0}, \phi^+$	0.25
скорость воды $v_1 _{\xi \rightarrow -\infty}, v_1^-$	$\frac{v_1^+ s^- \phi^-}{s^+ \phi^+}$
скорость воды $v_1 _{\xi=0}, v_1^+$	-0.007 м/с
скорость подвижных частиц $v_2 _{\xi \rightarrow -\infty}, v_2^-$	$\frac{v_1^+ - v_1^-}{s^+ \phi^+}$
скорость подвижных частиц $v_2 _{\xi=0}, v_2^+$	$\frac{v_1^+}{s^+ \phi^+} - v_1^+$
тензор фильтрации, $K_0$	$\phi^2$
параметр, $c$	$\frac{v_1^+}{s^+ \phi^+}$
критическая скорость, $v_k$	0 м/с
капиллярные силы, $p_c$	$\frac{1}{s^2 - 1}$

Относительная фазовая проницаемость воды

$$k_{01} = \begin{cases} 0, & s < 0; \\ s^{n_1}, & 0 < s < 1; \\ 1, & s > 1. \end{cases}$$

Относительная фазовая проницаемость подвижных частиц

$$k_{02} = \begin{cases} 1, & s < 0; \\ (1 - s)^{n_2}, & 0 < s < 1; \\ 0, & s > 1. \end{cases}$$

На рисунках 1-4 рассмотрен случай, когда степень  $n_i = 2$ .

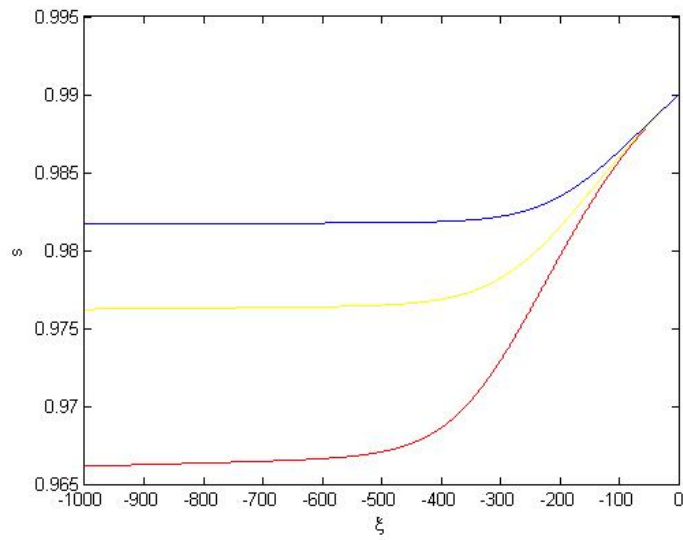


Рисунок 1. Изменение концентрации воды при  $\lambda = 0.5$ (красная линия),  $\lambda = 0.7$ (желтая),  $\lambda = 1$ (синяя)

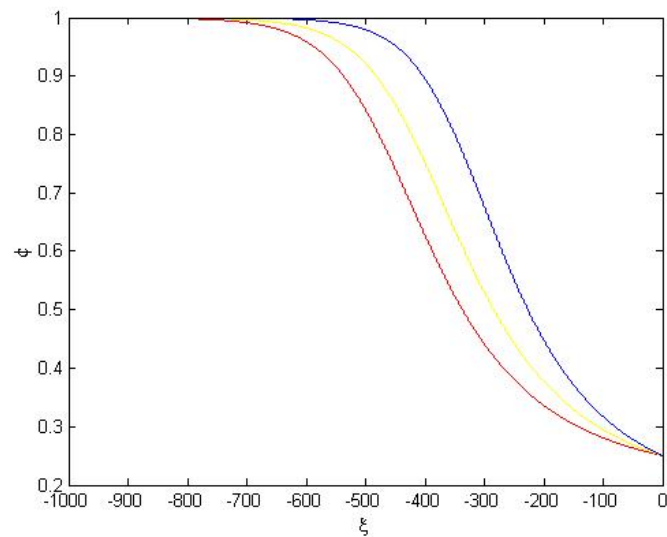


Рисунок 2. Изменение пористости грунта при  $\lambda = 0.5$ (красная линия),  $\lambda = 0.7$ (желтая),  $\lambda = 1$ (синяя)

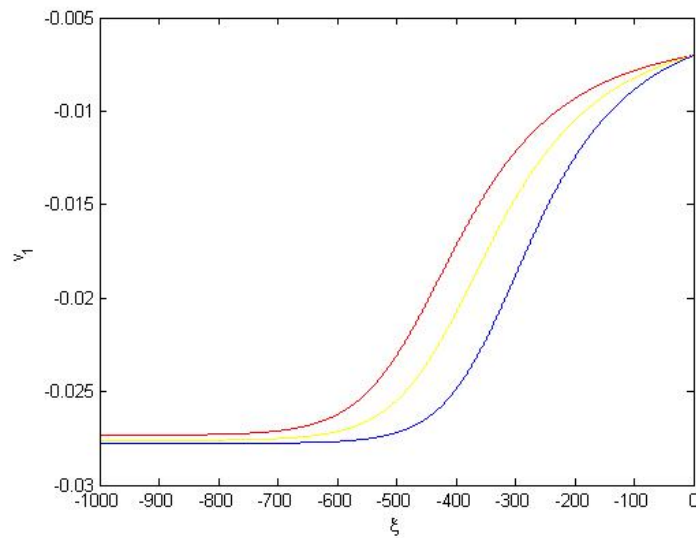


Рисунок 3. Изменение скорости воды при  $\lambda = 0.5$ (красная линия),  $\lambda = 0.7$ (желтая),  $\lambda = 1$ (синяя)

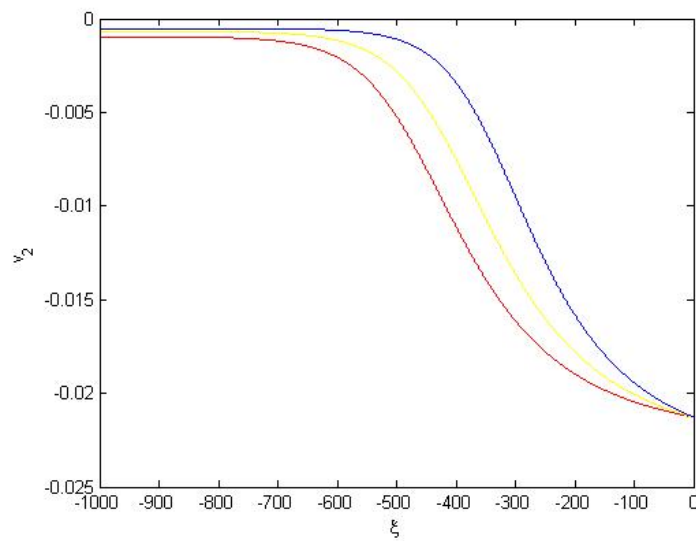


Рисунок 4. Изменение скорость подвижных частиц при  $\lambda = 0.5$ (красная линия),  $\lambda = 0.7$ (желтая),  $\lambda = 1$ (синяя)

На рисунках 1,2 видно выполнение физического принципа максимума для концентрации воды  $s$  и пористости грунта  $\phi$ . Заметим, что при увеличении  $\lambda$  концентрация воды, пористость грунта, скорость подвижных частиц увеличивается, скорость воды уменьшается.

На рисунках 5-8 рассмотрен случай, когда степень  $n_i = 3$ .

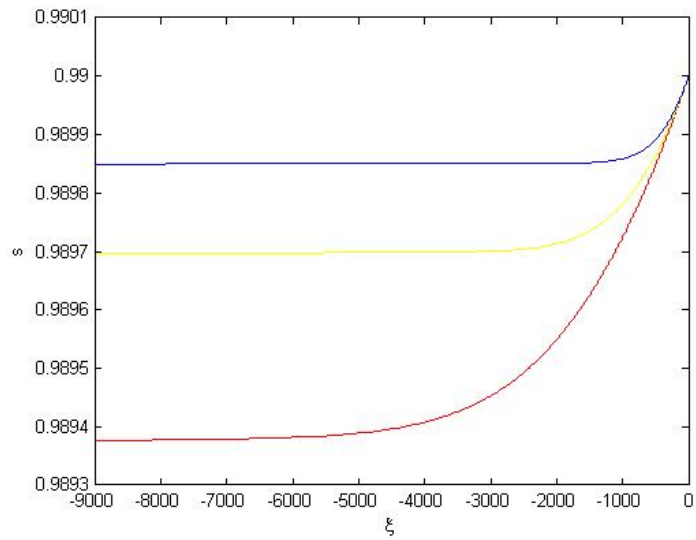


Рисунок 5. Изменение концентрации воды при  $\lambda = 0.1$ (красная линия),  $\lambda = 0.2$ (желтая),  $\lambda = 0.3$ (синяя)

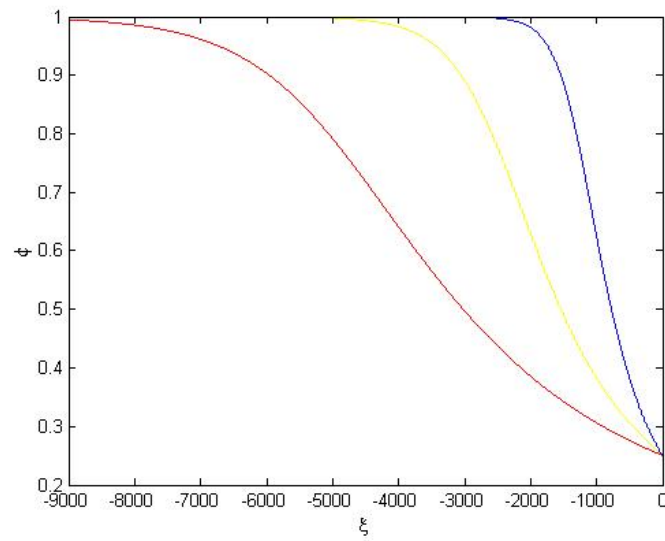


Рисунок 6. Изменение пористости грунта при  $\lambda = 0.1$ (красная линия),  $\lambda = 0.2$ (желтая),  $\lambda = 0.3$ (синяя)

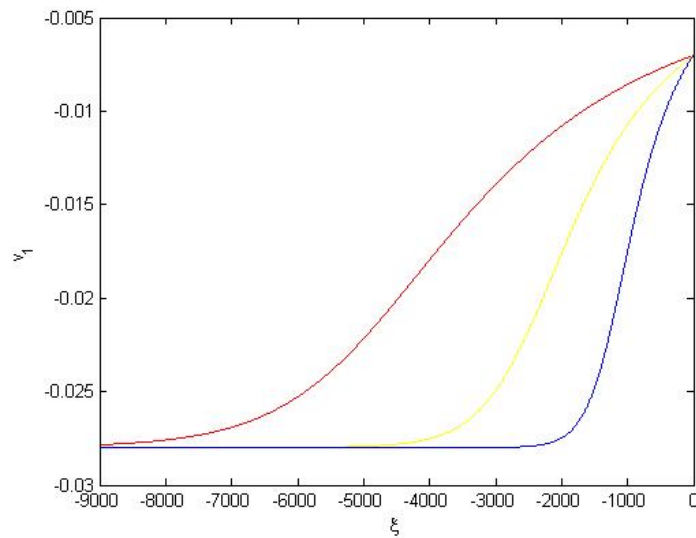


Рисунок 7. Изменение скорости воды при  $\lambda = 0.1$ (красная линия),  $\lambda = 0.2$ (желтая),  $\lambda = 0.3$ (синяя)

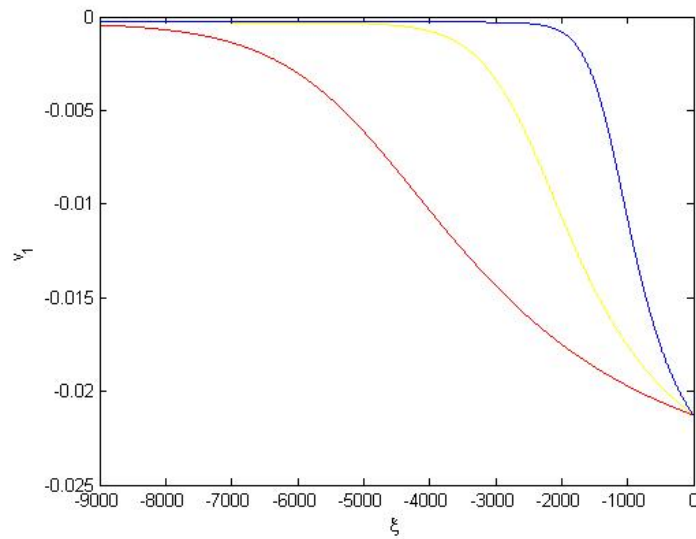


Рисунок 8. Изменение скорость подвижных частиц при  $\lambda = 0.1$ (красная линия),  $\lambda = 0.2$ (желтая),  $\lambda = 0.3$ (синяя)

Заметим, что на рисунках 3 и 4 выполнен физический принцип максимума для концентрации воды  $s$  и пористости грунта  $\phi$ . При увеличении  $\lambda$  концентрация воды, пористость грунта, скорость подвижных частиц увеличивается, скорость воды уменьшается.

## 2 Численное исследование задачи о внутренней эрозии

### 2.1 Постановка задачи.

Рассматриваются процессы фильтрации подземных вод и внутренней суффозии. Грунт моделируется как трехфазная сплошная пористая среда. Поры полностью заполнены смесью воды ( $i = 1$ ) и подвижных твердых частиц ( $i = 2$ ). Доля пор в грунте ( $i = 3$ ) определяется пористостью  $\phi = (V_1 + V_2)/V$ , где  $V = V_1 + V_2 + V_3$  – общий объем грунта,  $V_1, V_2, V_3$  – соответственно объемы воды, подвижных твердых частиц и скелета грунта.

Уравнения сохранения массы для каждой из фаз с учетом фазового перехода имеют вид [21]

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_1 \vec{u}_1) = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_2 \vec{u}_2) = I, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \rho_3}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_3 \vec{u}_3) = -I, \quad (2.3)$$

где  $I$  – интенсивность фазового перехода (суффозионный поток);  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$  – соответственно истинные скорости воды, подвижных твердых частиц грунта и скелета грунта;  $\rho_1 = \phi s_1 \rho_1^0$ ,  $\rho_2 = \phi s_2 \rho_2^0$ ,  $\rho_3 = (1 - \phi) \rho_3^0$  – приведенные плотности воды, подвижных твердых частиц грунта и скелета;  $s_1 = V_1/(V_1 + V_2)$ ,  $s_2 = V_2/(V_1 + V_2)$  – концентрации воды (насыщенность) и подвижных твердых частиц в порах;  $\rho_1^0, \rho_2^0, \rho_3^0$  – истинные плотности воды, подвижных твердых частиц грунта и скелета грунта;  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$  – оператор градиента,  $x = (x_1, x_2, x_3)$ . В рассматриваемом случае  $\rho_3^0 = \rho_2^0$ , так как подвижные частицы захватываются суффозионным потоком из грунта.

Уравнения сохранения импульса для воды и подвижных твердых частиц грунта берем в виде [21, 22]

$$s_i \phi (\vec{u}_i - \vec{u}_3) = -K_0(\phi) \frac{\bar{k}_{0i}}{\mu_i} (\nabla p_i + \rho_i^0 \vec{g}), \quad i = 1, 2. \quad (2.4)$$

Здесь  $K_0(\phi)$  – симметрический тензор фильтрации пористой среды;  $\bar{k}_{0i}$  – относительные фазовые проницаемости ( $k_{0i} = k_{0i}(s_i) \geq 0$ ,  $k_{0i}|_{s_i=0} = 0$ ,  $0 \leq s_i \leq 1$ );  $\mu_i$  – коэффициенты динамической вязкости;  $\vec{g}$  – ускорение силы тяжести;  $p_1, p_2$  – соответственно давления первой и второй фаз.

Пусть  $s = s_1$ , тогда  $1 - s = s_2$ . Разность фазовых давлений удовлетворяет соотношению вида [22]

$$p_2 - p_1 = p_c(s) \geq 0, \quad (2.5)$$

где  $p_c$  – заданная функция обладающая свойствами [22, 23]:

$$p_c(s) > 0, \quad p_c(0) = \infty, \quad p_c(1) = 1, \quad \frac{\partial p_c}{\partial s} < 0.$$

В дальнейшем предполагается, что скелет грунта неподвижен ( $\vec{u}_3 = 0$ ), истинные плотности  $\rho_i^0$  постоянны. В этом случае система приводится к эллиптической – параболической системе [21] и уравнению кинетики. Действительно, используя сделанные предположения вместо (2.1) – (2.4) получим

$$\frac{\partial(s\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (s\phi\vec{u}_1) = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial(1-s)\phi}{\partial t} + \nabla \cdot ((1-s)\phi\vec{u}_2) = \frac{I}{\rho_2^0}, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} = -\frac{I}{\rho_3^0}, \quad (2.8)$$

$$s_i\phi\vec{u}_i = -K_0(\phi)k_{0i}(\nabla p_i + \rho_i^0\vec{g}), \quad k_{0i} = \frac{\bar{k}_{0i}}{\mu_i}. \quad (2.9)$$

Сложив уравнения (2.6), (2.7) и (2.8), выводим

$$\nabla \cdot (s\phi\vec{u}_1 + (1-s)\phi\vec{u}_2) = 0. \quad (2.10)$$

Положим

$$\vec{v} = s\phi\vec{u}_1 + (1-s)\phi\vec{u}_2.$$

Используя (2.9) и (2.5) для  $\vec{v}$  получим следующее представление

$$\begin{aligned} -\vec{v} &= K_0(\phi)(k_{01}(\nabla(p_2 - p_c) + \rho_1^0\vec{g}) + k_{02}(\nabla p_2 + \rho_2^0\vec{g})) = \\ &= K_0(k(\nabla p_2 - \frac{k_{01}}{k} \frac{\partial p_c}{\partial s} \nabla s) + \vec{g}(\rho_2^0 k_{02} + \rho_1^0 k_{01})) = \\ &= K_0(k \nabla (p_2 + \int_s^1 \frac{k_{01}(\xi)}{k(\xi)} \frac{\partial p_c}{\partial \xi} d\xi) + \vec{g}(\rho_2^0 k_{02} + \rho_1^0 k_{01})) = \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$+ \rho_1^0 k_{01}) = K \nabla p + \vec{f},$$

где  $p$  так называемое "приведенное" давление [21]

$$p = p_2 + \int_s^1 \frac{k_{01}(\xi)}{k(\xi)} \frac{\partial p_c}{\partial \xi} d\xi. \quad (2.12)$$

Здесь введены обозначения

$$k(s) = k_{01} + k_{02},$$

$$K = K_0(\phi)k(s),$$

$$\vec{f} = K_0\vec{g}(k_{01}\rho_1^0 + k_{02}\rho_2^0).$$

С учетом (2.12) для  $\vec{v}_2 = (1 - s)\phi\vec{u}_2$  имеем

$$-\vec{v}_2 = -a \nabla s + K_0 k_{02} \nabla p + \vec{f}_0, \quad (2.13)$$

где

$$a(s, \phi) = -K_0 \frac{k_{01} k_{02}}{k} \frac{\partial p_c}{\partial s},$$

$$\vec{f}_0 = K_0 k_{01} \rho_2^0 \vec{g}.$$

Используя (2.11), находим

$$K_0 k_{02} \nabla p = -k_{02}(\vec{v} + \vec{f})/k.$$

Тогда вместо (2.13) получим

$$-\vec{v}_2 = -a \nabla s - b\vec{v} - \vec{F}, \quad (2.14)$$

где

$$\vec{F} = b\vec{f} - \vec{f}_0 = \frac{k_{01} k_{02} K_0 \vec{g}}{k} (\rho_1^0 - \rho_2^0), \quad b(s) = \frac{k_{02}}{k}.$$

Подставляя (2.13) в (2.6), привлекая (2.8) и (2.10) приходим к системе уравнений относительно  $s$ ,  $p$  и  $\phi$

$$\frac{\partial(s\phi)}{\partial t} = \nabla \cdot (a \nabla s - K_0 k_{01} \nabla p - \vec{f}_0), \quad (2.15)$$

$$\nabla \cdot (K \nabla p + \vec{f}) = 0, \quad (2.16)$$

$$\rho_3^0 \frac{\partial(1 - \phi)}{\partial t} = -I. \quad (2.17)$$

Используя (2.14) приходим к следующей эквивалентной системе относительно  $s$ ,  $p$ ,  $\phi$  и  $\vec{v}$ :

$$\frac{\partial s\phi}{\partial t} = \nabla \cdot (a \nabla s + b\vec{v} + \vec{F}), \quad (2.18)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (2.19)$$

$$\rho_3^0 \frac{\partial(1 - \phi)}{\partial t} = -I, \quad (2.20)$$

$$-\vec{v} = K \nabla p + \vec{f}. \quad (2.21)$$

Особенностью рассматриваемой задачи является возможное вырождение на решение уравнения (2.15) поскольку  $a(0, \phi) = a(1, \phi) = 0$ , а коэффициент фильтрации как правило задается следующим образом  $K_0 = B\phi^3/(1 - \phi)^2$  или  $K_0 = B\phi^\alpha$ ;  $3 \leq \alpha \leq 5$ ; [24]. Кроме того пористость и насыщенность должны удовлетворять условиям  $0 \leq s \leq 1$ ,  $0 \leq \phi < 1$ .

Интенсивность фазового перехода

$$I = \begin{cases} \lambda \rho_3^0 (1 - \phi) (1 - s) \phi (|\vec{v}_1| - |\vec{v}_k|), & |\vec{v}_1| \geq |\vec{v}_k|; \\ 0, & |\vec{v}_1| < |\vec{v}_k|. \end{cases}$$



## 2.2 Алгоритм численного решения одномерной задачи

В одномерном случае система уравнений (2.18) – (2.21) примет вид

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (K_0 a \frac{\partial s}{\partial x} + bv + \vec{F}) - s \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (K \frac{\partial p}{\partial x} + f) = 0, \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial(\phi)}{\partial t} = \frac{I}{\rho_3^0}. \quad (2.24)$$

Начальные и граничные условия:

$$s(x, 0) = s_1, \quad \frac{\partial s}{\partial x}(0, t) = s_0, \quad s(H, t) = s_h, \quad (2.25)$$

$$\phi(x, 0) = \phi_0, \quad p(x, 0) = p_0, \quad p(H, t) = p_h,$$

$x \in [0, H]$ .

Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{t}{t_{sc}}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{x_{sc}}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{p_{sc}}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{v_{sc}}, \\ v_{sc} &= \frac{x_{sc}}{t_{sc}}, \quad \mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad g = \tilde{g} \frac{x_{sc}}{t_{sc}^2}, \quad p_{sc} = \frac{\rho_1^0 x_{sc}^2}{t_{sc}^2}. \end{aligned}$$

Пусть  $x_{sc} = H$ , тогда  $\tilde{x} \in [0, 1]$ .

В безразмерных переменных уравнение (2.22) для концентрации  $s$  примет вид:

$$\phi \frac{\partial s}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} (\hat{a} \frac{\partial s}{\partial \tilde{x}} + b\tilde{v} + \hat{F}) - s \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{t}}, \quad (2.26)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{a}(s, \varphi) &= \hat{K}_0 \left( -\frac{\bar{k}_{01} \bar{k}_{02}}{\mu \bar{k}_{01} + \bar{k}_{02}} \frac{\partial p_c}{\partial s} \right), \\ \hat{F} &= \hat{K}_0 \tilde{g} \frac{\bar{k}_{01} \bar{k}_{02} (1 - \frac{\rho_1^0}{\rho_2^0})}{\mu \bar{k}_{01} + \bar{k}_{02}}, \quad \hat{K}_0 = \frac{B p_{sc} t_{sc}}{x_{sc}^2 \mu_1} \tilde{K}_0, \\ \tilde{K}_0 &= \phi^\alpha, \quad 3 \leq \alpha \leq 5, \end{aligned}$$

$$v \frac{t_{sc}}{x_{sc}} = \tilde{v} = \tilde{v}_1 + \tilde{v}_2, \quad \tilde{v}_1 = -\frac{B p_{sc} t_{sc}}{x_{sc}^2 \mu_1} \tilde{K}_0 \bar{k}_{01} \left( \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial \tilde{x}} + \tilde{g} \right),$$

$$\tilde{v}_2 = -\frac{Bp_{sc}t_{sc}\tilde{K}_0}{x_{sc}^2\mu_2}\bar{k}_{02}\left(\frac{\partial\tilde{p}_2}{\partial\tilde{x}} + \frac{\rho_2^0}{\rho_1^0}\tilde{g}\right), \quad b(s) = \frac{\bar{k}_{02}}{\mu\bar{k}_{01} + \bar{k}_{02}}.$$

Обезразмеривания уравнения (2.24) для пористости  $\phi$ , получим

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{t}} = \hat{I}, \quad (2.27)$$

$$\hat{I} = \tilde{\lambda}(1 - \phi)(1 - s)\phi\left(|\hat{K}_0\bar{k}_{01}\left(\frac{\partial p_1}{\partial\tilde{x}} + \tilde{g}\right)| - |v_k|\right).$$

Уравнение (2.23) для приведенного давления  $p$  примет вид

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\left(\hat{K}\frac{\partial p}{\partial\tilde{x}} + \hat{f}\right) = 0, \quad (2.28)$$

где  $\hat{f} = \hat{K}_0(\bar{k}_{01} + \frac{\rho_2^0\mu_1}{\rho_1^0\mu_2}\bar{k}_{02})\tilde{g}$ ,  $\tilde{k} = \bar{k}_{01} + \frac{\mu_1}{\mu_2}\bar{k}_{02}$ ,  $\hat{K} = \hat{K}_0\bar{k}$ .

Опустим крышки и волны, получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial p}{\partial x} + f\right) = 0, \quad (2.29)$$

$$\phi\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial s}{\partial x} + bv + F\right) - s\frac{\partial\phi}{\partial t}, \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = I. \quad (2.31)$$

Введем сетку с распределенными узлами  $\omega_{h\tau} = \{x_i = ih, \quad t_n = n\tau; \quad i = 0, \dots, N, \quad n = 0, \dots, T\}$ ,  $h = 1/N$  - шаг по пространственной координате,  $\tau = \frac{t_k - t_n}{T}$  - шаг по временной переменной. Пусть  $\Gamma_l$  соответствует номер  $N_l = lN$  узла на сетке (предполагается, что  $N_l$  не дробное число). В численных расчетах шаг  $h$  брался равным 0.01 ( $N = 100$ ), а  $\tau = 0.0003$  ( $t_n = 0, t_k = 0.03, T = 100$ ).

Уравнение (2.31) аппроксимируется (неявной) схемой Рунге-Кутты второго порядка точности. Причем, найденное на первом этапе значение  $\tilde{\phi}_i^{n+1}$

$$\tilde{\phi}_i^{n+1} = \phi_i^n + \tau I_i^n, \quad (2.32)$$

затем уточняется следующим образом

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n + \tau \frac{I(\phi_i^n, s_i^n) + I(\tilde{\phi}_i^n, s_i^n)}{2}. \quad (2.33)$$

Аппроксимируем уравнение (2.29) для приведенного давления  $p$  неявной схемой второго порядка точности:

$$K_{i+1/2}^n \frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{h^2} - K_{i-1/2}^n \frac{p_i^n - p_{i-1}^n}{h^2} + \quad (2.34)$$

$$+\frac{\partial f}{\partial s} \frac{s_{i+1}^n - s_{i-1}^n}{2h} + \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h} = 0.$$

Здесь

$$K_{i-1/2}^n = \frac{K(\phi_{i-1}^n, s_{i-1}^n) + K(\phi_i^n, s_i^n)}{2},$$

$$K_{i+1/2}^n = \frac{K(\phi_{i+1}^n, s_{i+1}^n) + K(\phi_i^n, s_i^n)}{2}.$$

Аппроксимация уравнения (2.30) для концентрации воды  $s$  неявной схемой второго порядка точности по пространственной переменной и первого по времени:

$$\begin{aligned} \phi_i^n \frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\tau} &= a_{i+1/2}^n \frac{s_{i+1}^{n+1} - s_i^{n+1}}{h^2} - \\ &- a_{i-1/2}^n \frac{s_i^{n+1} - s_{i-1}^{n+1}}{h^2} + \left( \frac{\partial F}{\partial s} + v \frac{\partial b}{\partial s} \right) \frac{s_{i+1}^{n+1} - s_{i-1}^{n+1}}{2h} + \\ &+ \frac{\partial F}{\partial \phi} \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h} - s_i^n \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\tau}, \\ a_{i-1/2}^n &= \frac{K_0(\phi_{i-1}^n) a(s_{i-1}^n) + K_0(\phi_i^n) a(s_i^n)}{2}, \\ a_{i+1/2}^n &= \frac{K_0(\phi_{i+1}^n) a(s_{i+1}^n) + K_0(\phi_i^n) a(s_i^n)}{2}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Аппроксимация граничных и начальных условий (2.25) имеет вид

$$\phi_0^n = 0.3, \quad (s_0^{n+1} - s_1^n)/h = 0, \quad s_N^n = 1,$$

$$p_0^n = \rho_1^0 \frac{g(\phi_0^n s_0^n (1 - \rho_2^0/\rho_1^0) + \rho_2^0/\rho_1^0) H}{x_{sc} p_{sc}},$$

$$p_N^n = 1/p_{sc}, \quad s_i^0 = \cos^2(\pi x_i).$$

Уравнения (2.35) и (2.34) перепишем в виде

$$-A_i^s s_{i-1}^{n+1} + C_i^s s_i^{n+1} - B_i^s s_{i+1}^{n+1} = D_i^s, \quad (2.36)$$

$$-A_i^p p_{i-1}^{n+1} + C_i^p p_i^{n+1} - B_i^p p_{i+1}^{n+1} = D_i^p, \quad (2.37)$$

где  $A_i^{s,p}, B_i^{s,p}, C_i^{s,p}, D_i^{s,p}$  определяются однозначно в зависимости от искомым функций

$$A_i^s = 2\tau a_{i-1/2}^n + \tau h(|G_i^n| - G_i^n), \quad B_i^s = 2\tau a_{i+1/2}^n + \tau h(|G_i^n| + G_i^n),$$

$$C_i^s = 2h^2 \phi_i^n + 2\tau a_{i+1/2}^n + 2\tau a_{i-1/2}^n + 2\tau h|G_i^n|,$$

$$\begin{aligned}
D_i^s &= 2h^2 \phi_i^n s_i^n + \tau h F_{\phi_i}^n (\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n) - 2h^2 s_i^n (\phi_i^{n+1} - \phi_i^n), \\
A_i^p &= K_{i-1/2}^n, \quad B_i^p = K_{i+1/2}^n, \quad C_i^p = K_{i+1/2}^n + K_{i-1/2}^n, \\
D_i^p &= f_{s_i}^n h (s_{i+1}^n - s_{i-1}^n) / 2 + f_{\phi_i}^n h (\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n) / 2.
\end{aligned}$$

Для численного решения систем обыкновенных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами (2.36) и (2.37) использовался метод встречной прогонки [34]. Решения для  $s$  и  $p$  будем искать в виде

$$s_{i-1}^{n+1} = \alpha_i^s s_i^{n+1} + \beta_i^s, \quad (2.38)$$

$$p_{i-1}^{n+1} = \alpha_i^p p_i^{n+1} + \beta_i^p. \quad (2.39)$$

Здесь  $i = 1, \dots, N-1$ ,  $\tau = 1, \dots, T$ , а прогоночные коэффициенты вычисляются по рекуррентным формулам

$$\alpha_{i+1}^{s,p} = \frac{B_i^{s,p}}{C_i^{s,p} - A_i^{s,p} \alpha_i^{s,p}}, \quad \beta_{i+1}^{s,p} = \frac{D_i^{s,p} + A_i^{s,p} \beta_i^{s,p}}{C_i^{s,p} - A_i^{s,p} \alpha_i^{s,p}}.$$

$\alpha_1^{s,p}$  и  $\beta_1^{s,p}$  определяются из граничных условий.

Алгоритм численного решения начально-краевой задачи следующий: используя начальное значение пористости  $\phi_i^0$  и концентрации  $s_i^0$  находим начальное распределение приведенного давления  $p_i^0$  ( $i = 0, \dots, N$ ), решив систему линейных алгебраических уравнений методом встречной прогонки (2.39). Используя найденное давление определяем скорости фильтрации воды и подвижных частиц грунта  $v_{1i}^0$  и  $v_{2i}^0$ . Из равенства (2.32) находим пористость грунта  $\phi_i^1$  на следующем шаге по времени. Находим концентрацию воды  $s_i^1$  решив систему линейных алгебраических уравнений методом встречной прогонки (2.38), используя найденные давления и пористость. Рассчитываем давление на следующем шаге по времени ( $n = 1$ ). Используя найденные значения искомым функций  $\tilde{\phi}_i^1$ ,  $s_i^1$ ,  $p_i^0$ ,  $p_i^1$ , делаем коррекцию значения пористости на первом шаге по времени, используя формулу (2.33). Повторяя данный алгоритм для следующих шагов по времени, найдем значения искомым функций на всем временном интервале [35].

Используются граничные и начальные условия:

$$\frac{\partial s}{\partial x}(0, t) = 0, \quad s(H, t) = 1,$$

$$\phi(x, 0) = 0.3, \quad s(x, 0) = \cos^2(\pi x_i),$$

$$p(x, 0) = \rho_1^0 \frac{g(\phi_0^n s_0^n (1 - \rho_2^0 / \rho_1^0) + \rho_2^0 / \rho_1^0) H}{x_{sc} p_{sc}}, \quad p(H, t) = 1/p_{sc},$$

В численных расчетах использовался следующий набор модельных параметров взятых из [33, 36]:

$$\rho_1^0 = 1000 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_2^0 = 1440 \text{ кг/м}^3, \quad x_{sc} = 100\text{м}, \quad t_{sc} = 1000\text{с},$$

$$B = 0.00001 \text{ м}^2/\text{с}, \quad g = 9.8 \text{ м/с}^2, \quad v_k = 0,$$

$$\mu_1 = 0.001787 \text{ кг/мс}^2, \quad \mu_2 = 0.003574 \text{ кг/мс}^2.$$

$$k_{01} = \begin{cases} 0, & s \leq 0; \\ s^2, & 0 < s < 1; \\ 1, & s \geq 1. \end{cases} \quad k_{02} = \begin{cases} 1, & s \leq 0; \\ (1-s)^2, & 0 < s < 1; \\ 0, & s \geq 1. \end{cases}$$

Экспериментальное исследование суффозионной устойчивости грунтов проводилось в работе [15]. В данной работе найденное давление  $p$  позволяет определить суммарную скорость фильтрации  $v$ . Исследованию зависимости искомых функций начально краевой задачи от параметра  $\lambda$ , который отвечает за суффозионную устойчивость, посвящены работы [24, 26, 33]. Однако, в этих работах не исследовалась корректность предложенной математической модели. Используемые численные алгоритмы имели первый порядок аппроксимации как по пространственной переменной так и по времени. В этом пункте представлены результаты численных расчетов начально-краевой задачи, для которой доказано существование и единственность классического решения в работе [37] для  $v > v_k$ .

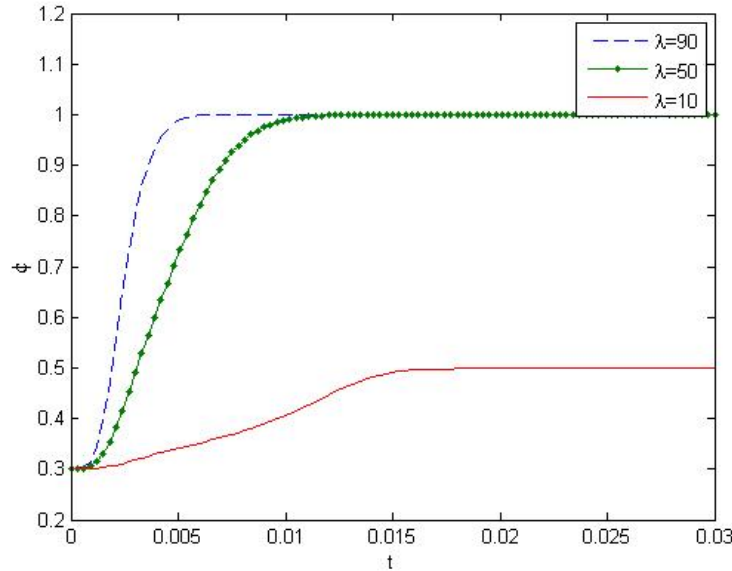


Рисунок 9. Изменение пористости грунта

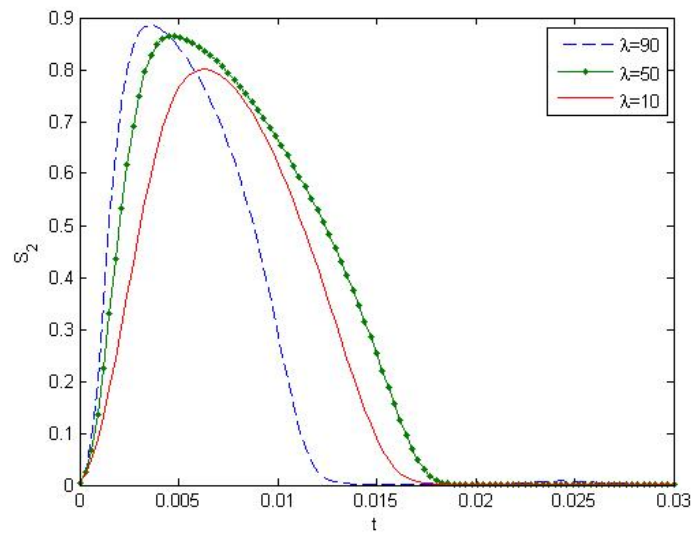


Рисунок 10. Изменение концентрации подвижных частиц грунта в фильтрационном потоке

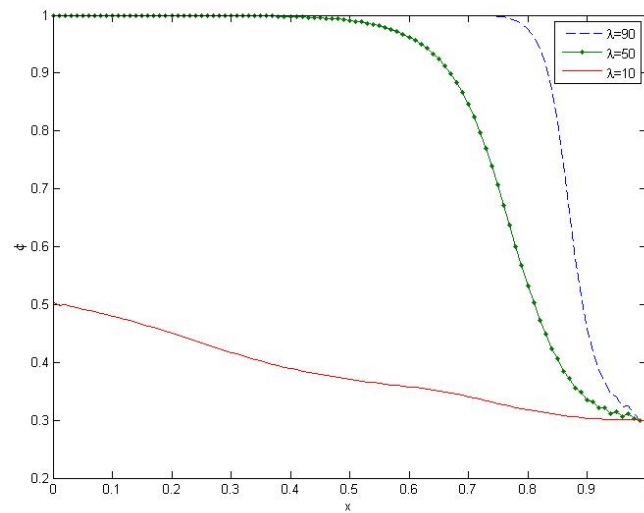


Рисунок 11. Пористость грунта при  $t = 0.0297$

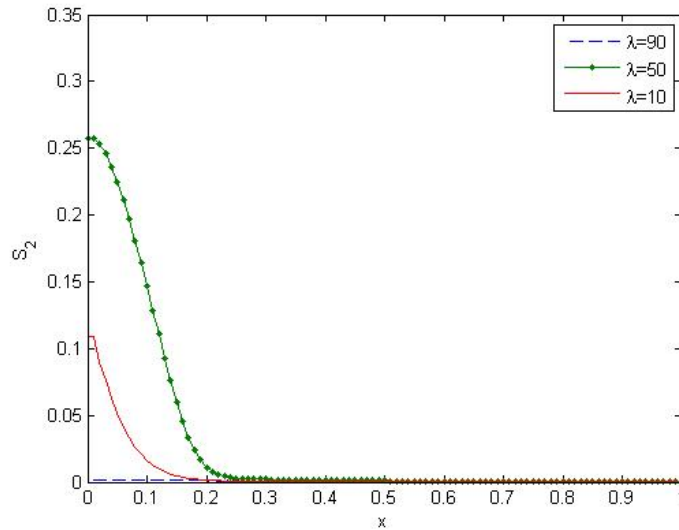


Рисунок 12. Концентрация подвижных частиц грунта в фильтрационном потоке при  $t = 0.015$

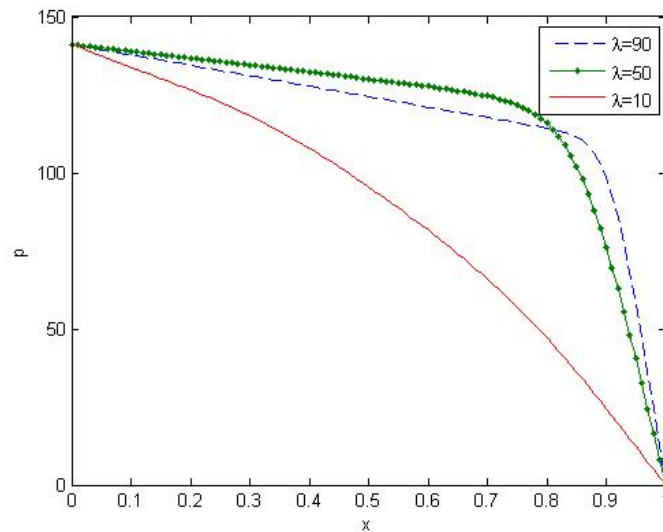


Рисунок 13. Приведенное давление при  $t = 0.012$

На рисунках 9 и 10 представлены графики изменения пористости грунта и концентрации для грунтов имеющих различную суффозионную устойчивость. Процесс суффозии прекращается, если концентрация подвижных частиц грунта равна нулю или пористость равна единице (см. рисунок 9 и 10). Зная распределение пористости (см. рисунок 11) можно оценить размер образовавшейся полости. На рисунках 12 и 13 представлены распределения концентрации и давления при  $t = 0.015$  и  $t = 0.012$  соответственно.

### 2.3 Расчет физических характеристик почвогрунтов в процессе внутренней эрозии

Эрозия почв отрицательно влияет практически на все отрасли сельскохозяйственного производства. Наряду со снижением плодородия почв, уменьшением урожая культур и другими вредными воздействиями на сельскохозяйственное производство, эрозия значительно ухудшает условия функционирования сельскохозяйственных машин и агрегатов при выполнении ими технологических работ. Это проявляется в снижении производительности работы сельскохозяйственной техники на склонах, расчлененных промоинами и оврагами, в ухудшении качества полевых работ, в увеличении износа машин [3]. Рассматривается система уравнений (2.29) – (2.31).

На поверхности грунта поддерживается слой воды глубиной  $h_V$ , достаточной для возникновения суффозионного процесса. Предполагается, что на нижней границе рассматриваемой области суффозионный процесс не происходит, так как скорость воды меньше критической скорости необходимой для возникновения суффозионного процесса.

Начальные и граничные условия задачи имеют вид:

$$s(x, 0) = s_1, \quad \frac{\partial s}{\partial x}(0, t) = s_0, \quad s(H, t) = s_h,$$

$$phi(x, 0) = \begin{cases} 1, & x > h_V; \\ \phi_0. \end{cases}, \quad p(x, 0) = p_0, \quad p(x, H) = p_h,$$

$x \in [0, H]$ . Введем сетку с распределенными узлами  $x_i = ih$ ,  $t_n = n\tau$ ;  $i = 0, \dots, N$ ,  $n = 0, \dots, T$ ,  $h$  - шаг по пространственной координате,  $\tau$  - шаг по времени.

При аппроксимации уравнения (2.30) используется направленная разность для конвективного слагаемого. Уравнение (2.29) аппроксимируется неявной схемой второго порядка точности. В результате получаем систему разностных уравнений:

$$\begin{aligned} \phi_i^n \frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\tau} &= a_{i+1/2}^n \frac{s_{i+1}^{n+1} - s_i^{n+1}}{h^2} - a_{i-1/2}^n \frac{s_i^{n+1} - s_{i-1}^{n+1}}{h^2} + \\ &+ \frac{(|G_i^n| + G_i^n) s_{i+1}^{n+1} - 2|G_i^n| s_i^{n+1} + (|G_i^n| - G_i^n) s_{i-1}^{n+1}}{2h} + \\ &+ F_{\phi_i}^n \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h} - s_i^n \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\tau}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$K_{i+1/2}^n \frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{h^2} - K_{i-1/2}^n \frac{p_i^n - p_{i-1}^n}{h^2} + \quad (2.41)$$

$$+ f_{si}^n \frac{s_{i+1}^n - s_{i-1}^n}{2h} + f_{\phi_i}^n \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h} = 0.$$



Уравнение (2.31) аппроксимируется (неявной) схемой Рунге-Кутты второго порядка точности. Причем, найденное на первом этапе значение  $\tilde{\phi}_i^{n+1}$

$$\tilde{\phi}_i^{n+1} = \phi_i^n + \tau I_i^n, \quad (2.42)$$

затем уточняется следующим образом

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n + \tau \frac{I(\phi_i^n, s_i^n) + I(\tilde{\phi}_i^n, s_i^n)}{2}. \quad (2.43)$$

Здесь  $i = 1, \dots, N - 1$ ,  $\tau = 1, \dots, T - 1$ ,

$$\begin{aligned} a_{i-1/2}^n &= \frac{2K_0(\phi_{i-1}^n)a(s_{i-1}^n)K_0(\phi_i^n)a(s_i^n)}{K_0(\phi_{i-1}^n)a(s_{i-1}^n) + K_0(\phi_i^n)a(s_i^n)}, \\ a_{i+1/2}^n &= \frac{2K_0(\phi_{i+1}^n)a(s_{i+1}^n)K_0(\phi_i^n)a(s_i^n)}{K_0(\phi_{i+1}^n)a(s_{i+1}^n) + K_0(\phi_i^n)a(s_i^n)}, \\ F_{\phi_i}^n &= \frac{\partial F}{\partial \phi}(s_i^n, \phi_i^n), \quad f_{s_i}^n = \frac{\partial f}{\partial s}(s_i^n, \phi_i^n), \quad f_{\phi_i}^n = \frac{\partial f}{\partial \phi}(s_i^n, \phi_i^n) \\ G_i^n &= \frac{\partial F}{\partial s}(s_i^n, \phi_i^n) + v(t_n) \frac{\partial b}{\partial s}(s_i^n), \\ K_{i-1/2}^n &= \frac{2K(\phi_{i-1}^n, s_{i-1}^n)K(\phi_i^n, s_i^n)}{K(\phi_{i-1}^n, s_{i-1}^n) + K(\phi_i^n, s_i^n)}, \\ K_{i+1/2}^n &= \frac{2K(\phi_{i+1}^n, s_{i+1}^n)K(\phi_i^n, s_i^n)}{K(\phi_{i+1}^n, s_{i+1}^n) + K(\phi_i^n, s_i^n)}, \\ I_i^n &= \begin{cases} \lambda(1 - \phi_i^n)(1 - s_i^n)\phi_i^n(|v_{1i}^n| - |v_k|), & |v_{1i}^n| \geq |v_k|; \\ 0, & |v_{1i}^n| < |v_k|. \end{cases} \end{aligned}$$

Уравнения (2.40) и (2.41) перепишем в виде

$$-A_i^s s_{i-1}^{n+1} + C_i^s s_i^{n+1} - B_i^s s_{i+1}^{n+1} = D_i^s, \quad (2.44)$$

$$-A_i^p p_{i-1}^{n+1} + C_i^p p_i^{n+1} - B_i^p p_{i+1}^{n+1} = D_i^p, \quad (2.45)$$

где  $A_i^{s,p}, B_i^{s,p}, C_i^{s,p}, D_i^{s,p}$  определяются однозначно в зависимости от искомым функций

$$A_i^s = 2\tau a_{i-1/2}^n + \tau h(|G_i^n| - G_i^n), \quad B_i^s = 2\tau a_{i+1/2}^n + \tau h(|G_i^n| + G_i^n),$$

$$C_i^s = 2h^2 \phi_i^n + 2\tau a_{i+1/2}^n + 2\tau a_{i-1/2}^n + 2\tau h|G_i^n|,$$

$$D_i^s = 2h^2 \phi_i^n s_i^n + \tau h F_{\phi_i}^n (\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n) - 2h^2 s_i^n (\phi_i^{n+1} - \phi_i^n),$$

$$A_i^p = K_{i-1/2}^n, \quad B_i^p = K_{i+1/2}^n, \quad C_i^p = K_{i+1/2}^n + K_{i-1/2}^n,$$

$$D_i^p = f_{s_i}^n h (s_{i+1}^n - s_{i-1}^n) / 2 + f_{\phi_i}^n h (\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n) / 2.$$

Для численного решения систем обыкновенных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами (2.44) и (2.45) использовался метод встречной прогонки [34]. Решения для  $s$  и  $p$  будем искать в виде

$$s_{i-1}^{n+1} = \alpha_i^s s_i^{n+1} + \beta_i^s, \quad (2.46)$$

$$p_{i-1}^{n+1} = \alpha_i^p p_i^{n+1} + \beta_i^p, \quad (2.47)$$

Здесь  $i = 1, \dots, N-1$ ,  $\tau = 1, \dots, T$ , а прогоночные коэффициенты вычисляются по рекуррентным формулам

$$\alpha_{i+1}^{s,p} = \frac{B_i^{s,p}}{C_i^{s,p} - A_i^{s,p} \alpha_i^{s,p}}, \quad \beta_{i+1}^{s,p} = \frac{D_i^{s,p} + A_i^{s,p} \beta_i^{s,p}}{C_i^{s,p} - A_i^{s,p} \alpha_i^{s,p}}.$$

$\alpha_1^{s,p}$  и  $\beta_1^{s,p}$  определяются из граничных условий.

В численных расчетах шаг  $h$  брался равным  $0.005(N = 100)$ , а  $\tau = 0.001$ ,  $T = 100$ . Начальные и граничные условия задачи имеют вид:

$$s(x, 0) = 1, \quad \frac{\partial s}{\partial x}(0, t) = 0, \quad s(H, t) = 1,$$

$$p(x, 0) = \frac{\partial p_c}{\partial s}(s_1 - s_0) \left(1 - \frac{k_0 1}{k}\right) + \frac{h v_1^0}{K_0 k_0 1} + h \rho_1^0 g,$$

$$\phi(x, 0) = \begin{cases} 1, & x > 0, 01; \\ 0, 3. & \end{cases} \quad p(x, H) = 0.01 \rho_1^0 g,$$

Алгоритм численного решения начально-краевой задачи следующий: используя начальное значение пористости  $\phi_i^0$  и концентрации  $s_i^0$  находим начальное распределение приведенного давления  $p_i^0$  ( $i = 0, \dots, N$ ), решив систему линейных алгебраических уравнений методом встречной прогонки (2.47). Используя найденное давление определяем скорости фильтрации воды и подвижных частиц грунта  $v_{1i}^0$  и  $v_{2i}^0$ . Из равенства 2.44 находим пористость грунта  $\phi_i^1$  на следующем шаге по времени. Находим концентрацию воды  $s_i^1$ , решив систему линейных алгебраических уравнений методом встречной прогонки (2.46) и используя найденные давления и пористость. Рассчитываем давление на следующем шаге по времени ( $n = 1$ ). Используя найденные значения искомым функций  $\tilde{\phi}_i^1$ ,  $s_i^1$ ,  $p_i^0$ ,  $p_i^1$ , делаем коррекцию значения пористости на первом шаге по времени используя формулу (2.44). Повторяя данный алгоритм для следующих шагов по времени найдем значения искомым функций на всем временном интервале.

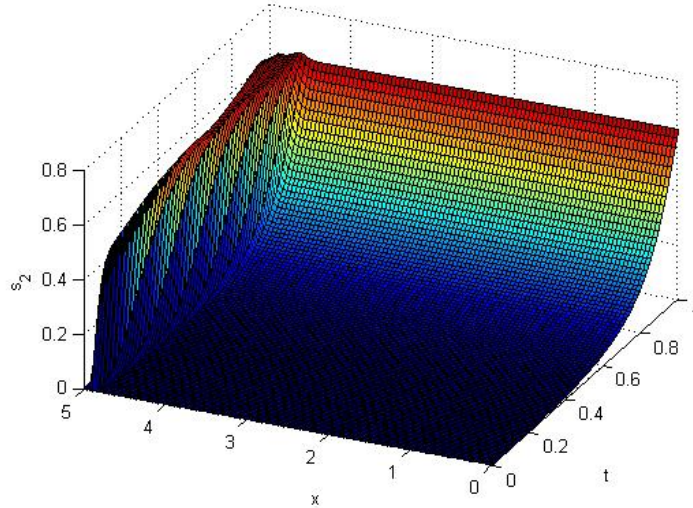


Рисунок 14. Изменение концентрации подвижных частиц грунта в фильтрационном потоке при  $\lambda = 100$

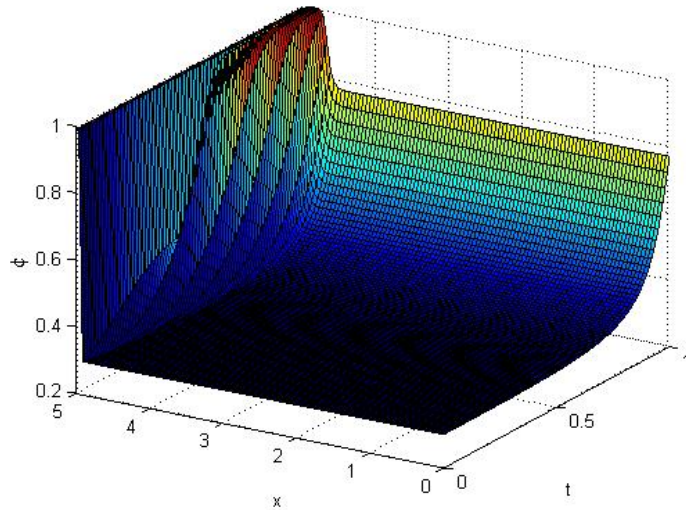


Рисунок 15. Изменение пористости грунта при  $\lambda = 100$

В численных расчетах использовался следующий набор модельных параметров взятых из [33, 36]:

$$\rho_1^0 = 1000 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_2^0 = 1440 \text{ кг/м}^3, \quad x_{sc} = 10\text{м}, \quad t_{sc} = 10\text{с}, \quad K_0 = \phi^3$$

$$B = 0.00001 \text{ м}^2/\text{с}, \quad g = 9.8 \text{ м/с}^2, \quad v_k = 60\sqrt[3]{K_0},$$

$$\mu_1 = 0.001787 \text{ кг/мс}^2, \quad \mu_2 = 0.003574 \text{ кг/мс}^2.$$

$$k_{01} = \begin{cases} 0, & s \leq 0; \\ s^2, & 0 < s < 1; \\ 1, & s \geq 1. \end{cases} \quad k_{02} = \begin{cases} 1, & s \leq 0; \\ (1-s)^2, & 0 < s < 1; \\ 0, & s \geq 1. \end{cases}$$

На рисунках 14 и 15 представлены графики изменения пористости грунта и концентрации. С течением времени выделяется область, где почва размывается полностью ( $\phi = 1$ ) см. рисунок 15.

Данная модель позволит определить оптимальную интенсивность полива, при которой влияние суффозионного процесса минимально.

## 2.4 Алгоритм численного решения двумерной задачи

В двумерном случае система уравнений (2.18) – (2.21) примет вид

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (a \frac{\partial s}{\partial x} + bv_x + F_x) + \frac{\partial}{\partial y} (a \frac{\partial s}{\partial y} + bv_y + F_y) - s \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (K \frac{\partial p}{\partial x} + f_x) + \frac{\partial}{\partial y} (K \frac{\partial p}{\partial y} + f_y) = 0, \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{I}{\rho_3^0}. \quad (2.50)$$

Начальные условия задачи имеют вид

$$a_{0t}^s s(x, y, 0) = s_{0t}, \quad a_{0t}^\phi \phi(x, y, 0) = \phi_{0t},$$

Граничные условия задачи имеют вид

$$a_{0x}^s s(0, y, t) + b_{0x}^s \frac{\partial s}{\partial x}(0, y, t) = s_{0x}, \quad a_{l_1}^s s(l_1, y, t) + b_{l_1}^s \frac{\partial s}{\partial x}(l_1, y, t) = s_{l_1},$$

$$a_{0y}^s s(x, 0, t) + b_{0y}^s \frac{\partial s}{\partial y}(x, 0, t) = s_{0y}, \quad a_{l_2}^s s(x, l_2, t) + b_{l_2}^s \frac{\partial s}{\partial y}(x, l_2, t) = s_{l_2},$$

$$a_{l_1}^p p(l_1, y, t) + b_{l_1}^p \frac{\partial p}{\partial x}(l_1, y, t) = p_{l_1}, \quad a_{l_2}^p p(x, l_2, t) + b_{l_2}^p \frac{\partial p}{\partial y}(x, l_2, t) = p_{l_2},$$

$$a_{0x}^p p(0, y, t) + b_{0x}^p \frac{\partial p}{\partial x}(0, y, t) = p_{0x}, \quad a_{0y}^p p(x, 0, t) + b_{0y}^p \frac{\partial p}{\partial y}(x, 0, t) = p_{0y},$$

$$x \in [0, l_1], \quad y \in [0, l_2], \quad t \in [0, t_k].$$

Введем безразмерные переменные

$$\tilde{t} = \frac{t}{t_{sc}}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{x_{sc}}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{x_{sc}}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{p_{sc}}, \quad \tilde{v}_x = \frac{v_x}{v_{sc}}, \quad \tilde{v}_y = \frac{v_y}{v_{sc}},$$

$$v_{sc} = \frac{x_{sc}}{t_{sc}}, \quad \mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad g_x = \tilde{g}_x \frac{x_{sc}}{t_{sc}^2}, \quad g_y = \tilde{g}_y \frac{x_{sc}}{t_{sc}^2}, \quad p_{sc} = \frac{\rho_1^0 x_{sc}^2}{t_{sc}^2}.$$

В безразмерных переменных система уравнений (2.49) – (2.50) примет вид:

$$\begin{aligned}\phi \frac{\partial s}{\partial \tilde{t}} &= \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( \tilde{a} \frac{\partial s}{\partial \tilde{x}} + b \tilde{v}_x + \tilde{F}_x \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left( \tilde{a} \frac{\partial s}{\partial \tilde{y}} + b \tilde{v}_y + \tilde{F}_y \right) - s \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{t}}, \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( \tilde{K} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{f}_x \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left( \tilde{K} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{f}_y \right) &= 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{t}} &= \tilde{I}.\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\tilde{a}(s, \varphi) &= -\tilde{K}_0 \frac{\bar{k}_{01} \bar{k}_{02}}{\mu \bar{k}_{01} + \bar{k}_{02}} \frac{\partial \tilde{p}_c}{\partial s}, \quad b(s) = \frac{\bar{k}_{02}}{\mu \bar{k}_{01} + \bar{k}_{02}}, \\ v_x &= \tilde{v}_x \frac{x_{sc}}{t_{sc}} = \tilde{v}_{x1} + \tilde{v}_{x2}, \quad v_y = \tilde{v}_y \frac{x_{sc}}{t_{sc}} = \tilde{v}_{y1} + \tilde{v}_{y2}, \\ \tilde{v}_{x1} &= -\tilde{K}_0 \bar{k}_{01} \left( \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial \tilde{x}} - \tilde{g}_x \right), \quad \tilde{v}_{x2} = -\tilde{K}_0 \frac{\bar{k}_{02}}{\mu} \left( \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial \tilde{x}} - \frac{\rho_2^0}{\rho_1^0} \tilde{g}_x \right), \\ \tilde{v}_{y1} &= -\tilde{K}_0 \bar{k}_{01} \left( \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial \tilde{x}} - \tilde{g}_y \right), \quad \tilde{v}_{y2} = -\tilde{K}_0 \frac{\bar{k}_{02}}{\mu} \left( \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial \tilde{x}} - \frac{\rho_2^0}{\rho_1^0} \tilde{g}_y \right), \\ \tilde{F}_x &= \tilde{K}_0 \tilde{g}_x \frac{\bar{k}_{01} \bar{k}_{02} \left( \frac{\rho_2^0}{\rho_1^0} - 1 \right)}{\mu \bar{k}_{01} + \bar{k}_{02}}, \quad \tilde{F}_y = \tilde{K}_0 \tilde{g}_y \frac{\bar{k}_{01} \bar{k}_{02} \left( \frac{\rho_2^0}{\rho_1^0} - 1 \right)}{\mu \bar{k}_{01} + \bar{k}_{02}}, \\ \tilde{K}_0 &= \frac{B p_{sc} t_{sc}}{x_{sc}^2 \mu_1} \hat{K}_0, \quad \hat{K}_0 = \phi^3, \\ \tilde{f}_x &= -\tilde{K}_0 \left( \bar{k}_{01} + \frac{\rho_2^0 \mu_1}{\rho_1^0 \mu_2} \bar{k}_{02} \right) \tilde{g}_x, \quad \tilde{f}_y = -\tilde{K}_0 \left( \bar{k}_{01} + \frac{\rho_2^0 \mu_1}{\rho_1^0 \mu_2} \bar{k}_{02} \right) \tilde{g}_y, \\ \tilde{k} &= \bar{k}_{01} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \bar{k}_{02}, \quad \tilde{K} = \tilde{K}_0 \tilde{k}, \\ \tilde{I} &= \begin{cases} \tilde{\lambda} (1 - \phi) (1 - s) \phi (|\tilde{v}_1| - |\tilde{v}_k|), & |\tilde{v}_1| \geq |\tilde{v}_k|; \\ 0, & |\tilde{v}_1| < |\tilde{v}_k|. \end{cases} \\ \tilde{\lambda} &= \lambda x_{sc}, \quad v_k = \tilde{v}_k \frac{x_{sc}}{t_{sc}}, \quad |\tilde{v}_1| = \sqrt{\tilde{v}_{x1}^2 + \tilde{v}_{y1}^2}.\end{aligned}$$

Опуская крышки и волны, получим

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial s}{\partial x} + b v_x + F_x \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( a \frac{\partial s}{\partial y} + b v_y + F_y \right) - s \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K(s, \phi) \frac{\partial p}{\partial x} + f(s, \phi) \right) = 0, \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = I(s, \phi, p). \quad (2.53)$$

Введем сетку с распределенными узлами  $x_i = ih_1$ ,  $y_j = jh_2$ ,  $t_n = n\tau$ ;  $i = 0, \dots, N_1$ ,  $j = 0, \dots, N_2$   $n = 0, \dots, T$ ,  $h_1$ ,  $h_2$  - шаг по пространственным координатам,  $\tau$  - шаг по времени, итерационный параметр  $\omega_\alpha = \sqrt{\delta_\alpha \Delta_\alpha}$ ,  $\delta_\alpha = \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2(\frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha})$ ,  $\Delta_\alpha = \frac{4}{h_\alpha^2} \cos^2(\frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha})$ ,  $\alpha = 1, 2$ ;  $l_1$  и  $l_2$  длина и ширина области соответственно,  $N_1, N_2$ -число разбиений  $l_1$  и  $l_2$ .

Уравнение (2.51) и (2.52) решаем методом переменных направлений. При аппроксимации уравнения (2.51) используется направленная разность для конвективного слагаемого. Разностная схема имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \phi_{i,j}^n \frac{s_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - s_{i,j}^n}{\tau} &= a_{i+\frac{1}{2},j}^n \frac{s_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - s_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_1^2} - a_{i-\frac{1}{2},j}^n \frac{s_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - s_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_1^2} + \\ &+ \frac{(|G_{xi,j}^n| + G_{xi,j}^n) s_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2(|G_{xi,j}^n|) s_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + (|G_{xi,j}^n| - G_{xi,j}^n) s_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2h_1} + \\ &+ F_{x\phi,i,j}^n \frac{\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i-1,j}^n}{2h_1} + a_{i,j+\frac{1}{2}}^n \frac{s_{i,j+1}^n - s_{i,j}^n}{h_2^2} - a_{i,j-\frac{1}{2}}^n \frac{s_{i,j}^n - s_{i,j-1}^n}{h_2^2} + \\ &+ \frac{(|G_{yi,j}^n| + G_{yi,j}^n) s_{i,j+1}^n - 2(|G_{yi,j}^n|) s_{i,j}^n + (|G_{yi,j}^n| - G_{yi,j}^n) s_{i,j-1}^n}{2h_2} + \\ &+ F_{y\phi,i,j}^n \frac{\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j-1}^n}{2h_2} - s_{i,j}^n \frac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n}{\tau}, \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \phi_{i,j}^n \frac{s_{i,j}^{n+1} - s_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} &= a_{i+\frac{1}{2},j}^n \frac{s_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - s_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_1^2} - a_{i-\frac{1}{2},j}^n \frac{s_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - s_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_1^2} + \\ &+ \frac{(|G_{xi,j}^n| + G_{xi,j}^n) s_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2(|G_{xi,j}^n|) s_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + (|G_{xi,j}^n| - G_{xi,j}^n) s_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2h_1} + \\ &+ F_{x\phi,i,j}^n \frac{\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i-1,j}^n}{2h_1} + a_{i,j+\frac{1}{2}}^n \frac{s_{i,j+1}^{n+1} - s_{i,j}^{n+1}}{h_2^2} - a_{i,j-\frac{1}{2}}^n \frac{s_{i,j}^{n+1} - s_{i,j-1}^{n+1}}{h_2^2} + \\ &+ \frac{(|G_{yi,j}^n| + G_{yi,j}^n) s_{i,j+1}^{n+1} - 2(|G_{yi,j}^n|) s_{i,j}^{n+1} + (|G_{yi,j}^n| - G_{yi,j}^n) s_{i,j-1}^{n+1}}{2h_2} + \\ &+ F_{y\phi,i,j}^n \frac{\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j-1}^n}{2h_2} - s_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n}{\tau} \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned}
& K_{i+\frac{1}{2},j}^n \frac{p_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_1^2} - K_{i-\frac{1}{2},j}^n \frac{p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - p_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_1^2} + K_{i,j+\frac{1}{2}}^n \frac{p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n}{h_2^2} - \\
& - K_{i,j-\frac{1}{2}}^n \frac{p_{i,j}^n - p_{i,j-1}^n}{h_2^2} + f_{x\phi i,j} \frac{\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i-1,j}^n}{2h_1} + f_{xsi,j} \frac{s_{i+1,j}^n - s_{i-1,j}^n}{2h_1} + \\
& + f_{y\phi i,j} \frac{\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j-1}^n}{2h_2} + f_{ysi,j} \frac{s_{i,j+1}^n - s_{i,j-1}^n}{2h_2} = (p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - p_{i,j}^n) \omega_1
\end{aligned} \tag{2.56}$$

$$\begin{aligned}
& K_{i+\frac{1}{2},j}^n \frac{p_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_1^2} - K_{i-\frac{1}{2},j}^n \frac{p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - p_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_1^2} + K_{i,j+\frac{1}{2}}^n \frac{p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}}{h_2^2} - \\
& - K_{i,j-\frac{1}{2}}^n \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j-1}^{n+1}}{h_2^2} + f_{x\phi i,j} \frac{\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i-1,j}^n}{2h_1} + f_{xsi,j} \frac{s_{i+1,j}^n - s_{i-1,j}^n}{2h_1} + \\
& f_{y\phi i,j} \frac{\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j-1}^n}{2h_2} + f_{ysi,j} \frac{s_{i,j+1}^n - s_{i,j-1}^n}{2h_2} = (p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}) \omega_2
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Уравнение (2.53) аппроксимируется (неявной) схемой Рунге-Кутты второго порядка точности. Причем, найденное на первом этапе значение  $\tilde{\phi}_{i,j}^{n+1}$

$$\tilde{\phi}_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^n + \tau I_{i,j}^n, \tag{2.58}$$

затем уточняется следующим образом

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^n + \tau \frac{I(\phi_{i,j}^n, s_{i,j}^n) + I(\tilde{\phi}_{i,j}^n, s_{i,j}^n)}{2}. \tag{2.59}$$

Здесь  $i = 1, \dots, N_1 - 1, j = 1, \dots, N_2 - 1, \tau = 1, \dots, T - 1,$

$$a_{i-\frac{1}{2},j}^n = \frac{2K_0(\phi_{i-1,j}^n) a(s_{i-1,j}^n) K_0(\phi_{i,j}^n) a(s_{i,j}^n)}{K_0(\phi_{i-1,j}^n) a(s_{i-1,j}^n) + K_0(\phi_{i,j}^n) a(s_{i,j}^n)},$$

$$a_{i+\frac{1}{2},j}^n = \frac{2K_0(\phi_{i+1,j}^n) a(s_{i+1,j}^n) K_0(\phi_{i,j}^n) a(s_{i,j}^n)}{K_0(\phi_{i+1,j}^n) a(s_{i+1,j}^n) + K_0(\phi_{i,j}^n) a(s_{i,j}^n)},$$

$$a_{i,j-\frac{1}{2}}^n = \frac{2K_0(\phi_{i,j-1}^n) a(s_{i,j-1}^n) K_0(\phi_{i,j}^n) a(s_{i,j}^n)}{K_0(\phi_{i,j-1}^n) a(s_{i,j-1}^n) + K_0(\phi_{i,j}^n) a(s_{i,j}^n)},$$

$$a_{i,j+\frac{1}{2}}^n = \frac{2K_0(\phi_{i,j+1}^n) a(s_{i,j+1}^n) K_0(\phi_{i,j}^n) a(s_{i,j}^n)}{K_0(\phi_{i,j+1}^n) a(s_{i,j+1}^n) + K_0(\phi_{i,j}^n) a(s_{i,j}^n)},$$

$$F_{x\phi i,j}^n = \frac{\partial F_x}{\partial \phi}(s_{i,j}^n, \phi_{i,j}^n), \quad f_{xsi,j}^n = \frac{\partial f_x}{\partial s}(s_{i,j}^n, \phi_{i,j}^n), \quad f_{x\phi i,j}^n = \frac{\partial f_x}{\partial \phi}(s_{i,j}^n, \phi_{i,j}^n),$$

$$F_{y\phi i,j}^n = \frac{\partial F_y}{\partial \phi}(s_{i,j}^n, \phi_{i,j}^n), \quad f_{ysi,j}^n = \frac{\partial f_y}{\partial s}(s_{i,j}^n, \phi_{i,j}^n), \quad f_{y\phi i,j}^n = \frac{\partial f_y}{\partial \phi}(s_{i,j}^n, \phi_{i,j}^n),$$

$$G_{xi,j}^m = \frac{\partial F_x}{\partial s}(s_{i,j}^n, \phi_{i,j}^n) + v_x(t_n) \frac{\partial b}{\partial s}(s_{i,j}^n),$$

$$G_{yi,j}^m = \frac{\partial F_y}{\partial s}(s_{i,j}^n, \phi_{i,j}^n) + v_y(t_n) \frac{\partial b}{\partial s}(s_{i,j}^n),$$

$$K_{i-\frac{1}{2},j}^n = \frac{2K(\phi_{i-1,j}^n, s_{i-1,j}^n)K(\phi_{i,j}^n, s_{i,j}^n)}{K(\phi_{i-1,j}^n, s_{i-1,j}^n) + K(\phi_{i,j}^n, s_{i,j}^n)},$$

$$K_{i+\frac{1}{2},j}^n = \frac{2K(\phi_{i+1,j}^n, s_{i+1,j}^n)K(\phi_{i,j}^n, s_{i,j}^n)}{K(\phi_{i+1,j}^n, s_{i+1,j}^n) + K(\phi_{i,j}^n, s_{i,j}^n)},$$

$$K_{i,j-\frac{1}{2}}^n = \frac{2K(\phi_{i,j-1}^n, s_{i,j-1}^n)K(\phi_{i,j}^n, s_{i,j}^n)}{K(\phi_{i,j-1}^n, s_{i,j-1}^n) + K(\phi_{i,j}^n, s_{i,j}^n)},$$

$$K_{i,j+\frac{1}{2}}^n = \frac{2K(\phi_{i,j+1}^n, s_{i,j+1}^n)K(\phi_{i,j}^n, s_{i,j}^n)}{K(\phi_{i,j+1}^n, s_{i,j+1}^n) + K(\phi_{i,j}^n, s_{i,j}^n)},$$

$$I_{i,j}^n = \begin{cases} \lambda(1 - \phi_{i,j}^n)(1 - s_{i,j}^n)\phi_{i,j}^n(|v_{1i,j}^n| - |v_k|), & |v_{1i,j}^n| \geq |v_k|; \\ 0, & |v_{1i,j}^n| < |v_k|. \end{cases}$$

$$v_{1i,j}^n = \sqrt{(v_{x1i,j}^n)^2 + (v_{y1i,j}^n)^2}$$

Уравнения (2.54) и (2.55) перепишем в виде

$$-A_0^s s_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + C_0^s s_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - B_0^s s_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = D_0^s,$$

$$-A_i^s s_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + C_i^s s_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - B_i^s s_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = D_i^s, \quad (2.60)$$

$$-A_{N_1}^s s_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + C_{N_1}^s s_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - B_{N_1}^s s_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = D_{N_1}^s,$$

$$-A_0^s s_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}} + C_0^s s_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - B_0^s s_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} = D_0^s,$$

$$-A_j^s s_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}} + C_j^s s_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - B_j^s s_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} = D_j^s, \quad (2.61)$$

$$-A_{N_2}^s s_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}} + C_{N_2}^s s_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - B_{N_2}^s s_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} = D_{N_2}^s,$$

Уравнение (2.56) и (2.57) перепишем в виде:

$$-A_0^p p_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + C_0^p p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - B_0^p p_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = D_0^p,$$

$$-A_i^p p_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + C_i^p p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - B_i^p p_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = D_i^p, \quad (2.62)$$



$$\begin{aligned}
& -A_{N_1}^p p_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + C_{N_1}^p p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - B_{N_1}^p p_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = D_{N_1}^p, \\
& -A_0^p p_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}} + C_0^p p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - B_0^p p_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} = D_0^p, \\
& -A_j^p p_{i,j-1}^{n+1} + C_j^p p_{i,j}^{n+1} - B_j^p p_{i,j+1}^{n+1} = D_j^p, \\
& -A_{N_2}^p p_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}} + C_{N_2}^p p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - B_{N_2}^p p_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} = D_{N_2}^p,
\end{aligned} \tag{2.63}$$

где  $A_i^{s,p}, B_i^{s,p}, C_i^{s,p}, D_i^{s,p}, A_j^{s,p}, B_j^{s,p}, C_j^{s,p}, D_j^{s,p}$  определяются однозначно в зависимости от искомым функций при  $i = 0$ :

$$A_0^s = 0, \quad B_0^s = -b_{0x}^s, \quad C_0^s = h_1 a_{0x}^s - b_{0x}^s, \quad D_0^s = h_1 s_{0x},$$

$$A_{N_1}^s = b_{l_1}^s, \quad B_{N_1}^s = 0, \quad C_{N_1}^s = h_1 a_{l_1}^s + b_{l_1}^s, \quad D_0^s = h_1 s_{lx},$$

$$A_0^p = 0, \quad B_0^p = -b_{0x}^p, \quad C_0^p = h_1 a_{0x}^p - b_{0x}^p, \quad D_0^p = h_1 p_{0x},$$

$$A_{N_1}^p = b_{l_1}^p, \quad B_{N_1}^p = 0, \quad C_{N_1}^p = h_1 a_{l_1}^p + b_{l_1}^p, \quad D_0^s = h_1 p_{lx},$$

при  $j = 0$ :

$$A_0^s = 0, \quad B_0^s = -b_{0y}^s, \quad C_0^s = h_2 a_{0y}^s - b_{0y}^s, \quad D_0^s = h_2 s_{0y},$$

$$A_{N_2}^s = b_{l_2}^s, \quad B_{N_2}^s = 0, \quad C_{N_2}^s = h_2 a_{l_2}^s + b_{l_2}^s, \quad D_0^s = h_2 s_{ly},$$

$$A_0^p = 0, \quad B_0^p = -b_{0y}^p, \quad C_0^p = h_2 a_{0y}^p - b_{0y}^p, \quad D_0^p = h_2 p_{0y},$$

$$A_{N_2}^p = b_{l_2}^p, \quad B_{N_2}^p = 0, \quad C_{N_2}^p = h_2 a_{l_2}^p + b_{l_2}^p, \quad D_0^s = h_2 p_{ly}.$$

Здесь

$$A_i^s = a_{i-\frac{1}{2},j}^n \tau + (|G_{xi,j}^n| - G_{xi,j}^n) \frac{\tau h_1}{2},$$

$$B_i^s = a_{i+\frac{1}{2},j}^n \tau + (|G_{xi,j}^n| + G_{xi,j}^n) \frac{\tau h_1}{2},$$

$$C_i^s = a_{i+\frac{1}{2},j}^n \tau + a_{i-\frac{1}{2},j}^n \tau + \phi_{i,j}^n h_1^2 + (|G_{xi,j}^n|) \tau h_1,$$

$$\begin{aligned}
D_i^s = & F_{x\phi i,j}^n \tau h_1 \frac{\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i-1,j}^n}{2} + a_{i,j+\frac{1}{2}}^n \tau h_1^2 \frac{s_{i,j+1}^n - s_{i,j}^n}{h_2^2} - a_{i,j-\frac{1}{2}}^n \tau h_1^2 \frac{s_{i,j}^n - s_{i,j-1}^n}{h_2^2} + \\
& + \tau h_1^2 \frac{(|G_{yi,j}^n| + G_{yi,j}^n) s_{i,j+1}^n - 2(|G_{yi,j}^n|) s_{i,j}^n + (|G_{yi,j}^n| - G_{yi,j}^n) s_{i,j-1}^n}{2h_2} +
\end{aligned}$$

$$+F_{y\phi i,j}^n \tau h_1^2 \frac{\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j-1}^n}{2h_2} - s_{i,j}^n h_1^2 (\phi_{i,j}^{n+1} - 2\phi_{i,j}^n),$$

$$A_j^s = a_{i,j-\frac{1}{2}}^n \tau + (|G_{yi,j}^n| - G_{yi,j}^n) \frac{\tau h_2}{2},$$

$$B_j^s = a_{i,j+\frac{1}{2}}^n \tau + (|G_{yi,j}^n| + G_{yi,j}^n) \frac{\tau h_2}{2},$$

$$C_j^s = a_{i,j+\frac{1}{2}}^n \tau + a_{i,j-\frac{1}{2}}^n \tau + \phi_{i,j}^n h_2^2 + (|G_{yi,j}^n|) \tau h_2,$$

$$D_j^s = a_{i+\frac{1}{2},j}^n \tau h_2^2 \frac{s_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - s_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_1^2} - a_{i-\frac{1}{2},j}^n \tau h_2^2 \frac{s_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - s_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_1^2} +$$

$$+ \tau h_2^2 \frac{(|G_{xi,j}^n| + G_{xi,j}^n) s_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2(|G_{xi,j}^n|) s_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + (|G_{xi,j}^n| - G_{xi,j}^n) s_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2h_1} +$$

$$\tau h_2^2 F_{x\phi i,j}^n \frac{\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i-1,j}^n}{2h_1} + \tau h_2 F_{y\phi i,j}^n \frac{\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j-1}^n}{2} - s_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} (\phi_{i,j}^{n+1} - 2\phi_{i,j}^n),$$

$$A_i^p = K_{i-\frac{1}{2},j}^n,$$

$$B_i^p = K_{i+\frac{1}{2},j}^n + K_{i-\frac{1}{2},j}^n + \omega_1 h_1^2,$$

$$C_i^p = K_{i+\frac{1}{2},j}^n,$$

$$D_i^p = h_1^2 K_{i,j+\frac{1}{2}}^n \frac{p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n}{h_2^2} - h_1^2 K_{i,j-\frac{1}{2}}^n \frac{p_{i,j}^n - p_{i,j-1}^n}{h_2^2} + h_1 f_{x\phi i,j} \frac{\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i-1,j}^n}{2} +$$

$$h_1 f_{xsi,j} \frac{s_{i+1,j}^n - s_{i-1,j}^n}{2} + h_1^2 f_{y\phi i,j} \frac{\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j-1}^n}{2h_2} +$$

$$h_1^2 f_{ysi,j} \frac{s_{i,j+1}^n - s_{i,j-1}^n}{2h_2} - h_1^2 p_{i,j}^n \omega_1,$$

$$A_j^p = K_{i,j-\frac{1}{2}}^n,$$

$$B_j^p = K_{i,j+\frac{1}{2}}^n + K_{i,j-\frac{1}{2}}^n + \omega_2 h_2^2,$$

$$C_j^p = K_{i,j+\frac{1}{2}}^n,$$

$$D_j^p = h_2^2 K_{i+\frac{1}{2},j}^n \frac{p_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_1^2} - h_2^2 K_{i-\frac{1}{2},j}^n \frac{p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - p_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_1^2} + h_2^2 f_{x\phi i,j} \frac{\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i-1,j}^n}{2h_1} +$$

$$\begin{aligned}
& + h_2^2 f_{xsi,j} \frac{s_{i+1,j}^n - s_{i-1,j}^n}{2h_1} + h_2 f_{y\phi i,j} \frac{\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j-1}^n}{2} + \\
& h_2 f_{ysi,j} \frac{s_{i,j+1}^n - s_{i,j-1}^n}{2} - p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \omega_2 h_2^2.
\end{aligned}$$

Для численного решения системы разностных уравнений (2.60) и (2.61) использовался метод встречной прогонки [34]. Решения для  $s$  будем искать в виде

$$s_{i-1,j-1}^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_i^s s_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_i^s, \quad (2.64)$$

$$s_{i-1,j-1}^{n+1} = \alpha_j^s s_{i,j}^{n+1} + \beta_j^s. \quad (2.65)$$

Для численного решения системы разностных уравнений (2.62) и (2.63) использовался метод встречной прогонки [34]. Решения для  $p$  будем искать в виде

$$p_{i-1,j-1}^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_i^p p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_i^p, \quad (2.66)$$

$$p_{i-1,j-1}^{n+1} = \alpha_j^p p_{i,j}^{n+1} + \beta_j^p. \quad (2.67)$$

Здесь  $i = 1, \dots, N_1 - 1$ ,  $j = 1, \dots, N_2 - 1$ ,  $\tau = 1, \dots, T$ , а прогоночные коэффициенты вычисляются по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned}
\alpha_{i+1}^{s,p} &= \frac{B_i^{s,p}}{C_i^{s,p} - A_i^{s,p} \alpha_i^{s,p}}, & \beta_{i+1}^{s,p} &= \frac{D_i^{s,p} + A_i^{s,p} \beta_i^{s,p}}{C_i^{s,p} - A_i^{s,p} \alpha_i^{s,p}}. \\
\alpha_{j+1}^{s,p} &= \frac{B_j^{s,p}}{C_j^{s,p} - A_j^{s,p} \alpha_j^{s,p}}, & \beta_{j+1}^{s,p} &= \frac{D_j^{s,p} + A_j^{s,p} \beta_j^{s,p}}{C_j^{s,p} - A_j^{s,p} \alpha_j^{s,p}}.
\end{aligned}$$

$\alpha_1^{s,p}$  и  $\beta_1^{s,p}$  определяются из граничных условий.

Алгоритм численного решения начально-краевой задачи следующий: используя начальное значение пористости  $\phi_{i,j}^0$  и концентрации  $s_{i,j}^0$  находим начальное распределение приведенного давления  $p_{i,j}^0$  ( $i = 0, \dots, N_1$ ;  $j = 0, \dots, N_2$ ) решив систему разностных уравнений (2.66) и (2.67) методом переменных направлений. Используя найденное давление определяем скорости фильтрации воды и подвижных частиц грунта  $v_{1i,j}^0$  и  $v_{2i,j}^0$ . Из равенства (2.58) находим пористость грунта  $\tilde{\phi}_{i,j}^1$  на следующем шаге по времени. Находим концентрацию воды  $s_{i,j}^1$  решив систему разностных уравнений (2.64) и (2.65) методом переменных направлений используя найденные давления и пористость. Рассчитываем давление на следующем шаге по времени ( $n = 1$ ). Используя найденные значения искомым функций  $\tilde{\phi}_{i,j}^1$ ,  $s_{i,j}^1$ ,  $p_{i,j}^0$ ,  $p_{i,j}^1$  корректируем значения пористости на первом шаге по времени используя формулу

(2.59). Повторяя данный алгоритм для следующих шагов по времени найдем значения искомым функций на всем временном интервале.

В численных расчетах использовался следующий набор модельных параметров взятых из [33, 36]:

$$\begin{aligned} \rho_1^0 &= 1000 \text{ кг/м}^3, & \rho_2^0 &= 1440 \text{ кг/м}^3, \\ B &= 0.00001 \text{ м}^2/\text{с}, & g_x &= 0, & g_y &= 9.8 \text{ м/с}^2, & v_k &= 0, \\ \mu_1 &= 0.001787 \text{ кг/мс}^2, & \mu_2 &= 0.003574 \text{ кг/мс}^2. \\ k_{01} &= \begin{cases} 0, & s \leq 0; \\ s^2, & 0 < s < 1; \\ 1, & s \geq 1. \end{cases} & k_{02} &= \begin{cases} 1, & s \leq 0; \\ (1-s)^2, & 0 < s < 1; \\ 0, & s \geq 1. \end{cases} \\ x_{sc} &= 100\text{м}, & t_{sc} &= 100\text{с}. \end{aligned}$$

В численных расчетах шаг  $h_1$  брался равным 0.001 ( $N_1 = 50$ ), шаг  $h_2$  брался равным 0.001 ( $N_2 = 50$ ), а  $\tau = 0.001$ ,  $T = 100$ .

Начальные условия:

$$\phi_{i,j}^0 = 0.3, \quad s_{i,j}^0 = 0.9,$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} p_{0,j}^n &= y_j/l_2 + 1, & p_{N_1,j}^n &= y_j/l_2 + 1, \\ p_{i,0}^n &= 1, & p_{i,N_2}^n &= 2, \\ s_{0,j}^n &= y_j(-0.1)/l_2 + 0.9, & s_{N_2,j}^n &= y_j(-0.1)/l_2 + 0.9, \\ s_{i,0}^n &= 0.9, & s_{i,N_2}^n &= 0.4. \end{aligned}$$

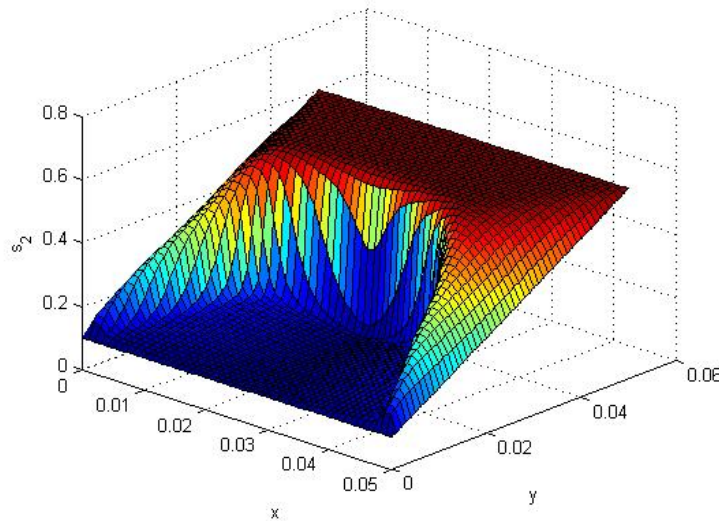


Рисунок 16. Изменение концентрации подвижных частиц грунта в фильтрационном потоке при  $\lambda = 20$

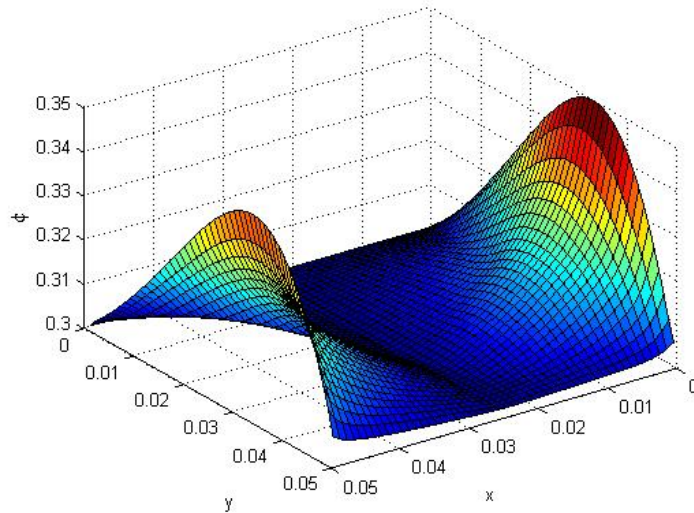


Рисунок 17. Изменение пористости грунта при  $\lambda = 20$

На рисунках 16 и 17 представлены графики изменения концентрации подвижных частиц и пористости грунта. Заметим, что пористость грунта и концентрация подвижных частиц удовлетворяют физическому принципу максимума.

## Заключение

В первой главе рассмотрен автомодельный частный случай математической модели внутренней эрозии грунта, когда отсутствует капиллярное давление. Доказаны физические принципы максимума для пористости и концентрации и теорема существования автомодельного решения. Проведено численное решение автомодельной задачи о внутренней эрозии грунта с учетом капиллярных сил.

В второй главе предложен алгоритм численного решения одномерной начально-краевой задачи фильтрации грунтовых вод с учетом внутренней эрозии грунта и проведены тестовые численные расчеты. Найдены скорости движения и давление грунтовых вод, пористость и концентрация подвижных частиц грунта для грунтов имеющих различную суффозионную устойчивость. Предложен алгоритм численного расчета физических характеристик почвогрунтов в процессе внутренней эрозии. Найдены пористость и концентрация подвижных частиц грунта. Предложен алгоритм численного решения двумерной начально-краевой задачи фильтрации грунтовых вод с учетом внутренней эрозии грунта.

Автор признателен А.А. Папину и А.Н. Сибину за обсуждение материалов рукописи и полезные замечания.

## Список литературы

1. Шепелёв В.В. Надмерзлотные воды криолитозоны. – Новосибирск, 2011.
2. Шехтман Ю. М. Фильтрация малоцентрированных суспензий. – Москва, 1961.
3. Vieira D.A.N., Dabney S.M. Modeling edge effects of tillage erosion // Soil Tillage Research. – 2011. 111(2):197–207.
4. Wilson G. Understanding soil-pipe flow and its role in ephemeral gully erosion // Hydrol. Process. 2011, Vol. 25, 2354–2364.
5. Einstein H. A. Der Geschiebetrieb als wahrscheinlichs Problem. Mitt. d. Versuchsanstaltf Wasserbau, Eidg. T. H., Zurich. 1937.
6. Wang J., Walters D. A., Settari A., Wan R. G. Simulation of cold heavy oil production using an integrated modular approach with emphasis on foamy oil flow and sand production effects 1st Heavy Oil Conference 2006.
7. Фельдман Г.М. Термокарст и вечная мерзлота. – Новосибирск, 1984.
8. Фельдман Г.М. Передвижение влаги в талых и промерзающих грунтах. – Новосибирск, 1988.
9. Хусаинова З.Л. Теоретическое исследование процессов термоэрозии и термокарста многолетнемерзлых пород: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Уфа, 2007.
10. Протодьяконовой Н.А. «Математическое моделирование деформаций грунта при оттаивании с учетом фильтрационной консолидации» дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Якутск, 2008.
11. Поляков В.Л. О механической суффозии грунтов под действием цилиндрического стока переменной интенсивности // Прикладная гидромеханика. – Киев, 2006. – Т. 8, № 4.
12. Кузнецов А.Ю., Пославский С.А. Исследование математической модели механической суффозии // Вестник Харьковского национального университета. Сер.: Математика, прикладная математика и механика. – 2009. – №875.
13. Golay F., Bonelli S. Numerical modeling of suffusion as an interfacial erosion process // European Journal of Environmental and Civil Engineering. – 2010.
14. Bonelli S., Marot D. On the modelling of internal soil erosion // The 12th International Conference of International Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics (IACMAG). – 2008.
15. Рекомендации по методике лабораторных испытаний грунтов на водопроницаемость и суффозионную устойчивость. – Л. 1983.

16. Vardoulakis I. Sand-production and sand internal erosion: Continuum modeling // Alert School: Geomechanical and Structural Issues in Energy Production. – 2006.
17. Суриков В.В. Механика разрушения мерзлых грунтов. – Л., 1979.
18. Борисов А.А. Механика горных пород и массивов. – М., 1980.
19. Цытович Н.А. Механика мерзлых грунтов. – М., 1973.
20. Папин А.А., Вайгант В.А., Сибин А.Н. Математическая модель изотермической внутренней эрозии // Известия АлтГУ. -Барнаул, 2015.-Вып. 1/1 (85), с. 89-93.
21. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. -Новосибирск, 1983.
22. Gard S.K., Pritchett J.W. Dynamics of gas - fluidized beds. Journal of Applied Phisics // Journal of Applied Phisics, Vol. 46, № 10, 1975.
23. Папин А.А. Краевые задачи двухфазной фильтрации. -Барнаул, 2009.
24. Wang J., Walters D. A., Settari A., Wan R. G. Simulation of cold heavy oil production using an integrated modular approach with emphasis on foamy oil flow and sand production effects // 1st Heavy Oil Conference 2006.
25. Vardoulakis I., Stavropoulou M., Papanastasiou R. Hydro-Mechanical Aspects of the Sand Production Problem // Transport in Porous Media 22, 1996.
26. Vardoulakis I., Stavropoulou M., Papanastasiou R. Sand Erosion in Axial Flow Conditions // Transport in Porous Media 45, 2001.
27. Папин А.А., Гагарин Л.А., Шепелев В.В., Сибин А.Н., Хворых Д.П. Математическая модель фильтрации грунтовых вод, контактирующих с многолетнемерзлыми породами // Известия АлтГУ, -Барнаул, 2013. Вып. 1/2 (77).
28. Кузиков С.С., Папин А.А., Сибин А.Н. Численное моделирование процесса суффозионного выноса грунта // Сборник трудов 17 региональной конференции по математике «МАК-2014». – Барнаул Алт. ун-та, 2014.
29. Сибин А.Н. Математическая модель деформации мерзлого грунта вблизи термокарстовых озер. // Сборник трудов всероссийской молодежной школы-семинара «Анализ, геометрия и топология». – Барнаул, АлтГУ, – 2013.
30. Папин А.А., Сибин А.Н., Хворых Д.П. Об одной задаче фильтрации в условиях вечной мерзлоты // Сборник трудов 16 региональной конференции по математике «МАК-2013». – Барнаул Алт. ун-та, 2013.



31. Кузиков С.С., Папин А.А., Сибин А.Н. Численное исследование профильной задачи внутренней эрозии в межмерзлотном водоносном слое // Известия АлтГУ, -Барнаул, 2014, Вып. 1/2 (85).
32. Bonelli S. Erosion of Geomaterials. UK, 2012.
33. Chetti A., Benamar A., Hazzab A. Modeling of Particle Migration in Porous Media: Application to Soil Suffusion // Transport in Porous Media. 2016.v.113(3). p. 591–606.
34. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. -Москва, 1971.
35. Сибин А.Н., Сибин Н.Н. Численное решение одномерной задачи фильтрации с учетом суффозионных процессов // Известия АлтГУ. 2017. 1 (93) -С.123-127.
36. Снарев А.И. Расчеты машин и оборудования для добычи нефти и газа. М.: Инфра-Инженерия, 2010. - 232с.
37. Папин А.А., Сибин А.Н. О разрешимости первой краевой задачи для одномерных уравнений внутренней эрозии // Известия АлтГУ. – Барнаул, 2015. – Вып. 1/2 (85). – С. 136-140.