

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет математики и информационных технологий

Кафедра дифференциальных уравнений

**ПОСТРОЕНИЕ И РЕАЛИЗАЦИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ  
НА КРИВОЛИНЕЙНЫХ СЕТКАХ**

(магистерская диссертация)

Выполнил:  
студент 456М-КН группы,  
Страшко Ирина Владимировна

\_\_\_\_\_  
(подпись)

Научный руководитель:  
к.ф-м.н., доцент  
Кузиков Сергей Семенович

\_\_\_\_\_  
(подпись)

Допустить к защите:  
Зав. кафедрой, д.ф-м.н., профессор  
Папин Александр Алексеевич

\_\_\_\_\_  
(подпись)

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2017 г.

Работа защищена:

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2017 г.

Оценка: \_\_\_\_\_

Председатель ГЭК:

\_\_\_\_\_  
(подпись)

\_\_\_\_\_  
Ф.И.О.

Барнаул 2017

## Реферат

Тема магистерской диссертации: «Построение и реализация разностных схем на криволинейных сетках».

Цель работы – построение и реализация разностных схем на криволинейных сетках и исследование характера течения в водоемах.

Объект исследования – криволинейная область водоема с текучей неоднородной жидкостью.

Предмет исследования – разностные схемы на криволинейных сетках.

В результате магистерского исследования решены следующие задачи: построены аппроксимации дифференциальных операторов конечноразностными первого и второго порядка, эти аппроксимации использованы при построении дискретной модели течения стратифицированной жидкости в криволинейных каналах.

Исследования, проводимые в рамках работы над диссертацией, были представлены на IV Региональной конференции студентов и молодых ученых “Мой выбор – НАУКА!”.

Объем работы 37 страниц, количество рисунков – 15, приложений – 1 на CD диске, 10 использованных источников литературы.

Ключевые слова: криволинейные сетки, аппроксимация дифференциальных операторов, неоднородная жидкость, плотность, система уравнений в частных производных, разностная схема, программирование, моделирование.

## Содержание

ВВЕДЕНИЕ.....	4
Глава 1. АППРОКСИМАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА КРИВОЛИНЕЙНЫХ СЕТКАХ. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ОБЪЕМОВ.....	7
1.1. Уравнения, содержащие только первые производные.....	7
1.2. Уравнения, содержащие вторые производные.....	9
1.3. Дискретный аналог модели, описывающей течение стратифицированной жидкости.....	13
Глава 2. АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ И ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ.....	15
2.1. Уравнения, содержащие только первые производные.....	16
2.1.1. Уравнение сохранения массы.....	16
2.1.2. Уравнение для вихря.....	21
2.2. Уравнения, содержащие вторые производные.....	26
2.3. Результаты численных расчетов.....	31
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	35
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	36

## Введение

**Актуальность исследования.** Исследование течений неоднородной жидкости представляет интерес как в теории, так и при решении многих практических задач гидроэнергетики, гидрологии, метеорологии, экологии и т.д. Моделирование гидрофизических процессов связано с проблемами охраны окружающей среды.

Наличие вертикального градиента плотности может существенно повлиять на характер течения жидкости. Одним из проявлений указанного фактора является возможность выборочного изъятия определённых слоев водной массы из устойчивого стратифицированного водоема.

Под стратифицированной жидкостью принято понимать жидкость, физические характеристики которой (плотность, теплоемкость, динамическая вязкость и др.) в стационарном состоянии меняются непрерывно или скачком лишь в одном выделенном направлении. Наиболее существенное влияние, по сравнению с другими видами стратификации, оказывает стратификация плотности.

**Целью магистерской диссертации** является построение и реализация разностных схем на криволинейных сетках и исследование характера течения водоема при различных числах Фруда. Данная цель обусловила решение следующих основных **задач** исследования:

- изучить методы, с помощью которых аппроксимируются уравнения модели, описывающей течение стратифицированной жидкости;
- построить аппроксимацию дифференциальных операторов конечноразностными схемами первого и второго порядка;
- создать программу для построения сеточной модели водоема и численного расчета характера течения стратифицированной жидкости в криволинейной области.

**Практическая значимость.** Численное моделирование процессов в настоящее время приобретает все более существенное значение в связи с тем,

что для современной науки и техники необходимы данные о таких процессах. Рассматриваемая диссертацией задача описывает типы течений, невозможные для однородной жидкости, и имеет большое практическое значение при исследовании гидротермических характеристик глубоководных водохранилищ ГЭС, водохранилищ-охладителей тепловых электростанций.

**Объект исследования** – криволинейная область водоема с текучей неоднородной жидкостью.

**Предмет исследования** – разностные схемы на криволинейных сетках.

В численных исследованиях уравнения используются как в физических переменных, так и в переменных функция тока – вихрь. Именно для этой второй формы разработан численный метод, проведены исследования постановки и аппроксимации граничных условий.

Система дифференциальных уравнений аппроксимируется системой алгебраических уравнений на криволинейной сетке с использованием метода конечных объемов и направленных разностей. Для решения полученной системы применяется метод переменных направлений.

Разработанная программа является гибким инструментом проведения научных исследований, поскольку она позволяет менять граничные условия. Программа реализована на языке Pascal в среде разработки Lazarus.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

Главе 1 посвящена рассмотрению метода конечных объемов для уравнений первого и второго порядков; модели, описывающей течение стратифицированной жидкости, и аппроксимации дифференциальных уравнений на криволинейных сетках.

В главе 2 строится алгоритм для программной реализации сеточной модели водоема, рассматриваются разностные схемы для уравнений первого и второго порядков, которые описывают течение стратифицированной жидкости.

В заключении подведены итоги проделанной работы: отмечено достижение цели магистерского исследования; решение поставленных задач, приведена апробация результатов исследования.

## Глава 1. Аппроксимация дифференциальных уравнений на криволинейных сетках. Метод конечных объемов

Метод конечных объемов подобен методу подобластей. Этот метод оказывается особенно компактным, если определяющие уравнения включают только первые производные. Если же присутствуют и вторые производные, то требуются некоторые дополнительные операции [9].

### 1.1. Уравнения, содержащие только первые производные

Рассмотрим применение метода конечных объемов к решению уравнения первого порядка в общем виде

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0. \quad (1.1)$$

Уравнение (1.1) при соответствующем выборе  $q$ ,  $F$ ,  $G$  может представлять различные уравнения движения. Например, если положить  $q = \rho$ ,  $F = \rho u$ ,  $G = \rho v$ , то уравнение (1.1) совпадет с двумерным вариантом уравнения неразрывности.

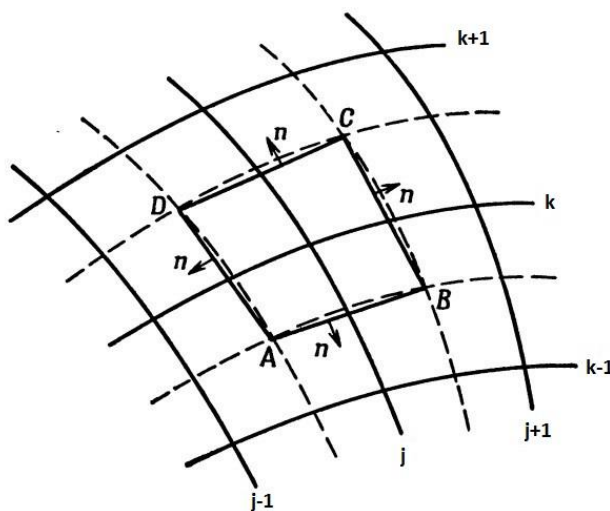


Рисунок 1.1. – Двумерный конечный объем

Применение метода подобластей к уравнению (1.1) внутри конечного объема ABCD приведено на рисунке 1.1. Проинтегрируем (1.1) по области ABCD:

$$\int_{ABCD} \left( \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial x} \right) dx dy = 0, \quad (1.2)$$

или, если применить теорему Грина,

$$\frac{d}{dt} \int q dV + \int_{ABCD} H \cdot n ds = 0, \quad (1.3)$$

где  $H = (F, G)$ . В декартовых координатах имеем

$$H \cdot n ds = F dy - G dx.$$

Уравнение (1.3) является ничем иным, как констатацией консервативности. В частном случае, если выбрать  $q = \rho, F = \rho u, G = \rho v$ , уравнение (1.3) совпадает с интегральной формулировкой закона сохранения массы. Следовательно, метод конечных объемов сводится к дискретизации исходного уравнения, представленного в интегральной форме, в противоположность к методу конечных разностей, который, обычно, применяется к исходному уравнению в его дифференциальной форме.

Одним из приближенных представлений уравнения (1.3) может быть уравнение вида:

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{A} q_{j,k}) + \sum_{AB}^{DA} (F \Delta y - G \Delta x) = 0, \quad (1.4)$$

где  $\mathcal{A}$  – площадь четырехугольника ABCD, приведенного на рисунке 1.1, причем,  $q_{j,k}$  есть величина, связанная со средним значением  $q$  внутри четырехугольника. В уравнении (1.4)

$$\begin{aligned} \Delta y_{BA} &= y_B - y_A, & \Delta x_{BA} &= x_B - x_A, \\ F_{AB} &= 0.5(F_{j,k-1} + F_{j,k}), & G_{AB} &= 0.5(G_{j,k-1} + G_{j,k}). \end{aligned}$$

Аналогичные выражения можно записать для остальных границ области ABCD. Если  $\mathcal{A}$  не является функцией времени, то уравнение (1.4) принимает вид:



$$\begin{aligned}
& \mathcal{A} dq_{j,k}/dt + 0.5(F_{j,k-1} + F_{j,k})\Delta y_{AB} - 0.5(G_{j,k-1} + G_{j,k})\Delta x_{AB} + \\
& + 0.5(F_{j,k} + F_{j+1,k})\Delta y_{BC} - 0.5(G_{j,k} + G_{j+1,k})\Delta x_{BC} + \\
& + 0.5(F_{j,k} + F_{j,k+1})\Delta y_{CD} - 0.5(G_{j,k} + G_{j,k+1})\Delta x_{CD} + \\
& + 0.5(F_{j-1,k} + F_{j,k})\Delta y_{DA} - 0.5(G_{j-1,k} + G_{j,k})\Delta x_{AB} = 0.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Если глобальная сетка  $(j, k)$  является нерегулярной, то записанное для конечных объемов уравнение (1.5) обеспечивает дискретизацию в декартовых координатах, без необходимости введения обобщенных координат [9]. Если же глобальная сетка является однородной, и ее линии совпадают с линиями постоянных  $x$  и  $y$ , то уравнение (1.5) принимает вид:

$$\begin{aligned}
& \Delta x \Delta y \frac{d}{dt} q_{j,k} - 0.5(G_{j,k-1} + G_{j,k})\Delta x + 0.5(F_{j,k} + F_{j+1,k})\Delta y + \\
& + 0.5(G_{j,k} + G_{j,k+1})\Delta x - 0.5(F_{j-1,k} + F_{j,k})\Delta y = 0,
\end{aligned}$$

или

$$\frac{d}{dt} q_{j,k} + \frac{F_{j+1,k} - F_{j-1,k}}{2\Delta x} + \frac{G_{j,k+1} - G_{j,k-1}}{2\Delta y},$$

что совпадает с аппроксимацией, полученной при представлении пространственных производных в (1.1) с помощью центральных разностей.

Метод конечных объемов, который применялся для описания течения как несжимаемой, так и сжимаемой жидкостей, обладает двумя важными преимуществами. Он обладает хорошими консервативными свойствами (сохранение массы и т.п.), и допускает дискретизацию сложных вычислительных областей в более простой, хотя и не обязательно столь же точной форме, чем это позволяет изопараметрическая конечно-элементарная формулировка или введение обобщенных координат.

## 1.2. Уравнения, содержащие вторые производные

В п. 1.1 метод конечных объемов был приведен к решению уравнения (1.1), содержащего только первые производные, и привел к сравнительно простому дискретному выражению (1.5). Если же исходное уравнение содержит вторые производные, то метод конечных объемов нуждается в

некоторой модификации. Эта ситуация будет проиллюстрирована на примере построения решения уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (1.6)$$

Благодаря умышленной формулировке задачи в декартовых координатах, возникает возможность продемонстрировать способность метода конечных объемов оперировать с областями неправильной формы, сохраняя при этом легко вычисляемого точного решения.

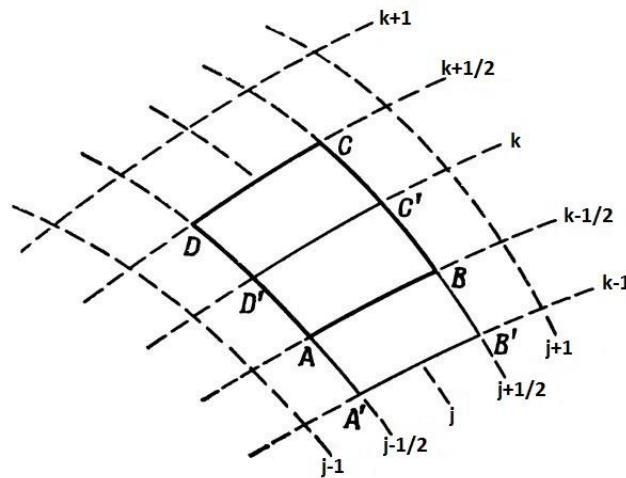


Рисунок 1.2. – Конечный объем для деформированной сетки

Следующий этап метода конечных объемов связан с применением метода подобластей к уравнению (1.6) в конечном объеме ABCD, приведенном на рисунке 1.2, что дает

$$\int_{ABCD} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) dx dy = \int_{\Gamma} H \cdot n ds = 0, \quad (1.7)$$

где

$$H \cdot n ds = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx,$$

$\vec{n}$  – вектор единичной нормали,  $\Gamma$  – граница области ABCD.

Следуя тем же путем, как и в п. 1.1, приближенное представление уравнения (1.7) запишем в виде

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{i,j-\frac{1}{2}} \Delta y_{AB} - \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_{i,j-\frac{1}{2}} \Delta x_{AB} + \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{i+\frac{1}{2},j} \Delta y_{BC} - \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_{i+\frac{1}{2},j} \Delta x_{BC} + \\
& + \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{i,j+\frac{1}{2}} \Delta y_{CD} - \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_{i,j+\frac{1}{2}} \Delta x_{CD} + \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{i-\frac{1}{2},j} \Delta y_{DA} - \\
& - \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_{i-\frac{1}{2},j} \Delta x_{DA} = 0.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Здесь величина  $\left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{i,j-\frac{1}{2}}$  вычисляется как среднее значение по площади В'BC'D'AA'B' (рис. 1.2). Приближенно значение  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  представим в виде интеграла. В результате получим

$$\left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{i,j-\frac{1}{2}} = \left( \frac{1}{S_{A'B'C'D'}} \right) \iint_{A'B'C'D'} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dy = \left( \frac{1}{S_{A'B'C'D'}} \right) \int_{\Gamma} \varphi dy, \tag{1.9}$$

$$\left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_{i,j-\frac{1}{2}} = \left( \frac{1}{S_{A'B'C'D'}} \right) \iint_{A'B'C'D'} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dy = - \left( \frac{1}{S_{A'B'C'D'}} \right) \int_{\Gamma} \varphi dx, \tag{1.10}$$

и

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \varphi dy & \approx \varphi_{i,j-1} \Delta y_{A'B'} + \varphi_B \Delta y_{B'C'} + \varphi_{i,j} \Delta y_{C'D'} + \varphi_A \Delta y_{D'A'}, \\
\int_{\Gamma} \varphi dx & \approx \varphi_{i,j-1} \Delta x_{A'B'} + \varphi_B \Delta x_{B'C'} + \varphi_{i,j} \Delta x_{C'D'} + \varphi_A \Delta x_{D'A'},
\end{aligned}$$

где  $\Gamma$  – граница области A'B'C'D'.

Если сетка не слишком деформирована, то

$$\Delta y_{A'B'} \approx -\Delta y_{C'D'} \approx \Delta y_{AB},$$

$$\Delta y_{B'C'} \approx -\Delta y_{D'A'} \approx \Delta y_{j-1,j},$$

$$S_{AB} = S_{A'B'C'D'} = \Delta x_{AB} \Delta y_{j-1,j} - \Delta y_{AB} \Delta x_{j-1,j}.$$

На этом основании выражение (1.9) и (1.10) принимают вид

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{\Delta y_{AB}(\varphi_{i,j-1} - \varphi_{i,j}) + \Delta y_{j-1,j}(\varphi_B - \varphi_A)}{S_{AB}},$$

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{-[\Delta x_{AB}(\varphi_{i,j-1} - \varphi_{i,j}) + \Delta x_{j-1,j}(\varphi_B - \varphi_A)]}{S_{AB}}.$$
(1.11)

Если получить аналогичные выражения для  $\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]$  в точках  $\left(i + \frac{1}{2}, j\right)$ ,  $\left(i - \frac{1}{2}, j\right)$ ,  $\left(i, j + \frac{1}{2}\right)$ ,  $\left(i, j - \frac{1}{2}\right)$  и т.д., то уравнение (1.8) можно представить в виде

$$Q_{AB}(\varphi_{i,j-1} - \varphi_{i,j}) + P_{AB}(\varphi_B - \varphi_A) + Q_{BC}(\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}) + P_{BC}(\varphi_C - \varphi_B) +$$

$$+ Q_{CD}(\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}) + P_{CD}(\varphi_D - \varphi_C) + Q_{DA}(\varphi_{i-1,j} - \varphi_{i,j}) +$$

$$+ P_{DA}(\varphi_A - \varphi_D) = 0,$$

где

$$Q_{AB} = (\Delta x_{AB}^2 + \Delta y_{AB}^2)/S_{AB}, \quad P_{AB} = (\Delta x_{AB}\Delta x_{j-1,j} + \Delta y_{AB}\Delta y_{j-1,j})/S_{AB};$$

$$Q_{BC} = (\Delta x_{BC}^2 + \Delta y_{BC}^2)/S_{BC}, \quad P_{BC} = (\Delta x_{BC}\Delta x_{i+1,i} + \Delta y_{BC}\Delta y_{i+1,i})/S_{BC};$$

$$Q_{CD} = (\Delta x_{CD}^2 + \Delta y_{CD}^2)/S_{CD}, \quad P_{CD} = (\Delta x_{CD}\Delta x_{j+1,j} + \Delta y_{CD}\Delta y_{j+1,j})/S_{CD};$$

$$Q_{DA} = (\Delta x_{DA}^2 + \Delta y_{DA}^2)/S_{DA}, \quad P_{DA} = (\Delta x_{DA}\Delta x_{i-1,i} + \Delta y_{DA}\Delta y_{i-1,i})/S_{DA}.$$

Здесь

$$\Delta y_{BA} = y_B - y_A, \quad \Delta y_{BA} = y_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}};$$

$$\Delta x_{BA} = x_B - x_A, \quad \Delta x_{BA} = x_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}};$$

$$\Delta y_{CB} = y_C - y_B, \quad \Delta y_{CB} = y_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - y_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}};$$

$$\Delta x_{CB} = x_C - x_B, \quad \Delta x_{CB} = x_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - x_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}};$$

$$\Delta y_{AD} = y_D - y_A, \quad \Delta y_{AD} = y_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}};$$

$$\Delta x_{AD} = x_D - x_A, \quad \Delta x_{AD} = x_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}};$$

$$\Delta y_{DC} = y_D - y_C, \quad \Delta y_{DC} = y_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - y_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}};$$

$$\Delta x_{DC} = x_D - x_C, \quad \Delta x_{DC} = x_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - x_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}.$$

Значения  $\varphi_A, x_A, y_A$  вычисляются как средние из четырех узловых значений вокруг данной точки. Так, например,

$$\varphi_A = 0,25(\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i-1,j-1} + \varphi_{i,j}). \quad (1.12)$$

подстановка подобных выражений (1.12) в уравнение приводит к следующему девятиточечному дискретному варианту уравнения (1.8):

$$\begin{aligned} & 0,25(P_{CD} - P_{DA})\psi_{i-1,j+1} + [Q_{CD} + 0,25(P_{BC} - P_{DA})]\psi_{i,j+1} + \\ & + 0,25(P_{BC} - P_{CD})\psi_{i+1,j+1} + [Q_{DA} + 0,25(P_{CD} - P_{AB})]\psi_{i-1,j} - \\ & - (Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA})\psi_{i,j} + [Q_{BC} + 0,25(P_{AB} - P_{CD})]\psi_{i+1,j} + \\ & + 0,25(P_{DA} - P_{AB})\psi_{i-1,j-1} + [Q_{AB} + 0,25(P_{DA} - P_{BC})]\psi_{i,j-1} \\ & + 0,25(P_{AB} - P_{BC})\psi_{i+1,j-1} = 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Если положение узловых точек сетки определено, то входящие в уравнение (1.13) величины  $Q_{AB}, P_{AB}$  и т.д. могут быть вычислены

### 1.3. Дискретный аналог модели, описывающей течение стратифицированной жидкости

В данной работе предлагается метод численного расчёта плоского течения идеальной неоднородной жидкости для одного варианта граничного условия. Течения в поле силы тяжести описываются следующей системой [5]

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}; \quad (2.1)$$

$$u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} - g; \quad (2.2)$$

$$u \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0; \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.4)$$

где  $(x, y) \in \Omega$ ,  $\Omega$  – ограниченная область в  $R^2$ ,  $u(x, y), v(x, y)$  – компоненты вектора скорости  $\bar{u} = (u, v)$ ,  $\rho(x, y)$  – плотность,  $p(x, y)$  – давление,  $g$  – величина ускорения силы тяжести.

Рассмотрим задачу, когда на участке втекания задается нормальная составляющая вектора скорости и вихрь, а на выходе – нормальная составляющая вектора скорости.

Пусть  $\rho_0$  – характерная для данной жидкости плотность. Введем новые переменные:

$$u' = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} \cdot u, \quad v' = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} \cdot v.$$

Функции  $\psi'$  и  $\omega'$  определим следующими соотношениями:

$$\frac{\partial \psi'}{\partial y} = u', \quad \frac{\partial \psi'}{\partial x} = -v', \quad \omega' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}$$

и будем называть в дальнейшем функцией тока и вихрем соответственно. С помощью известных преобразований и приведения переменных величин к безразмерному виду система уравнений (2.1) - (2.4) примет следующий вид:

$$u \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} = -\frac{1}{Fr^2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x}; \quad (2.5)$$

$$u \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0; \quad (2.6)$$

$$\Delta \psi = -\omega; \quad (2.7)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2.8)$$

где  $Fr = \frac{V_0}{\sqrt{gH\Delta\rho/\rho_0}}$  – плотностное число Фруда;  $V_0$  – характерная скорость;

$H$  – характерный размер области течения  $\Delta\rho = \rho_{max} - \rho_{min}$ .

Использование прямоугольных сеток в данном случае затруднительно. Необходимо построение разностных схем на криволинейных сетках. Область течения, как правило, ограничена криволинейными границами.

## Глава 2. Алгоритмическая и программная реализация разностных схем

В данной работе приводится построение аппроксимации дифференциальных уравнений на криволинейных сетках на примере модели, описывающей движение стратифицированной жидкости.

Примером области течения (рис. 2.1) будем считать водохранилище. Область течения является криволинейной областью, в которой строится криволинейная сетка.

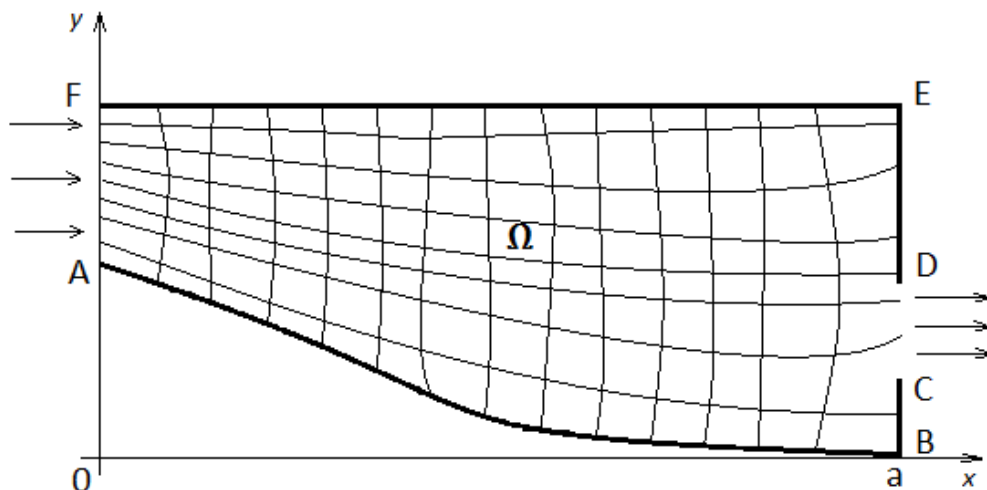


Рисунок 2.1. – Криволинейная область, представляющая собой модель водохранилища

Область  $\Omega$  – область течения, которая описывается следующим образом:

$AF: x = 0$  – область втекания;

$BE: x = a$  – правый край области  $\Omega$ ;

$AB: y = g(x), x \in [0, a]$  – нижняя криволинейная граница области  $\Omega$ ;

$FE: y = f(x), x \in [0, a]$  – верхняя криволинейная граница области  $\Omega$ ;

$DC: x = a, g(a) \leq m1 \leq y \leq m2 \leq f(a)$  – область вытекания.

## 2.1. Уравнения содержащие только первые производные

### 2.1.1. Уравнение сохранения массы

$$u \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0.$$

Используем метод направленных разностей к решению уравнения первого порядка.

Фрагмент сетки ABCD (рис. 2.2) – контрольный объем, по которому интегрируются уравнения. По методу контрольных объемов, получаемые разностные схемы сохраняют свойства дифференциальных уравнений (сохранение массы, уравнение движения – закон сохранения количества движения).

$$\oint_{\Gamma} (u\rho dy - v\rho dx),$$

где  $\Gamma$  – граница области ABCD.

$$\oint_{\Gamma} (u\rho dy - v\rho dx) = \int_{AB}(\dots) + \int_{BC}(\dots) + \int_{CD}(\dots) + \int_{DA}(\dots) = 0.$$

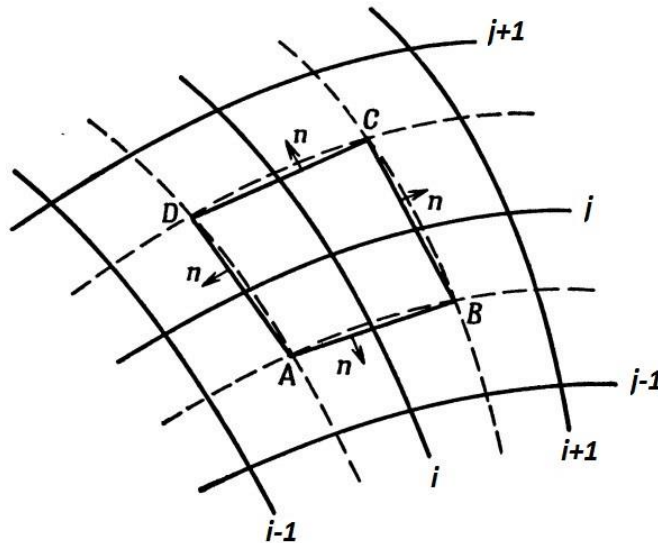


Рисунок 2.2. – Фрагмент сетки для уравнения



## сохранения массы

Интегралы по кускам  $\Gamma$  аппроксимируем следующим образом:

$$\int_{AB} u\rho dy - v\rho dx = \int_{AB} \rho\psi_y dy + \rho\psi_x dx \approx \int_{AB} \rho d\psi = \rho_E(\psi_B - \psi_A) = \rho_E\delta\psi_E,$$

$$\int_{BC} u\rho dy - v\rho dx = \int_{BC} \rho\psi_y dy + \rho\psi_x dx \approx \int_{BC} \rho d\psi = \rho_{C'}(\psi_C - \psi_B) = \rho_{C'}\delta\psi_{C'},$$

$$\int_{CD} u\rho dy - v\rho dx = \int_{CD} \rho\psi_y dy + \rho\psi_x dx \approx \int_{CD} \rho d\psi = \rho_H(\psi_D - \psi_C) = \rho_H\delta\psi_H,$$

$$\int_{DA} u\rho dy - v\rho dx = \int_{DA} \rho\psi_y dy + \rho\psi_x dx \approx \int_{DA} \rho d\psi = \rho_{D'}(\psi_A - \psi_D) = \rho_{D'}\delta\psi_{D'},$$

$$\rho_{C'} = \rho_{ij}, \text{ если } u_{C'} > 0;$$

$$\rho_{C'} = \rho_{i+1,j}, \text{ если } u_{C'} < 0.$$

Пусть  $\rho_E\delta\psi_E = v_E\rho_E$ ;  $\rho_{C'}\delta\psi_{C'} = u_{C'}\rho_{C'}$ ;  $\rho_H\delta\psi_H = v_H\rho_H$ ;  $\rho_{D'}\delta\psi_{D'} = u_{D'}\rho_{D'}$ .

На рисунке 2.3 по методу конечных разностей получаем:

$$u_{C'}\rho_{C'} = \frac{|u_{C'}| + u_{C'}}{2} \rho_{ij} + \frac{u_{C'} - |u_{C'}|}{2} \rho_{i+1,j};$$

$$u_{D'}\rho_{D'} = \frac{|u_{D'}| + u_{D'}}{2} \rho_{i-1,j} + \frac{u_{D'} - |u_{D'}|}{2} \rho_{i,j};$$

$$v_E\rho_E = \frac{v_E + |v_E|}{2} \rho_{i,j-1} + \frac{v_E - |v_E|}{2} \rho_{i,j};$$

$$v_H\rho_H = \frac{|v_H| + v_H}{2} \rho_{i,j} + \frac{v_H - |v_H|}{2} \rho_{i,j+1}.$$

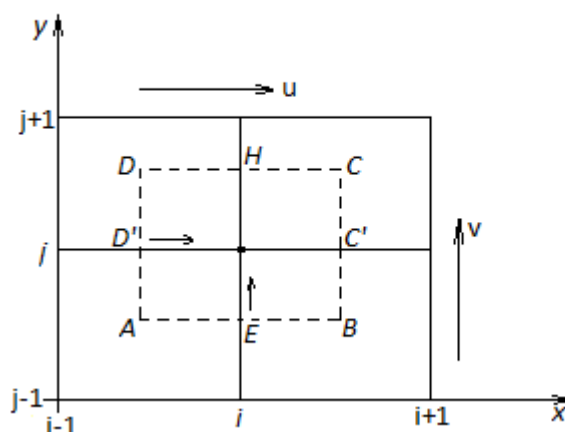


Рисунок 2.3. – Топологическое представление криволинейной сетки для уравнения сохранения массы

Аппроксимация уравнения сохранения массы направленными разностями:

$$\begin{aligned} & \frac{|u_{C'}| + u_{C'}}{2} \rho_{ij} + \frac{u_{C'} - |u_{C'}|}{2} \rho_{i+1,j} - \frac{|u_{D'}| + u_{D'}}{2} \rho_{i-1,j} - \frac{u_{D'} - |u_{D'}|}{2} \rho_{i,j} + \\ & + \frac{|v_H| + v_H}{2} \rho_{i,j} + \frac{v_H - |v_H|}{2} \rho_{i,j+1} - \frac{|v_E| + v_E}{2} \rho_{i,j-1} - \frac{v_E - |v_E|}{2} \rho_{i,j} = 0 \end{aligned}$$

Приведем уравнение сохранения массы к удобному виду для применения метода прогонки:

$$\begin{aligned} & \frac{u_{C'} - |u_{C'}|}{2} \rho_{i+1,j} + \frac{|u_{C'}| + u_{C'} - u_{D'} + |u_{D'}|}{2} \rho_{ij} - \frac{|u_{D'}| + u_{D'}}{2} \rho_{i-1,j} + \\ & + \frac{v_H - |v_H|}{2} \rho_{i,j+1} + \frac{|v_H| + v_H - v_E + |v_E|}{2} \rho_{i,j} - \frac{|v_E| + v_E}{2} \rho_{i,j-1} = 0, \\ & A_1 \rho + A_2 \rho = 0. \end{aligned}$$

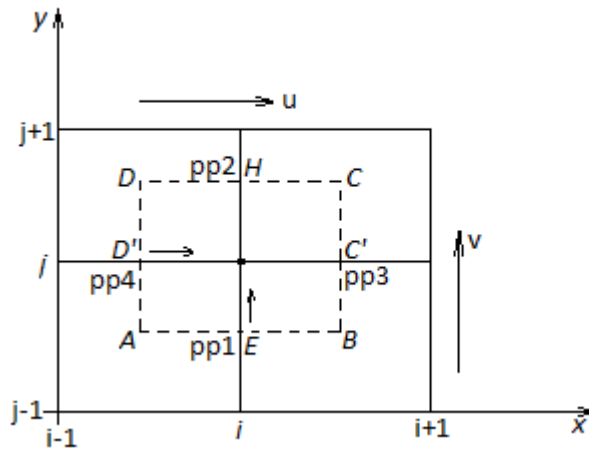


Рисунок 2.4. – Топологическое представление криволинейной сетки с коэффициентами

Зададим разбиение сетки соотношениями

$$x_{ij} = \frac{a}{M} i, \quad i = \overline{0, M}, \quad j = \overline{0, N},$$

$$y_{ij} = g(x_{i,0}) + \frac{f(x_{i,M}) - g(x_{i,0})}{N} j, \quad i = \overline{0, M}, \quad j = \overline{0, N}.$$

Полученные массивы  $x$  и  $y$  имеют вид:

$$x[i, j] = i * h1, \text{ где } h1 = \frac{1}{N}, \quad y[i, j] = j * h2, \text{ где } h2 = \frac{1}{M}$$

Чтобы получить  $\rho_C, \rho_H, \rho_D, \rho_E$  нужны средние значения из четырех узловых значений вокруг данной точки, которые определяются в программе следующим образом:

$$\begin{aligned} xx[i, j] &= (x[i, j] + x[i + 1, j] + x[i, j + 1] + x[i + 1, j + 1])/4, \\ yy[i, j] &= (y[i, j] + y[i + 1, j] + y[i, j + 1] + y[i + 1, j + 1])/4. \end{aligned}$$

Коэффициенты на рисунке 2.4 вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} pp1_{ij} &= (A2_{j,j-1} - A2_{i-1,j-1})/2 = v_{Eij}, \\ pp2_{ij} &= (A2_{j-1,j} - A2_{i,j})/2 = v_{Hij}, \\ pp3_{ij} &= (A2_{j,j} - A2_{i,j-1})/2 = u_{Cij}, \\ pp4_{ij} &= (A2_{j-1,j-1} - A2_{i-1,j})/2 = u_{Dij}, \end{aligned}$$

Здесь  $A2$  – это новая матрица  $\psi$ , которая определена новыми массивами  $xx[i, j]$  и  $yy[i, j]$ .

$$\begin{aligned} p1_{ij} &= -(pp4_{ij} + |pp4_{ij}|), \\ p2_{ij} &= pp3_{ij} - |pp3_{ij}|, \\ p12_{ij} &= pp3_{ij} + |pp3_{ij}| - (pp4_{ij} - |pp4_{ij}|), \\ p3_{ij} &= -(pp1_{ij} + |pp1_{ij}|), \\ p4_{ij} &= pp2_{ij} - |pp2_{ij}|, \\ p34_{ij} &= pp2_{ij} + |pp2_{ij}| - (pp1_{ij} - |pp1_{ij}|), \end{aligned}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + p1_{ij}\rho_{i-1,j} + p12_{ij}\rho_{ij} + p2_{ij}\rho_{i+1,j} + p3_{ij}\rho_{i,j-1} + p34_{ij}\rho_{ij} + p4_{ij}\rho_{i,j+1} = 0.$$

Решаем это уравнение методом переменных направлений.

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\rho_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - \rho_{ij}^n}{\tau} + p1_{ij}\rho_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + p12_{ij}\rho_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + p2_{ij}\rho_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \\ &\quad + p3_{ij}\rho_{i,j-1}^n + p34_{ij}\rho_{ij}^n + p4_{ij}\rho_{i,j+1}^n = 0, \\ &\frac{\rho_{ij}^{n+1} - \rho_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} + p1_{ij}\rho_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + p12_{ij}\rho_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + p2_{ij}\rho_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \\ &\quad + p3_{ij}\rho_{i,j-1}^{n+1} + p34_{ij}\rho_{ij}^{n+1} + p4_{ij}\rho_{i,j+1}^{n+1} = 0; \end{aligned} \right.$$

$$\begin{cases} p1_{ij}\rho_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \left(p12_{ij} + \frac{1}{\tau}\right)\rho_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + p2_{ij}\rho_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = \\ = \rho_{ij}^n \left(\frac{1}{\tau} - p34_{ij}\right) - p3_{ij}\rho_{i,j-1}^n - p4_{ij}\rho_{i,j+1}^n, \\ p3_{ij}\rho_{i,j-1}^{n+1} + \left(p34_{ij} + \frac{1}{\tau}\right)\rho_{ij}^{n+1} + p4_{ij}\rho_{i,j+1}^{n+1} = \\ = \rho_{ij}^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\tau} - p12_{ij}\right) - p1_{ij}\rho_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - p2_{ij}\rho_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

$$\rho^{n+\frac{1}{2}} = \rho_1, \quad \rho^{n+1} = \rho_2, \quad \rho^n = \rho,$$

$$\begin{cases} p1_{ij}\rho_{1i-1,j} + \left(p12_{ij} + \frac{1}{\tau}\right)\rho_{1ij} + p2_{ij}\rho_{1i+1,j} = \\ = \rho_{ij} \left(\frac{1}{\tau} - p34_{ij}\right) - p3_{ij}\rho_{i,j-1} - p4_{ij}\rho_{i,j+1}, \\ p3_{ij}\rho_{2i,j-1} + \left(p34_{ij} + \frac{1}{\tau}\right)\rho_{2ij} + p4_{ij}\rho_{2i,j+1} = \\ = \rho_{1ij} \left(\frac{1}{\tau} - p12_{ij}\right) - p1_{ij}\rho_{1i-1,j} - p2_{ij}\rho_{1i+1,j}. \end{cases}$$

Пусть

$$\begin{aligned} \rho_{ij} \left(\frac{1}{\tau} - p34_{ij}\right) - p3_{ij}\rho_{i,j-1} - p4_{ij}\rho_{i,j+1} &= F_{1ij}, \\ \rho_{1ij} \left(\frac{1}{\tau} - p12_{ij}\right) - p1_{ij}\rho_{1i-1,j} - p2_{ij}\rho_{1i+1,j} &= F_{2ij}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} p1_{ij}(\alpha_i\rho_{1ij} + \beta_i) + \left(p12_{ij} + \frac{1}{\tau}\right)\rho_{1ij} + p2_{ij}\rho_{1i+1,j} &= F_{1ij}, \\ p3_{ij}(\alpha_j\rho_{2ij} + \beta_j) + \left(p34_{ij} + \frac{1}{\tau}\right)\rho_{2ij} + p4_{ij}\rho_{2i,j+1} &= F_{2ij}. \end{aligned}$$

Выразим  $\rho_{1ij}$  и  $\rho_{2ij}$ :

$$\begin{aligned} \rho_{1ij} &= \frac{-p2_{ij}}{\alpha_i p1_{ij} + p12_{ij} + \frac{1}{\tau}} \rho_{1i+1,j} + \frac{F_{1ij} - p1_{ij}\beta_i}{\alpha_i p1_{ij} + p12_{ij} + \frac{1}{\tau}}, \\ \rho_{2ij} &= \frac{-p4_{ij}}{\alpha_j p3_{ij} + p34_{ij} + \frac{1}{\tau}} \rho_{2i,j+1} + \frac{F_{2ij} - p3_{ij}\beta_j}{\alpha_j p3_{ij} + p34_{ij} + \frac{1}{\tau}}. \end{aligned}$$

Получим прогоночные коэффициенты для первого и второго уравнения

$$1) \quad \alpha_{i+1} = \frac{-p2_{ij}}{\alpha_i p1_{ij} + p12_{ij} + \frac{1}{\tau}}; \quad \beta_{i+1} = \frac{F_{1ij} - p1_{ij}\beta_i}{\alpha_i p1_{ij} + p12_{ij} + \frac{1}{\tau}};$$

$$2) \alpha_{j+1} = \frac{-p_{4ij}}{\alpha_j p_{3ij} + p_{34ij} + \frac{1}{\tau}}; \beta_{j+1} = \frac{F_{2ij} - p_{3ij} \beta_j}{\alpha_i p_{3ij} + p_{34ij} + \frac{1}{\tau}}$$

В итоге получим соотношения для обратной прогонки:

$$\rho_{1ij} = \alpha_{i+1} \rho_{i+1,j} + \beta_{i+1},$$

$$\rho_{2ij} = \alpha_{j+1} \rho_{i,j+1} + \beta_{j+1}.$$

### 2.1.2. Уравнение для вихря

$$u \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} = -\frac{1}{Fr^2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

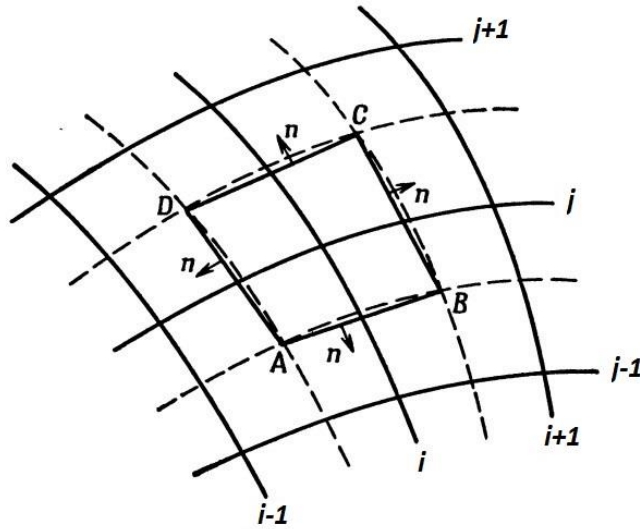


Рисунок 2.5. – Фрагмент сетки для уравнения вихря

Аналогично, как и для уравнения сохранения массы, интегрируем по области ABCD (рис. 2.5), используя метод направленных разностей, имеем:

$$\oint_{\Gamma} (u\omega dy - v\omega dx) = -\frac{1}{Fr^2} \int_{\Gamma} \rho dy,$$

где  $\Gamma$  – граница области ABCD.

$$\oint_{\Gamma} (u\omega dy - v\omega dx) = \int_{AB} (...) + \int_{BC} (...) \int_{CD} (...) \int_{DA} (...) = -\frac{1}{Fr^2} \int_{\Gamma} \rho dy.$$

Интегралы по границе  $\Gamma$  аппроксимируем следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{AB} u\omega dy - v\omega dx &= \int_{AB} \omega \psi_y dy + \omega \psi_x dx \approx \\ &\approx \int_{AB} \omega d\rho = \omega_E (\rho_B - \rho_A) = \omega_E \delta\rho_E = -\frac{1}{Fr^2} \rho_E (y_B - y_A); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{BC} u\omega dy - v\omega dx &= \int_{BC} \omega\psi_y dy + \omega\psi_x dx \approx \\ &\approx \int_{BC} \omega d\rho = \omega_{C'}(\rho_C - \rho_B) = \omega_{C'}\delta\rho_{C'} = -\frac{1}{Fr^2}\rho_{C'}(y_C - y_B); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{CD} u\omega dy - v\omega dx &= \int_{CD} \omega\psi_y dy + \omega\psi_x dx \approx \\ &\approx \int_{CD} \omega d\rho = \omega_H(\rho_D - \rho_C) = \omega_H\delta\rho_H = -\frac{1}{Fr^2}\rho_H(y_D - y_C); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{DA} u\omega dy - v\omega dx &= \int_{DA} \omega\psi_y dy + \omega\psi_x dx \approx \\ &\approx \int_{DA} \omega d\rho = \omega_{D'}(\rho_A - \rho_D) = \omega_{D'}\delta\rho_{D'} = -\frac{1}{Fr^2}\rho_{D'}(y_A - y_D), \end{aligned}$$

$\omega_{C'} = \omega_{ij}$ , если  $u_{C'} > 0$ ;

$\omega_{C'} = \omega_{i+1,j}$ , если  $u_{C'} < 0$ ;

$$u_{C'}\omega_{C'} = \frac{|u_{C'}| + u_{C'}}{2}\omega_{ij} + \frac{u_{C'} - |u_{C'}|}{2}\omega_{i+1,j};$$

$$u_{D'}\omega_{D'} = \frac{|u_{D'}| + u_{D'}}{2}\omega_{i-1,j} + \frac{u_{D'} - |u_{D'}|}{2}\omega_{i,j};$$

$$v_E\omega_E = \frac{|v_E| + v_E}{2}\omega_{i,j-1} + \frac{v_E - |v_E|}{2}\omega_{i,j};$$

$$v_H\omega_H = \frac{|v_H| + v_H}{2}\omega_{i,j} + \frac{v_H - |v_H|}{2}\omega_{i,j+1};$$

Запишем аппроксимацию уравнения для вихря направленными разностями:

$$\begin{aligned} &\frac{|u_{C'}| + u_{C'}}{2}\omega_{ij} + \frac{u_{C'} - |u_{C'}|}{2}\omega_{i+1,j} - \frac{|u_{D'}| + u_{D'}}{2}\omega_{i-1,j} - \frac{u_{D'} - |u_{D'}|}{2}\omega_{i,j} + \\ &+ \frac{|v_H| + v_H}{2}\omega_{i,j} + \frac{v_H - |v_H|}{2}\omega_{i,j+1} - \frac{|v_E| + v_E}{2}\omega_{i,j-1} - \frac{v_E - |v_E|}{2}\omega_{i,j} = \\ &= -\frac{1}{Fr^2} \cdot \left( \rho_{i+1,j} \frac{\Delta y_{BC}}{2} + \rho_{i-1,j} \frac{\Delta y_{AD}}{2} + \rho_{i,j+1} \frac{\Delta y_{CD}}{2} + \rho_{i,j-1} \frac{\Delta y_{AB}}{2} \right). \end{aligned}$$

Приведем уравнение к удобному виду для применения метода прогонки.

$$\frac{u_{C'} - |u_{C'}|}{2}\omega_{i+1,j} + \frac{|u_{C'}| + u_{C'} - u_{D'} + |u_{D'}|}{2}\omega_{ij} - \frac{|u_{D'}| + u_{D'}}{2}\omega_{i-1,j} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{v_H - |v_H|}{2} \omega_{i,j+1} + \frac{|v_H| + v_H - v_E + |v_E|}{2} \omega_{i,j} - \frac{|v_E| + v_E}{2} \omega_{i,j-1} = \\
& = -\frac{1}{Fr^2} \cdot \left( \rho_{i+1,j} \frac{\Delta y_{BC}}{2} + \rho_{i-1,j} \frac{\Delta y_{AD}}{2} + \rho_{i,j+1} \frac{\Delta y_{CD}}{2} + \rho_{i,j-1} \frac{\Delta y_{AB}}{2} \right), \\
& A_1 \omega + A_2 \omega = -\frac{1}{Fr^2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x}.
\end{aligned}$$

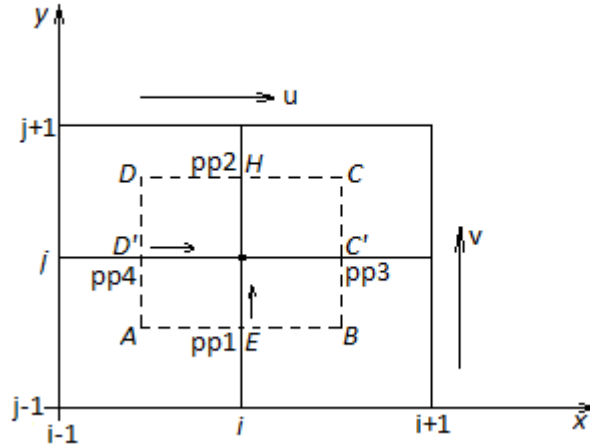


Рисунок 2.6. – Топологическое представление криволинейной сетки с коэффициентами для уравнения вихря

Аналогичные коэффициенты для уравнения вихря (рис. 2.6):

$$\begin{aligned}
pp1_{ij} &= (R2_{j,j-1} - R2_{i-1,j-1})/2 = v_{Eij}, \\
pp2_{ij} &= (R2_{j-1,j} - R2_{i,j})/2 = v_{Hij}, \\
pp3_{ij} &= (R2_{j,j} - R2_{i,j-1})/2 = u_{C'ij}, \\
pp4_{ij} &= (R2_{j-1,j-1} - R2_{i-1,j})/2 = u_{Drij}. \\
p1_{ij} &= -(pp4_{ij} + |pp4_{ij}|), \\
p2_{ij} &= pp3_{ij} - |pp3_{ij}|, \\
p12_{ij} &= pp3_{ij} + |pp3_{ij}| - (pp4_{ij} - |pp4_{ij}|), \\
p3_{ij} &= -(pp1_{ij} + |pp1_{ij}|), \\
p4_{ij} &= pp2_{ij} - |pp2_{ij}|, \\
p34_{ij} &= pp2_{ij} + |pp2_{ij}| - (pp1_{ij} - |pp1_{ij}|).
\end{aligned}$$

В итоге получаем

$$\frac{d\omega}{dt} + p1_{ij}\omega_{i-1,j} + p12_{ij}\omega_{ij} + p2_{ij}\omega_{i+1,j} + p3_{ij}\omega_{i,j-1} + p34_{ij}\omega_{ij} + p4_{ij}\omega_{i,j+1} = -\frac{1}{Fr^2} \cdot \left( \rho_{i+1,j} \frac{\Delta y_{BC}}{2} + \rho_{i-1,j} \frac{\Delta y_{AD}}{2} + \rho_{i,j+1} \frac{\Delta y_{CD}}{2} + \rho_{i,j-1} \frac{\Delta y_{AB}}{2} \right).$$

Решаем это уравнение методом переменных направлений.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - \omega_{ij}^n}{\tau} + p1_{ij}\omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + p12_{ij}\omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + p2_{ij}\omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \\ + p3_{ij}\omega_{i,j-1}^n + p34_{ij}\omega_{ij}^n + p4_{ij}\omega_{i,j+1}^n \\ = \\ -\frac{1}{Fr^2} \cdot \left( \rho_{i+1,j} \frac{\Delta y_{BC}}{2} + \rho_{i-1,j} \frac{\Delta y_{AD}}{2} + \rho_{i,j+1} \frac{\Delta y_{CD}}{2} + \rho_{i,j-1} \frac{\Delta y_{AB}}{2} \right), \\ \frac{\omega_{ij}^{n+1} - \omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} + p1_{ij}\omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + p12_{ij}\omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + p2_{ij}\omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \\ + p3_{ij}\omega_{i,j-1}^{n+1} + p34_{ij}\omega_{ij}^{n+1} + p4_{ij}\omega_{i,j+1}^{n+1} \\ = \\ -\frac{1}{Fr^2} \cdot \left( \rho_{i+1,j} \frac{\Delta y_{BC}}{2} + \rho_{i-1,j} \frac{\Delta y_{AD}}{2} + \rho_{i,j+1} \frac{\Delta y_{CD}}{2} + \rho_{i,j-1} \frac{\Delta y_{AB}}{2} \right), \\ \left\{ \begin{array}{l} p1_{ij}\omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \left( p12_{ij} + \frac{1}{\tau} \right) \omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + p2_{ij}\omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = \\ \omega_{ij}^n \left( \frac{1}{\tau} - p34_{ij} \right) - p3_{ij}\omega_{i,j-1}^n - p4_{ij}\omega_{i,j+1}^n \\ -\frac{1}{Fr^2} \cdot \left( \rho_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\Delta y_{BC}}{2} + \rho_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\Delta y_{AD}}{2} + \rho_{i,j+1}^n \frac{\Delta y_{CD}}{2} + \rho_{i,j-1}^n \frac{\Delta y_{AB}}{2} \right), \\ p3_{ij}\omega_{i,j-1}^{n+1} + \left( p34_{ij} + \frac{1}{\tau} \right) \omega_{ij}^{n+1} + p4_{ij}\omega_{i,j+1}^{n+1} = \\ \omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{\tau} - p12_{ij} \right) - p1_{ij}\omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - p2_{ij}\omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ -\frac{1}{Fr^2} \cdot \left( \rho_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\Delta y_{BC}}{2} + \rho_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\Delta y_{AD}}{2} + \rho_{i,j+1}^{n+1} \frac{\Delta y_{CD}}{2} + \rho_{i,j-1}^{n+1} \frac{\Delta y_{AB}}{2} \right). \end{array} \right. \\ \omega^{n+\frac{1}{2}} = \omega_1, \quad \omega^{n+1} = \omega_2, \quad \omega^n = \omega, \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} p1_{ij}\omega_{1i-1,j} + \left(p12_{ij} + \frac{1}{\tau}\right)\omega_{1ij} + p2_{ij}\omega_{1i+1,j} = \\ \omega_{ij}\left(\frac{1}{\tau} - p34_{ij}\right) - p3_{ij}\omega_{i,j-1} - p4_{ij}\omega_{i,j+1} \\ - \frac{1}{Fr^2} \cdot \left(\rho_{i+1,j}^{\frac{n+1}{2}} \frac{\Delta y_{BC}}{2} + \rho_{i-1,j}^{\frac{n+1}{2}} \frac{\Delta y_{AD}}{2} + \rho_{i,j+1}^n \frac{\Delta y_{CD}}{2} + \rho_{i,j-1}^n \frac{\Delta y_{AB}}{2}\right), \\ p3_{ij}\omega_{2i,j-1} + \left(p34_{ij} + \frac{1}{\tau}\right)\omega_{2ij} + p4_{ij}\omega_{2i,j+1} = \\ \omega_{1ij}\left(\frac{1}{\tau} - p12_{ij}\right) - p1_{ij}\omega_{1i-1,j} - p2_{ij}\omega_{1i+1,j} \\ - \frac{1}{Fr^2} \cdot \left(\rho_{i+1,j}^{\frac{n+1}{2}} \frac{\Delta y_{BC}}{2} + \rho_{i-1,j}^{\frac{n+1}{2}} \frac{\Delta y_{AD}}{2} + \rho_{i,j+1}^{n+1} \frac{\Delta y_{CD}}{2} + \rho_{i,j-1}^{n+1} \frac{\Delta y_{AB}}{2}\right). \end{array} \right.$$

Пусть

$$\begin{aligned} \omega_{ij}\left(\frac{1}{\tau} - p34_{ij}\right) - p3_{ij}\omega_{i,j-1} - p4_{ij}\omega_{i,j+1} - \frac{1}{Fr^2} \\ \cdot (p1_{ij}\rho_{i-1,j} + p12_{ij}\rho_{ij} + p2_{ij}\rho_{i+1,j}) = F_{1ij}, \\ \omega_{1ij}\left(\frac{1}{\tau} - p12_{ij}\right) - p1_{ij}\omega_{1i-1,j} - p2_{ij}\omega_{1i+1,j} - \frac{1}{Fr^2} \\ \cdot (p1_{ij}\rho_{i-1,j} + p12_{ij}\rho_{ij} + p2_{ij}\rho_{i+1,j}) = F_{2ij}, \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} p1_{ij}(\alpha_i\omega_{1ij} + \beta_i) + \left(p12_{ij} + \frac{1}{\tau}\right)\omega_{1ij} + p2_{ij}\omega_{1i+1,j} = F_{1ij}, \\ p3_{ij}(\alpha_j\omega_{2ij} + \beta_j) + \left(p34_{ij} + \frac{1}{\tau}\right)\omega_{2ij} + p4_{ij}\omega_{2i,j+1} = F_{2ij}. \end{aligned}$$

Преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \omega_{1ij} = \frac{-p2_{ij}}{\alpha_i p1_{ij} + p12_{ij} + \frac{1}{\tau}} \omega_{1i+1,j} + \frac{F_{1ij} - p1_{ij}\beta_i}{\alpha_i p1_{ij} + p12_{ij} + \frac{1}{\tau}}; \\ \omega_{2ij} = \frac{-p4_{ij}}{\alpha_j p3_{ij} + p34_{ij} + \frac{1}{\tau}} \omega_{2i,j+1} + \frac{F_{2ij} - p3_{ij}\beta_j}{\alpha_j p3_{ij} + p34_{ij} + \frac{1}{\tau}}. \end{aligned}$$

Получим прогоночные коэффициенты для первого и второго уравнения:

$$1) \alpha_{i+1} = \frac{-p2_{ij}}{\alpha_i p1_{ij} + p12_{ij} + \frac{1}{\tau}}; \beta_{i+1} = \frac{F_{1ij} - p1_{ij}\beta_i}{\alpha_i p1_{ij} + p12_{ij} + \frac{1}{\tau}};$$

$$2) \alpha_{j+1} = \frac{-p_{4ij}}{\alpha_j p_{3ij} + p_{34ij} + \frac{1}{\tau}}; \beta_{j+1} = \frac{F_{2ij} - p_{3ij} \beta_j}{\alpha_i p_{3ij} + p_{34ij} + \frac{1}{\tau}}$$

В итоге получим соотношения для обратной прогонки

$$\omega_{1ij} = \alpha_{i+1} \omega_{i+1,j} + \beta_{i+1},$$

$$\omega_{2ij} = \alpha_{j+1} \omega_{i,j+1} + \beta_{j+1}.$$

## 2.2. Уравнения, содержащие вторые производные

### Уравнение Пуассона

$$\Delta \psi = -\omega,$$

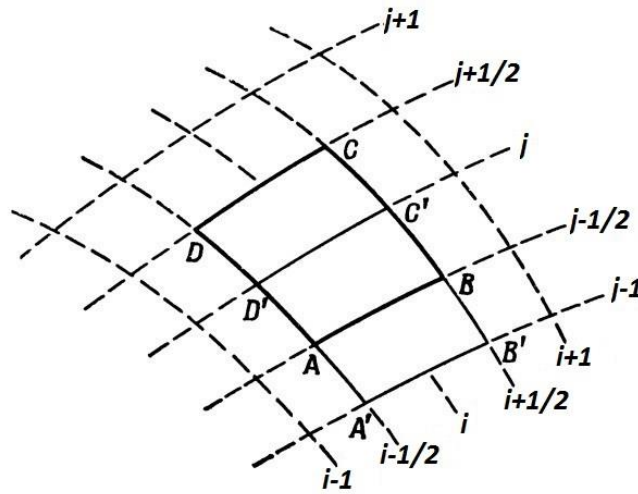


Рисунок 2.8. – Фрагмент сетки для уравнения Пуассона

Применяем метод подобластей к уравнению (2.3) в конечном объеме ABCD, приведенном на рисунке 2.8, что дает

$$\int_{ABCD} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) dx dy = \int_{\Gamma} H \cdot n ds = -\omega,$$

где

$$H \cdot n ds = \frac{\partial \psi}{\partial x} dy - \frac{\partial \psi}{\partial y} dx,$$

$\vec{n}$  – вектор единичной нормали,  $\Gamma$  – граница области ABCD.

Приближенное представление уравнения запишем в виде:

$$\left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{i,j-\frac{1}{2}} \Delta y_{AB} - \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} \right]_{i,j-\frac{1}{2}} \Delta x_{AB} + \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{i+\frac{1}{2},j} \Delta y_{BC} - \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} \right]_{i+\frac{1}{2},j} \Delta x_{BC} +$$

$$+ \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{i,j+\frac{1}{2}} \Delta y_{CD} - \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} \right]_{i,j+\frac{1}{2}} \Delta x_{CD} + \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{i-\frac{1}{2},j} \Delta y_{DA} - \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} \right]_{i-\frac{1}{2},j} \Delta x_{DA} = -\omega_{i,j}.$$

Здесь величина  $\left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{i,j-\frac{1}{2}}$  вычисляется как среднее значение по площади

В'BC'D'AA'B'. Приближенно значение  $\frac{\partial \psi}{\partial x}$  представим в виде интеграла. В результате получим:

$$\left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{i,j-\frac{1}{2}} = \left( \frac{1}{S_{A'B'C'D'}} \right) \iint_{A'B'C'D'} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx dy = \left( \frac{1}{S_{A'B'C'D'}} \right) \int_{\Gamma} \psi dy, \quad (2.2.1)$$

$$\left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} \right]_{i,j-\frac{1}{2}} = \left( \frac{1}{S_{A'B'C'D'}} \right) \iint_{A'B'C'D'} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy = - \left( \frac{1}{S_{A'B'C'D'}} \right) \int_{\Gamma} \psi dx, \quad (2.2.2)$$

и

$$\int_{\Gamma} \psi dy \approx \psi_{i,j-1} \Delta y_{A'B'} + \psi_B \Delta y_{B'C'} + \psi_{i,j} \Delta y_{C'D'} + \psi_A \Delta y_{D'A'},$$

$$\int_{\Gamma} \psi dx \approx \psi_{i,j-1} \Delta x_{A'B'} + \psi_B \Delta x_{B'C'} + \psi_{i,j} \Delta x_{C'D'} + \psi_A \Delta x_{D'A'},$$

где  $\Gamma$  – граница области A'B'C'D'.

Если сетка не слишком деформирована, то

$$\Delta y_{A'B'} \approx -\Delta y_{C'D'} \approx \Delta y_{AB},$$

$$\Delta y_{B'C'} \approx -\Delta y_{D'A'} \approx \Delta y_{j-1,j}$$

$$S_{AB} = S_{A'B'C'D'} = \Delta x_{AB} \Delta y_{j-1,j} - \Delta y_{AB} \Delta x_{j-1,j}.$$

На этом основании выражение (2.2.1) и (2.2.2) принимает вид:

$$\left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{\Delta y_{AB} (\psi_{i,j-1} - \psi_{i,j}) + \Delta y_{j-1,j} (\psi_B - \psi_A)}{S_{AB}},$$

$$\left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} \right]_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{-[\Delta x_{AB} (\psi_{i,j-1} - \psi_{i,j}) + \Delta x_{j-1,j} (\psi_B - \psi_A)]}{S_{AB}}.$$

Если получить аналогичные выражения для  $\left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]$  в точках  $\left( i + \frac{1}{2}, j \right)$ ,

$\left( i - \frac{1}{2}, j \right)$ ,  $\left( i, j + \frac{1}{2} \right)$ ,  $\left( i, j - \frac{1}{2} \right)$  и т.д., то уравнение можно записать в виде

$$\begin{aligned}
& Q_{AB}(\psi_{i,j-1} - \psi_{i,j}) + P_{AB}(\psi_B - \psi_A) + Q_{BC}(\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}) + P_{BC}(\psi_C - \psi_B) + \\
& + Q_{CD}(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}) + P_{CD}(\psi_D - \psi_C) + Q_{DA}(\psi_{i-1,j} - \psi_{i,j}) + \\
& + P_{DA}(\psi_A - \psi_D) = -\omega_{i,j}.
\end{aligned}$$

Значения  $\psi_A, x_A, y_A$  вычисляются как средние из четырех узловых значений вокруг данной точки. Так, например,

$$\psi_A = 0,25(\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i-1,j-1} + \psi_{i,j}),$$

где

$$\begin{aligned}
Q_{AB} &= (\Delta x_{AB}^2 + \Delta y_{AB}^2)/S_{AB}, & P_{AB} &= (\Delta x_{AB}\Delta x_{j-1,j} + \Delta y_{AB}\Delta y_{j-1,j})/S_{AB}; \\
Q_{BC} &= (\Delta x_{BC}^2 + \Delta y_{BC}^2)/S_{BC}, & P_{BC} &= (\Delta x_{BC}\Delta x_{i+1,i} + \Delta y_{BC}\Delta y_{i+1,i})/S_{BC}; \\
Q_{CD} &= (\Delta x_{CD}^2 + \Delta y_{CD}^2)/S_{CD}, & P_{CD} &= (\Delta x_{CD}\Delta x_{j+1,j} + \Delta y_{CD}\Delta y_{j+1,j})/S_{CD}; \\
Q_{DA} &= (\Delta x_{DA}^2 + \Delta y_{DA}^2)/S_{DA}, & P_{DA} &= (\Delta x_{DA}\Delta x_{i-1,i} + \Delta y_{DA}\Delta y_{i-1,i})/S_{DA};
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\Delta y_{BA} &= y_B - y_A, & \Delta y_{BA} &= y_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}; \\
\Delta x_{BA} &= x_B - x_A, & \Delta x_{BA} &= x_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}; \\
\Delta y_{CB} &= y_C - y_B, & \Delta y_{CB} &= y_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - y_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}; \\
\Delta x_{CB} &= x_C - x_B, & \Delta x_{CB} &= x_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - x_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}; \\
\Delta y_{AD} &= y_D - y_A, & \Delta y_{AD} &= y_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}; \\
\Delta x_{AD} &= x_D - x_A, & \Delta x_{AD} &= x_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}; \\
\Delta y_{DC} &= y_D - y_C, & \Delta y_{DC} &= y_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - y_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}; \\
\Delta x_{DC} &= x_D - x_C, & \Delta x_{DC} &= x_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - x_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Подстановка подобных выражений в уравнение приводит к следующему девятиточечному дискретному варианту уравнения:

$$\begin{aligned}
& 0,25(P_{CD} - P_{DA})\psi_{i-1,j+1} + [Q_{CD} + 0,25(P_{BC} - P_{DA})]\psi_{i,j+1} + \\
& + 0,25(P_{BC} - P_{CD})\psi_{i+1,j+1} + [Q_{DA} + 0,25(P_{CD} - P_{AB})]\psi_{i-1,j} - \\
& - (Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA})\psi_{i,j} + [Q_{BC} + 0,25(P_{AB} - P_{CD})]\psi_{i+1,j} +
\end{aligned}$$

$$+0,25(P_{DA} - P_{AB})\psi_{i-1,j-1} + [Q_{AB} + 0,25(P_{DA} - P_{BC})]\psi_{i,j-1} + \\ +0,25(P_{AB} - P_{BC})\psi_{i+1,j-1} = -\omega_{i,j}.$$

Переобозначим коэффициенты

$$\begin{aligned} \widetilde{a}_{l,j} &= Q_{DA} + 0,25(P_{CD} - P_{AB}), \\ \widetilde{b}_{l,j} &= Q_{DA} + Q_{BC}, \\ \widetilde{c}_{l,j} &= Q_{BC} + 0,25(P_{AB} - P_{CD}), \\ \widetilde{a}_{1l,j} &= Q_{AB} + 0,25(P_{DA} - P_{BC}), \\ \widetilde{b}_{1l,j} &= Q_{AB} + Q_{CD}, \\ \widetilde{c}_{1l,j} &= Q_{CD} + 0,25(P_{BC} - P_{DA}), \\ \widetilde{l}_{1l,j} &= 0,25(P_{CD} - P_{DA}), \\ \widetilde{l}_{2l,j} &= 0,25(P_{BC} - P_{CD}), \\ \widetilde{l}_{3l,j} &= 0,25(P_{DA} - P_{AB}), \\ \widetilde{l}_{4l,j} &= 0,25(P_{AB} - P_{BC}), \end{aligned}$$

и представим уравнение в виде

$$\begin{aligned} \widetilde{a}_{l,j}\psi_{i-1,j} - \widetilde{b}_{l,j}\psi_{i,j} + \widetilde{c}_{l,j}\psi_{i+1,j} + \widetilde{a}_{1l,j}\psi_{i,j-1} - \widetilde{b}_{1l,j}\psi_{i,j} + \widetilde{c}_{1l,j}\psi_{i,j+1} + \\ + F(\psi_{i-1,j+1}, \psi_{i-1,j-1}, \psi_{i+1,j+1}, \psi_{i+1,j-1}) = -\omega_{i,j}. \end{aligned}$$

Такой вид уравнения удобен для использования метода переменных направлений. Далее будут построена криволинейная сетка и будут произведены расчеты в узлах этой сетки с помощью аппроксимации дифференциальных уравнений, описывающих движение стратифицированной жидкости в устойчивом водоеме.

$$\begin{aligned} \frac{\psi_{1ij} - \psi_{ij}}{\tau} - (\widetilde{a}_{l,j}\psi_{1i-1,j} - \widetilde{b}_{l,j}\psi_{1ij} + \widetilde{c}_{l,j}\psi_{1i+1,j}) - \\ - (\widetilde{a}_{1l,j}\psi_{i,j-1} - \widetilde{b}_{1l,j}\psi_{ij} + \widetilde{c}_{1l,j}\psi_{i,j+1}) - l_{1ij}\psi_{i-1,j+1} - l_{2ij}\psi_{i+1,j+1} - \\ - l_{3ij}\psi_{i-1,j-1} - l_{4ij}\psi_{i+1,j-1} + \omega_{ij}v_{ij} = 0, \\ \frac{\psi_{2ij} - \psi_{1ij}}{\tau} - (\widetilde{a}_{1l,j}\psi_{2i,j-1} - \widetilde{b}_{1l,j}\psi_{2ij} + \widetilde{c}_{1l,j}\psi_{2i,j+1}) - \\ - (\widetilde{a}_{l,j}\psi_{i-1,j} - \widetilde{b}_{l,j}\psi_{ij} + \widetilde{c}_{l,j}\psi_{i+1,j}) - l_{1ij}\psi_{i-1,j+1} - l_{2ij}\psi_{i+1,j+1} - \end{aligned}$$

$$-l_{3ij}\psi_{i-1,j-1} - l_{4ij}\psi_{i+1,j-1} + \omega_{ij}\nu_{ij} = 0.$$

Приведем оба уравнения для применения метода прогонки.

$$\begin{aligned} & -\widetilde{a}_{1j}\psi_{1i-1,j} + \left(\widetilde{b}_{1j} + \frac{1}{\tau}\right)\psi_{1ij} - \widetilde{c}_{1j}\psi_{1i+1,j} = \\ & = \frac{\psi_{ij}}{\tau} + \widetilde{a}_{11j}\psi_{i,j-1} - \widetilde{b}_{11j}\psi_{ij} + \widetilde{c}_{11j}\psi_{i,j+1} + l_{11j}\psi_{i-1,j+1} + l_{21j}\psi_{i+1,j+1} + \\ & \quad + l_{31j}\psi_{i-1,j-1} + l_{41j}\psi_{i+1,j-1} - \omega_{ij}\nu_{ij}, \\ & -\widetilde{a}_{11j}\psi_{2i,j-1} + \left(\widetilde{b}_{11j} + \frac{1}{\tau}\right)\psi_{2ij} - \widetilde{c}_{11j}\psi_{2i,j+1} = \\ & = \frac{\psi_{1ij}}{\tau} + \widetilde{a}_{11j}\psi_{1i,j-1} - \widetilde{b}_{11j}\psi_{1ij} + \widetilde{c}_{11j}\psi_{1i,j+1} + l_{11j}\psi_{i-1,j+1} + l_{21j}\psi_{i+1,j+1} + \\ & \quad + l_{31j}\psi_{i-1,j-1} + l_{41j}\psi_{i+1,j-1} - \omega_{ij}\nu_{ij}, \end{aligned}$$

где  $\nu_{ij} = \frac{1}{S_{ABCD}}$ ;

Пусть

$$\begin{aligned} & \frac{\psi_{ij}}{\tau} + \widetilde{a}_{11j}\psi_{i,j-1} - \widetilde{b}_{11j}\psi_{ij} + \widetilde{c}_{11j}\psi_{i,j+1} + l_{11j}\psi_{i-1,j+1} + l_{21j}\psi_{i+1,j+1} + \\ & \quad + l_{31j}\psi_{i-1,j-1} + l_{41j}\psi_{i+1,j-1} - \omega_{ij}\nu_{ij} = F_{1ij}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \frac{\psi_{1ij}}{\tau} + \widetilde{a}_{11j}\psi_{1i,j-1} - \widetilde{b}_{11j}\psi_{1ij} + \widetilde{c}_{11j}\psi_{1i,j+1} + l_{11j}\psi_{i-1,j+1} + l_{21j}\psi_{i+1,j+1} + \\ & \quad + l_{31j}\psi_{i-1,j-1} + l_{41j}\psi_{i+1,j-1} - \omega_{ij}\nu_{ij} = F_{2ij}. \end{aligned}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} & -\widetilde{a}_{1j}(\alpha_i\psi_{1ij} + \beta_i) + \left(\widetilde{b}_{1j} + \frac{1}{\tau}\right)\psi_{1ij} - \widetilde{c}_{1j}\psi_{1i+1,j} = F_{1ij}, \\ & -\widetilde{a}_{11j}(\alpha_j\psi_{2ij} + \beta_j) + \left(\widetilde{b}_{11j} + \frac{1}{\tau}\right)\psi_{2ij} - \widetilde{c}_{11j}\psi_{2i,j+1} = F_{2ij}. \end{aligned}$$

Преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \psi_{1ij} &= \frac{\widetilde{c}_{1j}}{\widetilde{b}_{1j} - \widetilde{a}_{1j}\alpha_i} \psi_{i+1,j} + \frac{\widetilde{a}_{1j}\beta_i - F_{1ij}}{\widetilde{b}_{1j} - \widetilde{a}_{1j}\alpha_i}, \\ \psi_{2ij} &= \frac{\widetilde{c}_{11j}}{\widetilde{b}_{11j} - \widetilde{a}_{11j}\alpha_j} \psi_{i,j+1} + \frac{\widetilde{a}_{11j}\beta_j - F_{2ij}}{\widetilde{b}_{11j} - \widetilde{a}_{11j}\alpha_j}. \end{aligned}$$

Получим прогоночные коэффициенты для первого и второго уравнения

$$1) \alpha_{i+1} = \frac{\tilde{c}_{ij}}{\tilde{b}_{ij} - \tilde{a}_{ij}\alpha_i}; \beta_{i+1} = \frac{\tilde{a}_{ij}\beta_i - F_{1ij}}{\tilde{b}_{ij} - \tilde{a}_{ij}\alpha_i};$$

$$2) \alpha_{j+1} = \frac{\tilde{c}_{1ij}}{\tilde{b}_{1ij} - \tilde{a}_{1ij}\alpha_j}; \beta_{j+1} = \frac{\tilde{a}_{1ij}\beta_j - F_{2ij}}{\tilde{b}_{1ij} - \tilde{a}_{1ij}\alpha_j}.$$

В итоге получим соотношения для обратной прогонки:

$$\psi_{1ij} = \alpha_{i+1}\psi_{i+1,j} + \beta_{i+1},$$

$$\psi_{2ij} = \alpha_{j+1}\psi_{i,j+1} + \beta_{j+1}.$$

### 2.3. Результаты численных расчетов

Для рассмотренных численных схем разработана программа на языке Pascal в среде разработки Lazarus, которая является гибким инструментом для проведения научных исследований, поскольку позволяет производить расчеты при различных граничных условиях.

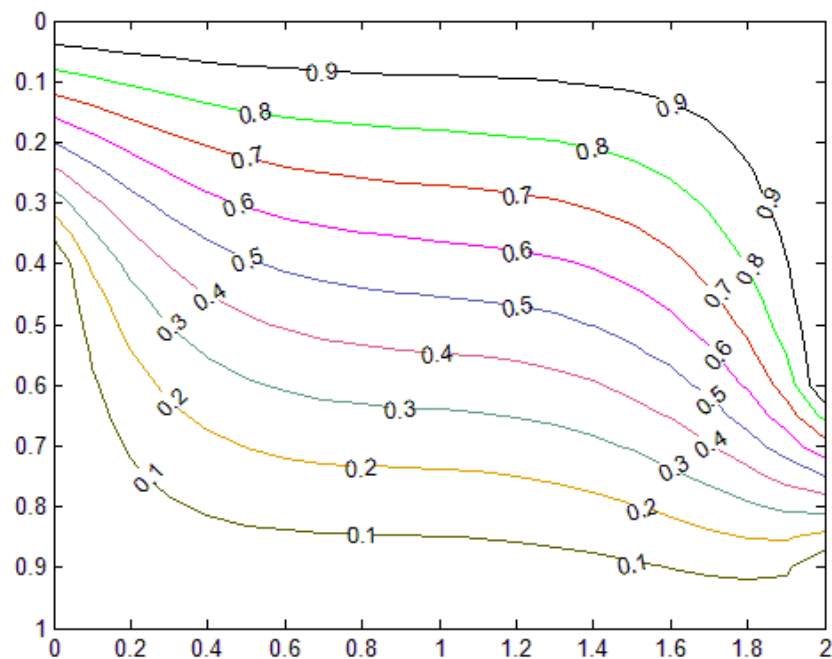


Рисунок 2.9. – Линии уровня тока Fr=0.7

Рассмотрим результаты тестовых расчетов при различных числах Фруда.

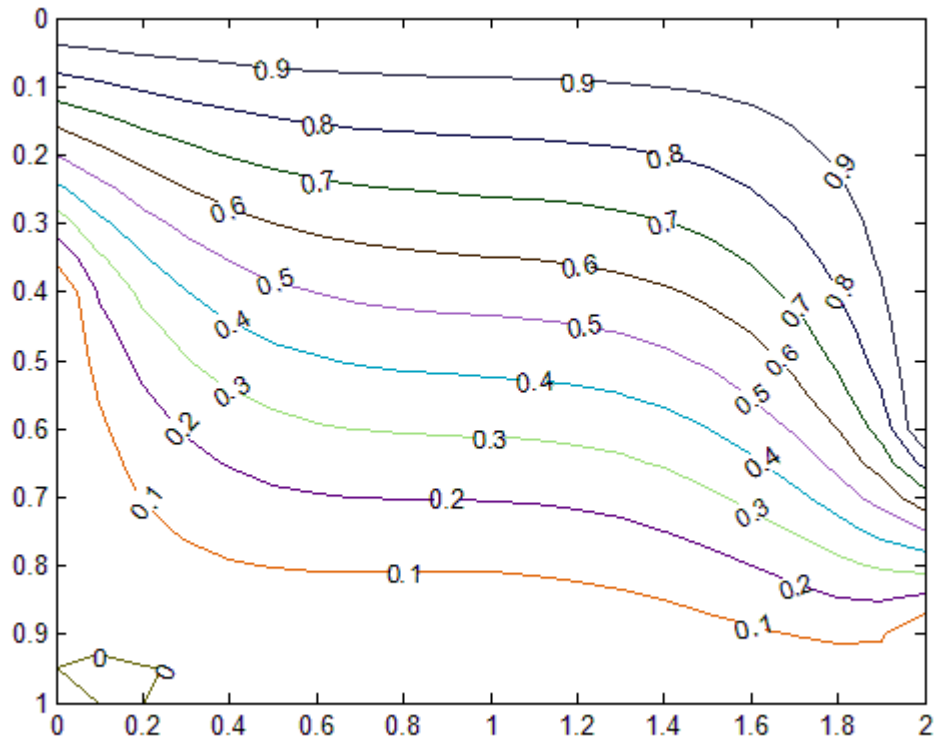


Рисунок 2.10. – Линии уровня тока  $Fr=0.6$

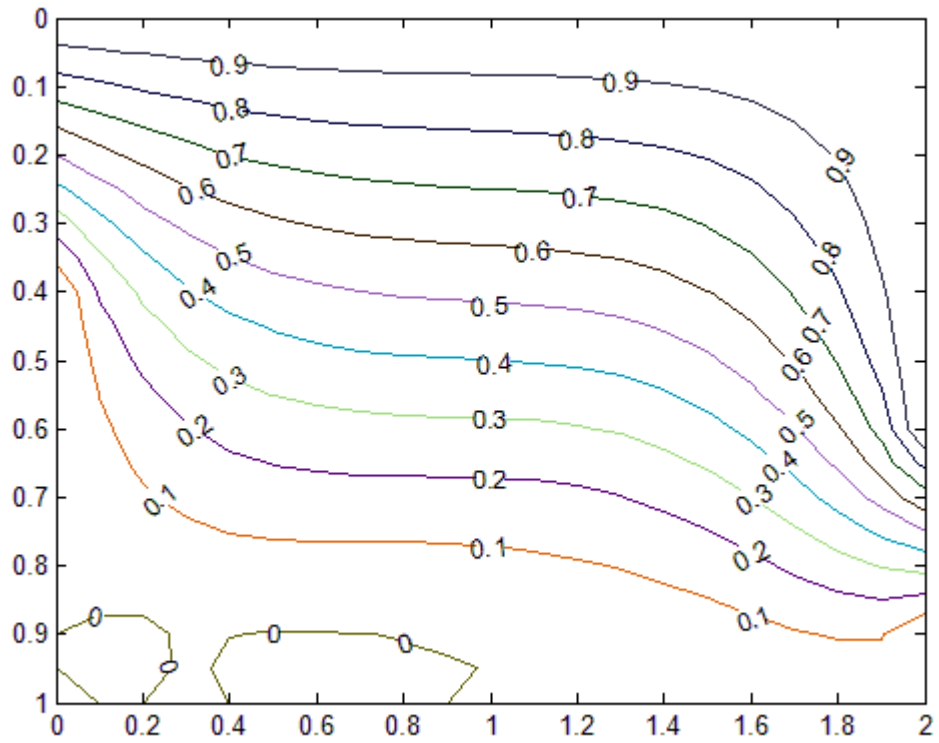


Рисунок 2.11. – Линии уровня тока  $Fr=0.5$



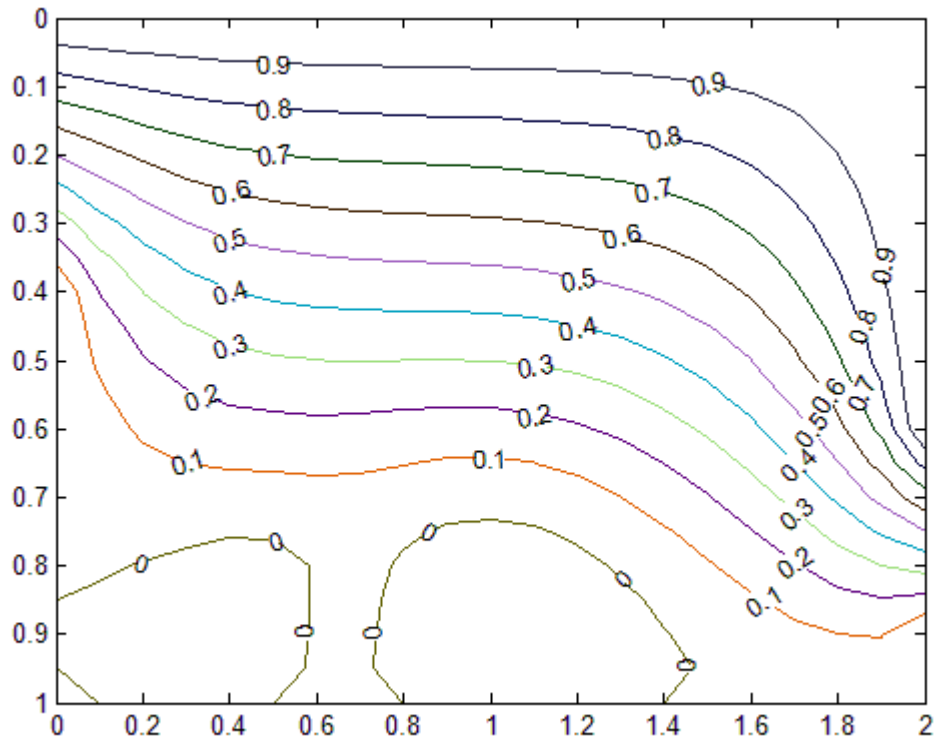


Рисунок 2.12. – Линии уровня тока  $Fr=0.4$

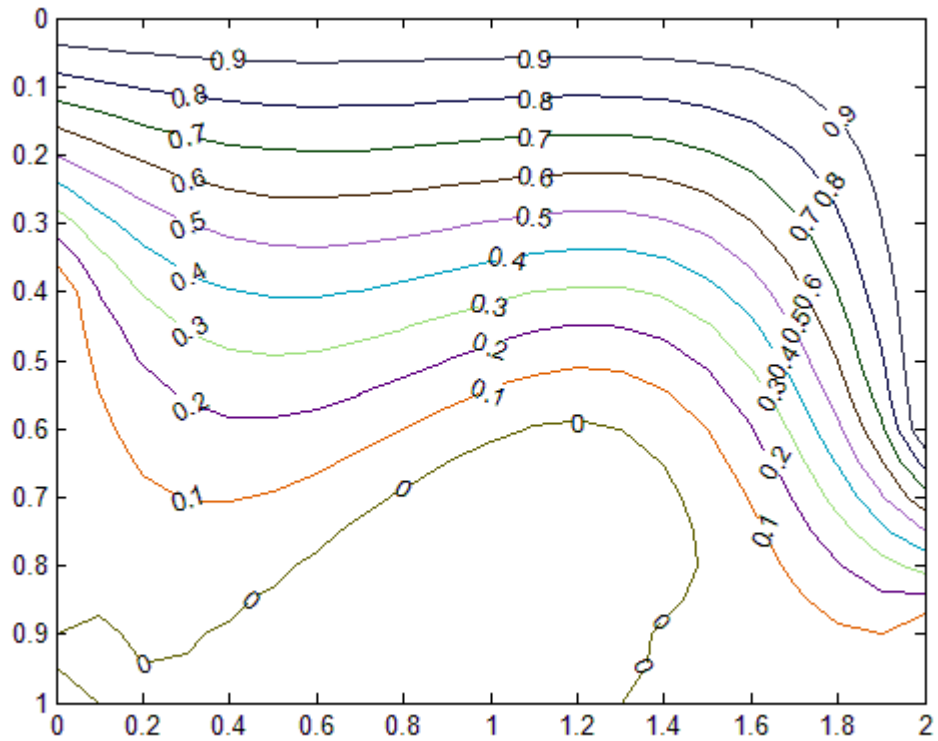


Рисунок 2.13. – Линии уровня тока  $Fr=0.3$

На рисунках 2.9 – 2.13 приведены линии тока. Плотностные числа Фруда

соответственно равны 0.7, 0.6, 0.5, 0.4, 0.3. Приведенные результаты демонстрируют влияние характера стратификации жидкости, втекающей в область, на структуру течения. При различных плотностях характер течений будет разным.

Предложенный численный метод представляет теоретический интерес, поскольку описывает типы течений, невозможные в отсутствие стратификации, а также имеет практическое значение, так как позволяет моделировать процессы, происходящие в стратифицированных проточных водоемах.

## Заключение

В результате выполнения магистерской диссертации достигнута цель исследования: построение и реализация разностных схем на криволинейных сетках и исследование характера течения в водоемах, и решены следующие задачи:

- изучены методы, с помощью которых аппроксимируются уравнения модели, описывающей течение стратифицированной жидкости;
- построена аппроксимация дифференциальных операторов конечноразностными схемами первого и второго порядка;
- создана программа для построения сеточной модели водоема и численного расчета характера течения стратифицированной жидкости в криволинейной области.

Приведена методика аппроксимации дифференциальных уравнений, содержащих первые и вторые производные. Данная методика применена для построения разностных схем для математической модели, описывающей движение стратифицированной жидкости. Составлена и отлажена программа численного решения полученной системы алгебраических уравнений (аппроксимирующей уравнения исходной математической модели).

Результаты исследования докладывались на следующих конференциях:

- III Региональной конференции студентов и молодых ученых “Мой выбор - НАУКА!”.
- IV Региональной конференции студентов и молодых ученых “Мой выбор - НАУКА!”.

## Библиографический список

1. Белолипецкий В.М., Костюк В.Ю., Шокин Ю.И. Математическое моделирование течений стратифицированной жидкости. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1991. – 176 с.
2. Белоцерковский О.М., Гуцин В.А. Моделирование некоторых течений вязкой жидкости. М, 1982. – 66 с.
3. Бетчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Наука, 1973. – 747 с.
4. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М., Наука, 1978. – 512 с.
5. Кузиков С.С., Папин А.А. Математическое моделирование гидродинамических процессов водохранилища. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2014. – 108 с.
6. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977. – 456 с.
7. Прайс Д. Программирование на языке Паскаль: Практическое руководство. – М.: Мир, 1987. – 232 с.
8. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: учебное пособие для вузов. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
9. Флетчер К., Вычислительные методы в динамике жидкостей: в 2-х томах: Т. 1; пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 504 с.
10. Черкасов М.А. Практический курс программирования на паскале. Учебное пособие. – М.: Изд-во МАИ, 2005. – 186 с.