является прямым произведением циклической группы $\langle b \rangle$ порядка $p^r - 1$ и группы $1+J$.

Теорема. Пусть R – конечное коммутативное локальное кольцо характеристики p,

$\dim_F J/J^2 = 2$, $\dim_F J^2/J^3 = 2$, $\dim_F J^3 = 1$, $J^4 = 0$.

Тогда

1) если $p = 2$, то $R^* \cong \mathbb{Z}_{2^r-1} \times \left(\mathbb{Z}_4^r\right)^2 \times \mathbb{Z}_2^r$ или $R^* \cong \mathbb{Z}_{2^r-1} \times \mathbb{Z}_4^r \times \left(\mathbb{Z}_2^r\right)^3$;

2) если $p = 3$, то $R^* \cong \mathbb{Z}_{3^r-1} \times \mathbb{Z}_9^r \times \left(\mathbb{Z}_3^r\right)^3$ или $R^* \cong \mathbb{Z}_{3^r-1} \times \left(\mathbb{Z}_3^r\right)^5$;

3) если $p > 3$, то $R^* \cong \mathbb{Z}_{p^r-1} \times \left(\mathbb{Z}_p^r\right)^5$.

Доказательство теорем основано на результатах классификации конечных локальных колец, полученных автором в работах [2, 3].

Библиографический список

1. Raghavedran R. Finite associative rings // Compositio Math. – 1969. – V. 21. – P. 195–229.

2. Журавлев Е.В. Локальные кольца порядка p^6 с 4-нильпотентным радикалом Джекобсона // Сибирские электронные математические известия [Электронный ресурс]. – 2006. – Т. 3. – С. 15–59. – Режим доступа: http://semr.math.nsc.ru.

3. Журавлев Е.В. О классификации некоторых классов конечных коммутативных локальных колец // Сибирские электронные математические известия [Электронный ресурс]. – 2015. – Т. 12. – С. 625–638. – Режим доступа: http://semr.math.nsc.ru.

УДК 512.552.12

О кольцах целых чисел квадратичных полей

Е.В. Журавлев, В.Н. Токарев
АлтГУ, г. Барнаул; АлтГТУ, г. Барнаул

Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}\left[\sqrt{n}\right] = \left\{a + b\sqrt{n} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$, где n – такое простое число, что $\mathbb{Z}\left[\sqrt{n}\right]$ – евклидово кольцо и в кольце $\mathbb{Z}$ разрешимо отрицательное уравнение Пелля $x^2 - y^2 n = -1$. Пусть $\mathbb{Z}^*\left[\sqrt{n}\right]$ – группа обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}^*\left[\sqrt{n}\right]$ и $\mathbb{Z}_m$ – кольцо классов вычетов по модулю m.

Теорема. Число π – простое в $\mathbb{Z}\left[\sqrt{n}\right]$ тогда и только тогда, когда оно имеет один из следующих видов:

1) $\pi = p\varepsilon$, где p – простое число в $\mathbb{Z}$, $p \neq 2$ и $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 (\operatorname{mod} p)$, $\varepsilon \in \mathbb{Z}^*\left[\sqrt{n}\right]$;

2) $\pi = 2\varepsilon$, где $\varepsilon \in \mathbb{Z}^*\left[\sqrt{n}\right]$ (только если $n \not\equiv -1 (\operatorname{mod} 8)$ и $n \neq 2$);

3) $\pi = (a + b\sqrt{n})\varepsilon$, где $a^2 - b^2 n = p$ – простое число в $\mathbb{Z}$, $p \neq 2$, $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 (\operatorname{mod} p)$, $\varepsilon \in \mathbb{Z}^*\left[\sqrt{n}\right]$;

4) $\pi = (c + d\sqrt{n})\varepsilon$, где $c^2 - d^2 n = 2$, $\varepsilon \in \mathbb{Z}^*\left[\sqrt{n}\right]$ (только если $n \equiv -1 (\operatorname{mod} 8)$);

5) $\pi = \sqrt{n}\varepsilon$, где $\varepsilon \in \mathbb{Z}^*\left[\sqrt{n}\right]$.

Теорема. Пусть $\sigma \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{n}\right]$. Тогда справедливы следующие разложения фактор-колец:

1) если $n \not\equiv -1 (\operatorname{mod} 8)$ и $n \neq 2$, то

$$\mathbb{Z}\left[\sqrt{n}\right] / \langle \sigma \rangle \cong \bigoplus_{i=1}^{k_1} \mathbb{Z}_{p_i^{u_i}}\left[\sqrt{n}\right] \bigoplus_{i=1}^{k_2} \mathbb{Z}_{q_i^{v_i}} \oplus \mathbb{Z}_{2^m}\left[\sqrt{n}\right] \oplus \mathbb{Z}_{n^k}\left[\sqrt{n}\right]$$

или

$$\mathbb{Z}\left[\sqrt{n}\right] / \langle \sigma \rangle \cong \bigoplus_{i=1}^{k_1} \mathbb{Z}_{p_i^{u_i}}\left[\sqrt{n}\right] \bigoplus_{i=1}^{k_2} \mathbb{Z}_{q_i^{v_i}} \oplus \mathbb{Z}_{2^m}\left[\sqrt{n}\right] \oplus \mathbb{Z}[x] / \left\langle x^2 - n, n^k x \right\rangle;$$

2) если $n \equiv -1 (\operatorname{mod} 8)$ или $n = 2$, то

$$\mathbb{Z}\left[\sqrt{n}\right] / \langle \sigma \rangle \cong \bigoplus_{i=1}^{k_1} \mathbb{Z}_{p_i^{u_i}}\left[\sqrt{n}\right] \bigoplus_{i=1}^{k_2} \mathbb{Z}_{q_i^{v_i}} \bigoplus_{i=1}^{k_3} \mathbb{Z}_{2^{w_i}} \oplus \mathbb{Z}_{n^k}\left[\sqrt{n}\right]$$

или

$$\mathbb{Z}\left[\sqrt{n}\right] / \langle \sigma \rangle \cong \bigoplus_{i=1}^{k_1} \mathbb{Z}_{p_i^{u_i}}\left[\sqrt{n}\right] \bigoplus_{i=1}^{k_2} \mathbb{Z}_{q_i^{v_i}} \bigoplus_{i=1}^{k_3} \mathbb{Z}_{2^{w_i}} \oplus \mathbb{Z}[x] / \left\langle x^2 - n, n^k x \right\rangle.$$

где $k, k_1, k_2, k_3, u_i, v_i, w_i, m$ – неотрицательные целые числа, p_i – простые целые числа, $p_i \neq 2$, $n^{\frac{p_i-1}{2}} \equiv -1 (\mathrm{mod}\, p_i)$, $a_i^2 - b_i^2 n = q_i$ – простые целые числа, $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, $q_i \neq 2$, $n^{\frac{q_i-1}{2}} \equiv -1 (\mathrm{mod}\, q_i)$.

Библиографический список

1. Журавлев Е.В., Токарев В.Н. Кольца целых чисел квадратичных полей // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. – Барнаул. Изд-во АлтГУ, 2016. – С. 48–71.

УДК 512.552.4

Обобщение гипотезы Мохаррама Хана

А.В. Кислицин, Ю.А. Павлюк
АлтГПУ, г. Барнаул

На протяжении работы R обозначает ассоциативное кольцо с единицей, $Z(R)$ – его центр.

Основываясь на результатах Джекобсона, Херстейна, МакХэйла, Томинаги [1], Мохаррам Хан выдвинул гипотезу: пусть R – ассоциативное кольцо с единицей, f и g – автоморфизмы R, $n > 1$ – фиксированное целое; если $f(x^{n+1}) \pm g(x^n) \in Z(R)$ для всех $x \in R$, то R коммутативно [1].

В работе [1] удалось получить положительный ответ на эту гипотезу при $n = 2, 3, 4$ и при ограничениях на f и g. В работе [3] получен положительный ответ на гипотезу Хана при $n = 7, 8$, а также при ограничениях на кручение кольца.

Таким образом гипотеза М. Хана справедлива при $n = 2, 3, 4, 7, 8$, а также для колец без 2-кручения при $n = 1, 5, 6$ [1, 2]. Дальнейшие исследования показали справедливость утверждения более сильного, чем выдвинутая гипотеза. А именно, имеет место следующее утверждение [3].

Теорема 1. Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей, α и β – автоморфизмы R и найдётся целое $n > 1$ такое, что для всех $x \in R$ выполняется $\alpha(x^{n+1}) \pm \beta(x^n) \in Z(R)$. Тогда $2x \in Z(R)$. В частности, если кольцо R без 2-кручения, то оно коммутативно.

В настоящей работе условие гипотезы М. Хана обобщается до следующего: $\alpha(x^{n+2}) + \beta(x^{n+1}) + \gamma(x^n) \in Z(R)$ для всех $x \in R$, фиксированного целого $n > 1$ и некоторых автоморфизмов α, β и γ кольца R.