14. Воеводин А.Ф., Шугрин С.М. Методы решения одномерных эволюционных систем. – Новосибирск: Наука, 1993.

15. Кузиков С.С. К методам решения обратных задач трансзвуковой газовой динамики // Известия АлтГУ. – 2010. – №1(65).

**УДК 517.95, 532.51**

## Точные решения нестационарных уравнений вязкоупругой жидкости Максвелла

***С.В. Мелешко[1], Н.П. Мошкин[2,3], В.В. Пухначев[2,3]***

*[1]ТУ Суранари, г. Накхон-Ратчасима, Таиланд;*

*[2]ИГ им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск;*

*[3]НГУ, г. Новосибирск*

В докладе представлены точные решения нестационарных двумерных уравнений несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла. Среда характеризуется постоянными временем релаксации $\tau$, плотностью $\rho$ и вязкостью $\mu$. В качестве объективной производной в реологическом соотношении выбирается верхняя конвективная производная [1]. Уравнения записаны в лагранжевых переменных и найдено точное решения задачи около критической точки встречных потоков.

Система уравнений движения состоит из шести квазилинейных дифференциальных уравнений 1-го порядка, имеющей как вещественные, так и комплексные характеристики [2]. Неизвестными функциями являются горизонтальная $u$ и вертикальная $v$ компоненты скорости, давление $p$ и элементы тензора вязкоупругих напряжений $S_{xx} = A$, $S_{xy} = S_{yx} = B$, $S_{yy} = C$.

$$\rho\left(u_t + uu_x + uu_y\right) = -p_x + A_x + B_y,$$

$$\rho\left(v_t + uv_x + vv_y\right) = -p_y + B_x + C_y,\ u_x + v_y = 0,$$

$$A_t + uA_x + vA_y - 2\left(Au_x + Bu_y\right) + \tau^{-1}A = 2\mu\tau^{-1}u_x, \tag{1}$$

$$B_t + uB_x + vB_y - Av_x - Cu_y + \tau^{-1}B = 2\mu\tau^{-1}\left(u_y + v_x\right),$$

$$C_t + uC_x + vC_y - 2\left(Bv_x + Cv_y\right) + \tau^{-1}C = 2\mu\tau^{-1}v_y.$$

На основе теоретико-группового анализа в работе [3] выписаны гиперболические подмодели несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла (1). С их помощью изучена задача о слоистом течении между

параллельными пластинами (аналог классического течения Куэтта в динамике вязкой несжимаемой жидкости). Решения системы (1), построенные в [2, 3], являются эффективно одномерными.

Система (1) допускает двухпараметрическую группу операторов переноса и галилеева переноса по оси $x$. Ей соответствует частично инвариантное решение ранга два $u = xf_y(y,t), \quad v = -f(y,t)$

Интересно рассмотреь случай $f(t,y) = yf_1(t) + f_0(t)$. Функции $A(t,x,y)$, $B(t,x,y)$ и $C(t,x,y)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\tau\left(A_t + A_x xf_1 - A_y(f_0 + f_1 y)\right) + A(1 - 2\alpha\tau f_1) - 2\mu f_1 = 0, \tag{2}$$

$$\tau\left(2B_t + 2B_x xf_1 - 2B_y(f_0 + f_1 y)\right) + 2B = 0, \tag{3}$$

$$\tau\left(C_t + C_x \tau xf_1 - C_y \tau(f_0 + f_1 y)\right) + C(1 + 2\alpha\tau f_1) + 2\mu f_1 = 0. \tag{4}$$

Также необходимо требовать выполнения условие совместности, $A_{xy} - B_{xx} + B_{yy} - C_{xy} = 0,$ из которого следует, что $B = g_{xy}, \quad C = A - g_{xx} + g_{yy},$ где $g(t,x,y)$ некотороя функция. Уравнение (3) можно проинтегрировать по $x, y$

$g_t + g_x xf_1 - g_y(f_0 + f_1 y) + \tilde{g}_1 + \tilde{g}_2 + \tau^{-1} g = 0,$ при этом (4) примет вид

$$2g_{xx}\tau f_1(1-\alpha) + 2g_{yy}\tau f_1(1+\alpha) + 4\mu f_1 + \tau(\tilde{g}_{1xx} - \tilde{g}_{2yy}) = 0, \tag{5}$$

где $\tilde{g}_1(t,x)$, $\tilde{g}_2(t,y)$ произвольные функции интегрирования. При $\alpha = \pm 1$ (верхняя или нижняя конвективные производные) получим

$$A = \frac{\alpha}{4}\left(2g_{xx}(\alpha - 1) - 2g_{yy}(\alpha + 1) + f_1^{-1}(\tilde{g}_{2yy} - \tilde{g}_{1xx})\right) - \alpha\frac{\mu}{\tau}$$

Используя последнее равенство, перепишем уравнение (2)

$$4\tau f_1^2(1-\alpha^2)(g_{xx} - g_{yy}) - \tau\left(\tilde{g}_{1txx} + \tilde{g}_{1xxx} xf_1 - \tilde{g}_{1xx} f_1^{-1}\left((f_1' + 2f_1^2) - f_1\tau^{-1}\right)\right)$$
$$+\tau\left(\tilde{g}_{2tyy} - \tilde{g}_{2yyy}(f_0 + f_1 y) - \tilde{g}_{2yy} f_1^{-1}\left((f_1' - 2f_1^2) - f_1\tau^{-1}\right)\right) - 4\tau^{-1}\mu f_1 = 0$$

Последнее уравнение при $\alpha^2 = 1$ упрощается

$$\tilde{g}_{1txx} + \tilde{g}_{1xxx} xf_1 - \tilde{g}_{1xx} f_1^{-1}\left((f_1' + 2f_1^2) - f_1\tau^{-1}\right) - \tilde{g}_{2tyy}$$
$$+\tilde{g}_{2yyy}(f_0 + f_1 y) + \tilde{g}_{2yy} f_1^{-1}\left((f_1' - 2f_1^2) - f_1\tau^{-1}\right) + 4\tau^{-2}\mu f_1 = 0$$

и может быть явно проинтегрировано

$$A=\frac{1}{8}e^{-t\tau^{-1}}\left(4H_{z_1z_1}\psi^{-2}(1-\alpha)-4H_{z_2z_2}\psi^{2}(1+\alpha)-g_1\psi^{2}(\alpha+1)\right.$$

$$\left.+g_2\psi^{-2}(\alpha-1)+8\psi^{2\alpha}q_1\right),\qquad B=e^{-t\tau^{-1}}H_{z_1z_2},$$

$$C=\frac{1}{8}e^{-t\tau^{-1}}\left(-4H_{z_1z_1}\psi^{-2}(\alpha+1)+4H_{z_2z_2}\psi^{2}(1-\alpha)-8\psi^{2\alpha}q_1\right.$$

$$\left.+g_1\psi^{2}(1-\alpha)+g_2\psi^{-2}(1+\alpha)-16\psi^{-2\alpha}q_2\right),$$

где $q_1'=2\dfrac{\mu}{\tau}e^{t\tau^{-1}}\dfrac{\psi'}{\psi^{2\alpha+1}}$, $q_2'=-2\alpha\psi^{4\alpha-1}q_1\psi'$.

Здесь использованы обозначения $z_1=x\psi^{-1}$, $z_2=y\psi+\varphi$, $f_0=\varphi'\psi^{-1}$, $f_1=\psi'\psi^{-1}$, а $H(z_1,z_2)$ произвольная функция.

Рассмотрим случай, когда функция $C$ не зависит от $x$, функция $B$ линейна по $x$, а функции $p$ и $A$ квадратичны по $x$, $A(t,x,y)=x^2a(y,t)+d(y,t)$, $B(t,x,y)=xb(y,t)$, $C(t,y)=c(t,y)$, $p=x^2P(y,t)+Q(y,t)$. Система определяющих уравнений после перехода к лагранжевым координатам сводится к слабо нелинейной симметрической гиперболической системе и квадратуре. Этот переход выполняется с помощью решения задачи Коши $y_t=v(y,t)$, $t>0$; $y=\xi$, $t=0$. В системе появляется дополнительная искомая функция $y_\xi=z$, удовлетворяющая уравнению в вариациях $z_t=wz$, где обозначено $w(\xi,t)=v_y[y(\xi,t),t]$. Обозначим далее $a=f(\xi,t)$, $b=g(\xi,t)$, $c=h(\xi,t)$. Вместо $f$ удобно ввести новую функции $r=f+\mu\tau^{-1}$. В результате получается система пяти квазилинейных уравнений

$$\begin{aligned}&w_t+z^{-1}g_\xi=w^2-2h-\varphi(t),\ g_t+z^{-1}rw_\xi=(w-W_i^{-1})g,\\&h_t+2z^{-1}gw_\xi=-W_i^{-1}h,\ r_t=(2w-W_i^{-1})r+\tau^{-2},\ \ z_t=wz.\end{aligned}\tag{6}$$

Здесь $W_i$ безразмерное число Вайсенберга (критерий подобия, характеризующий вязкоупругое течение и выражающийся как соотношение между временем релаксации и сдвиговой скоростью). После решения (6) и возвращения к эйлеровым координатам функции $P$, $Q$ находятся в квадратурах, а функция $d$ определяется из линейного уравнения первого порядка.

Прямая проверка показывает, что система (6) имеет решения, в которых функции $w, h, r, z$ не зависят от $\xi$, а $g = \xi s(t)$. В этом случае система (2) принимает вид:

$$\frac{dw}{dt} + z^{-1}s = w^2 - 2h - \varphi(t), \quad \frac{ds}{dt} = (w - W_i^{-1})s,$$
$$\frac{dh}{dt} = -W_i^{-1}h, \ \frac{dr}{dt} = (2w - W_i^{-1})r + W_i^{-2}, \quad \frac{dz}{dt} = wz. \tag{7}$$

Третье уравнение (7) интегрируется $h = c_1 \exp(-t / W_i)$. Видно, что все уравнения системы (7), кроме первого линейные относительно искомых функций, легко решаются, если найдена функция $w$. Более того, функция $s$, входящая в первое уравнение системы (7), может быть из него исключена используя подстановку $s = zh$. Первое уравнение сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка $\frac{dw}{dt} = w^2 - 3h - \varphi(t)$. Отметим случай, когда $\varphi(t) = -3h = -3c_1 \exp(-t / W_i)$. Можно выбрать константу $c_1 = 1$. В этом случае $w(t) = -(t + c_4)^{-1}$. Зная $w(t)$ можно найти $z$ и $s$ в явном виде, $z(t) = (t + c_4)^{-1}$, $s(t) = zh$, В начальный момент $z(0) = 1$, следовательно $c_4 = 1$. Линейное уравнение для $r(t)$ решается явно

$$r(t) = \frac{2W_i}{(t+1)^2} - \frac{2}{(t+1)} + c_6 \frac{\exp\left(-tW_i^{-1}\right)}{(t+1)^2} + W_i^{-1}.$$

Вернемся к Эйлеровым координатам

$$v = \int_0^y w(t)ds = -y(t+1)^{-1}; \quad u = -xv_y = x(t+1)^{-1},$$

$$y(t+1) = \xi; \ g = \xi s(t) = y \exp\left(-tW_i^{-1}\right), \quad a(t) = \exp\left(-tW_i^{-1}\right).$$

Функцию $d(t)$ можно найти, решая линейное уравнение первого порядка

$$d(t, y) = \frac{\left\{-e^{-W_i^{-1}} y^{-2} Ei(1, -\frac{1}{yW_i}) + W_i \left[ c_7 W_i^2 y^{-2} - (\frac{1}{y} + W_i) e^{tW_i^{-1}} \right]\right\} e^{-tW_i^{-1}}}{W_i^3},$$

где $Ei(a, z) = \int_1^\infty e^{-kz} k^{-a} dk$ экспоненциальный интеграл, $c_7$ произвольная константа. Окончательно получаем следующее решение

$$v = -y(t+1)^{-1}, \quad u = x(t+1)^{-1};$$

$$A = S_{xx} = x^2 a(t) + d(t) = x^2 h(t) + d(t) = x^2 \exp\left(-tW_i^{-1}\right) + d(t);$$

$$B = S_{xy}(t,x,y) = xb(t,y) = x\xi g(t) = xy \exp\left(-tW_i^{-1}\right);$$

$$C = S_{yy}(t) = c(t) = f(t) = \left[2\left(W_i - (t+1)\right) + c_6 \exp\left(-tW_i^{-1}\right)\right](t+1)^{-2}$$

Давление восстанавливается с помощью квадратур

$$p(t,x,y) = \frac{1}{2}\frac{(x^2+y^2)(t+1)^2 exp(-tW_i^{-1}) - (1+y)x^2 - 3y^2}{(t+1)^2}.$$

*Работа поддержана грантом Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ НШ-8146.2016.1 и грантом РФФИ (проект 16-01-00127).*

**Библиографический список**

1. Астарита Дж., Марручи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. – М.: Мир, 1978. – 312 с.

2. Пухначев В.В. Математическая модель несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // ПМТФ. – 2010. – Т. 51, №4. – С. 116–126.

3. Ляпидевский В.Ю., Пухначев В.В. Гиперболические подмодели несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // Современные проблемы механики: сборник статей к 80-летию со дня рождения академика А.Г. Куликовского, Тр. МИАН, 281, МАИК, М., 2013, 84–97.

**УДК 517.958**

## Разрешимость задачи фильтрации в пороупругой среде в классе непрерывных функций

***А.А. Папин, М.А. Токарева***
*АлтГУ, г. Барнаул*

**Постановка задачи**

В работе рассматривается математическая модель фильтрации жидкости в пороупругой среде. В предположении, что пороупругая среда обладает преимущественно вязкими свойствами, данный процесс может быть описан следующим нелинейным уравнением для пористости $\varphi$ [1, 2, 3]

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varphi}{1-\varphi}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(\varphi)\left((1-\varphi)\frac{\partial^2 G(\varphi)}{\partial x \partial t} - g(\rho_{tot} + \rho_f)\right)\right), \tag{1}$$