УДК 51:37

Геометрические интерпретации в алгебре и анализе

Е.А. Плотникова, А.Н. Саженков
НГТУ, г. Новосибирск, АлтГУ, г. Барнаул

Практические занятия по математическим дисциплинам должны вооружать студентов математическими знаниями, навыками и умениями достаточными для решения широкого круга прикладных задач, возникающих как в математических, так и в технических и экономических дисциплинах [1–3].

Важно продумать изучение математической дисциплины так, чтобы оно происходило интересно, содержание практических занятий было наглядным и, тем самым, будило мысль. В математических курсах практически всегда к решению задач можно привлечь геометрическую интерпретацию либо условий задачи, либо процесса её решения, что, за счёт наглядности, даёт возможность повышения эффективности обучения математике.

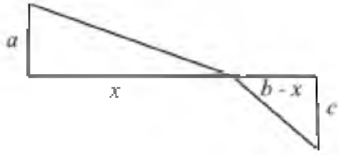
При наличии у преподавателя определённого набора демонстрационных задач-примеров он становится вооружённым для продуктивной работы со студентами.

Так в курсе математического анализа геометрическое иллюстрирование бывает весьма полезно при решении экстремальных задач как с функциями одной, так и многих переменных (и на безусловные и на условные экстремумы). Такая интерпретация условий и наглядное геометрическое решение позволяют осуществить простую проверку справедливости решений, проведённых с помощью дифференциального аппарата математического анализа [4–7].

Столь же наглядными могут быть и решения алгебраических задач с неравенствами, с системами уравнений и др.

Приведём далее несколько лаконичных демонстрационных примеров, почерпнутых из различных учебных источников.

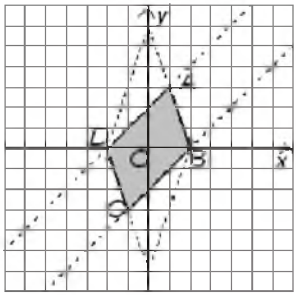
1. Найдите наименьшее значение функции $f(x)=\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{(b-x)^2+c^2}$, где a, b, c – положительные числа.



Ответ: $\sqrt{(a+c)^2+b^2}$. Функция $f(x)$ выражает длину ломаной. Ясно, что $f(x)$ принимает наименьшее значение, если ломаная становится отрезком. В этом случае значение функции совпадает с длиной гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами $a + c$ и b.

2. Известно, что $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+z=1$. Какое минимальное значение может принимать выражение $x^2 + y^2 + z^2$?

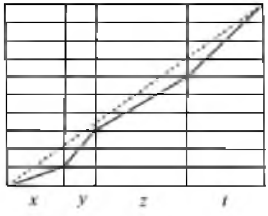
Ответ: 144/169. Рассмотрим прямоугольную систему координат в пространстве. Проведем плоскость α, заданную уравнением $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+z=1$. Выражение $x^2 + y^2 + z^2$ равно квадрату расстояния от начала координат O до точки с координатами (x, y, z). Минимальное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$ при условии $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+z=1$ достигается тогда, когда точка (x, y, z) является основанием перпендикуляра, опущенного из O на плоскость α, и равно квадрату расстояния от O до плоскости α. Расстояние от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ можно вычислить по известной формуле: $\rho(M,\alpha)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. В результате получаем $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+1}}=\frac{12}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}}=\frac{12}{13}$.



3. Найдите наибольшее значение выражения $x^2 + y^2$, если $|x - y| \le 2$ и $|3x + y| \le 6$.

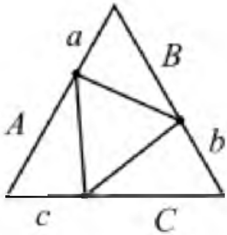
Рассмотрим пары (x, y) как координаты точек. Система неравенств $|x - y| \le 2$ и $|3x + y| \le 6$ определяет множество точек, контур которых – параллелограмм. При этом центр параллелограмма совпадает с началом координат. Наиболее удаленной точкой от центра является вершина параллелограмма (две). Ясно, что $OA^2 = 1^2+3^2=10$.

4. Найдите наименьшее возможное значение выражения: $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+4}+\sqrt{z^2+9}+\sqrt{t^2+16}$, при условии $x + y + z + t = 17$.



Ответ: $\sqrt{389}$. Всевозможные значения выражения соответствуют длинам ломаных, изображенных на рисунке. Минимальное значение – это длина диагонали прямоугольника 17×10, т.е. $\sqrt{389}$. В этом случае $x = 17/10$, $y = 2\cdot 17/10$, $z = 3\cdot 17/10$, $t = 4\cdot 17/10$.

5. Пусть a, b, c, A, B, C положительные числа, причем $a + A = b + B = c + C = k$. Докажите, что $aB + bC + cA \le k^2$.



Рассмотрим правильный треугольник PQR со стороной k. Отметим так на его сторонах точки как показано на рисунке. Тогда

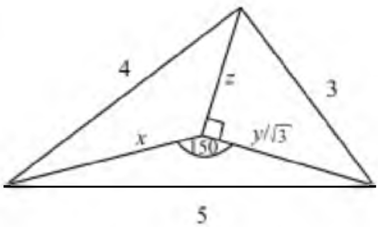
$$(aB + bC + cA)\cdot\sin 60^\circ =$$

$$2\left(S_{KQL} + S_{LRM} + S_{MPK}\right) < 2S_{PQR} = k^2\cdot\sin 60.$$

Здесь неравенство выполнено, поскольку треугольники не пересекаются между собой. Сокращая на $\sin 60^\circ$, получаем требуемое неравенство.

6. Пусть $x, y, z > 0$ и $\begin{cases} x^2 + xy + \dfrac{y^2}{3} = 25 \\ \dfrac{y^2}{3} + z^2 = 9 \\ z^2 + zx + x^2 = 16 \end{cases}$. Найдите $xy + 2yz + 3zx$.

Ответ: $24\sqrt{3}$. Первое соотношение системы можно трактовать как теорему косинусов для треугольника со сторонами x, $y/\sqrt{3}$, 5 и углом 150 градусов между x и $y/\sqrt{3}$. Второе – как теорему Пифагора для треугольника с катетами $y/\sqrt{3}$ и z и гипотенузой 3. Третье – как теорему косинусов для треугольника со сторонами x, z, 4 и углом 120 градусов между x и z. Сумма рассмотренных углов равна 150° + 90° + 120° = 360°. Это позволяет сделать геометрическую интерпретацию. Теперь найдем сумму площадей трех треугольников:



$$\frac{1}{2}\left(x\cdot\frac{y}{\sqrt{3}}\cdot\sin 150^\circ+\frac{y}{\sqrt{3}}\cdot z+z\cdot x\cdot\sin 120^\circ\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(x\cdot\frac{y}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}+\frac{y}{\sqrt{3}}\cdot z+z\cdot x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{4\sqrt{3}}\left(xy+2yz+3zx\right).$$

С другой стороны, эта площадь большого треугольника – она равна 6. Значит, $xy+2yz+3zx=24\sqrt{3}$.

Библиографический список

1. Плотникова Е.А., Саженкова Е.В. О формировании системы задач в курсе «Высшая математика» в техническом и экономическом вузах // Ломоносовские чтения на Алтае: сборник научных статей международной школы-семинара, Барнаул; 8-11 ноября 2011г. – Барнаул: АлтГПА, 2011. – Ч. III.

2. Плотникова Е.А., Саженкова Т.В. О преемственности в преподавании математических дисциплин // Ломоносовские чтения на Алтае: сборник научных статей международной школы-семинара, Барнаул; 2013г. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2013.

3. Плотникова Е.А., Саженкова Е.В. О методическом оснащении практических занятий по курсу «Высшая математика» // Сборник трудов всероссийской конференции по математике МАК 2014. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2014.

4. Плотникова Е.А., Саженков А.Н., Саженкова Т.В. Геометрия комплексной плоскости как ключ решения геометрических задач // Сборник трудов всероссийской конференции по математике МАК 2012. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2012.

5. Саженков А.Н., Саженкова Т.В. Математическое творчество: классические олимпиадные темы и задачи высокого уровня сложности // Сборник научных статей международной школы-семинара «Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования». – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2015.

6. Саженков А.Н., Саженкова Т.В. О некоторых содержательных аспектах воспитания математической культуры у учащихся и студентов // Сборник трудов всероссийской конференции по математике МАК 2016. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2016.

7. Саженков А.Н. Геометрия и анализ в задачах математических олимпиад // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2013.