УДК 574.34:575.174.4

# Модельный анализ влияния оптимального промысла с постоянной долей изъятия на менделевскую лимитированную популяцию

*Е.А. Колбина[1], Е.Я. Фрисман[2]*
*[1]Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток;*
*[2]Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН, г. Биробиджан*

Целью работы является описание и исследование наиболее простой модельной ситуации, в которой проявляются закономерности взаимосвязанных изменений динамики генетической структуры и численности популяций, вызванных взаимодействием эволюционных (в основном селективных) и экологических (ограничивающих популяционный рост) факторов, включая эффекты промыслового воздействия на эксплуатируемые популяции. В качестве такой модельной системы рассматривается диплоидная менделевская панмиктичная популяция, генетическое разнообразие в которой контролируется одним диаллельным локусом, экологическое лимитирование сводится к убывающей зависимости приспособленности от численности, а воздействие промысла – к изъятию части особей.

Введем обозначения: $x_n$ – численность популяции в n-ом поколении, $q_n$ – частота аллеля A в n-ом поколении (следовательно, $(1 - q_n)$ – частота аллеля a), $W_{AA}(n)$, $W_{Aa}(n)$, $W_{aa}(n)$ – приспособленности генотипов AA, Aa, aa – соответственно в n-ом поколении. Изменение численности и генетической структуры популяции описывается следующей системой рекуррентных уравнений [1]:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \overline{W}_n(x_n)x_n \\ q_{n+1} = q_n\left(W_{AA}(x_n)q_n + W_{Aa}(x_n)(1-q_n)\right)/\overline{W}_n(x_n), \end{cases} \qquad (1)$$

где $\overline{W}_n = W_{AA}(x_n)q_n^2 + 2W_{Aa}(x_n)q_n(1-q_n) + W_{aa}(x_n)(1-q_n)^2$ – средняя приспособленность популяции в n-ом поколении. Будем полагать, что приспособленности зависят от численности линейно $W_{ij} = 1 + R_{ij} - \dfrac{R_{ij}}{K_{ij}}x.$

Соответственно каждый генотип характеризует его ресурсный ($K_{ij}$) и мальтузианский ($R_{ij}$) параметры. Для упрощения выкладок, введем дополнительное предположение, что все генотипы имеют одинаковую приспособленность при некотором значении численности популяции (равном x*).

Условия существования и разрушения генетического полиморфизма модели (1), а так же результаты исследования ее динамического поведения приведены в работах [2] и [3].

Введем в модель (1) промысел с долей изъятия u:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \overline{W}_n (1-u) \\ q_{n+1} = q_n \left( W_{AA} q_n + W_{Aa}(1-q_n) \right) / \overline{W}_n, \end{cases} \tag{2}$$

где $\overline{W}_n = W_{AA} q_n^2 + 2W_{Aa} q_n (1-q_n) + W_{aa}(1-q_n)^2$, $R = U x_n \overline{W}_n$ – величина изъятия.

Оптимальный равновесный уровень численности $\overline{x}_M$, обеспечивающий максимальный равновесный уровень изъятия, однозначно определяется уравнением $\overline{W} = 1 - \overline{x}_M \cdot \overline{W}'_x$. Оптимальная доля изъятия (в относительных единицах численности) имеет вид

$$U_0 = 1 - \frac{1}{\overline{\overline{W}}} = \frac{-\overline{x}_M \cdot \overline{W}'_x}{1 - \overline{x}_M \cdot \overline{W}'_x}$$

Найдены равновесные значения численности и частоты аллеля A модели (2), обеспечивающие максимальный объем изъятия [4, 5]. Определены условия их существования и устойчивости при постоянной доле изъятия (таблица 1).

Показано, что в состоянии, обеспечивающем максимальный уровень изъятия, значение генетического состава остается таким же, как и в случае, когда промысел отсутствует, а равновесное значение численности снижается в два раза. Также показано, что при линейном виде функций приспособленностей и при описанных соотношениях параметров модели в равновесии генетический состав популяции не зависит от ее численности. Показано, что условия существования равновесных значений в целом при отсутствии промысла и при его воздействии одинаковы.

Таблица 1 – Равновесные точки модели, подверженной промыслу с постоянной долей изъятия, условия их существования и устойчивости

| | |
|---|---|
| Ia) $x^* < K_{Aa} < K_{AA}$, $x^* < K_{Aa} < K_{aa}$ | Если $x^* < \bar{x}_M$, то при постоянной доле изъятия мономорфные состояния устойчивы при любых параметрах модели. Полиморфное состояние неустойчиво. Если $x^* > \bar{x}_M$, то мономорфные состояния неустойчивы; полиморфное состояние устойчиво при любых параметрах системы. |
| Ib) $K_{Aa} < K_{AA} < x^*$ $K_{Aa} < K_{aa} < x^*$ | Если $x^* > \bar{x}_M$, то мономорфные состояния устойчивы. Полиморфное состояние неустойчиво. |
| II) $K_{aa} < K_{Aa} < K_{AA}$ или $K_{AA} < K_{Aa} < K_{aa}$ | Полиморфное состояние не существует. Если $\bar{x}_M$ и ресурсные параметры находятся по одну сторону от x*, то устойчиво то мономорфное состояние, ресурсный параметр которого больше. Если $\bar{x}_M < x^*$, а ресурсные параметры $> x^*$, то устойчиво то мономорфное состояние, ресурсный параметр которого минимален. |
| IIIa) $K_{Aa} > K_{AA} > x^*$ $K_{Aa} > K_{aa} > x^*$ | Если $x^* < \bar{x}_M$, то полиморфное состояние устойчиво. Мономорфные состояния неустойчивы. Если $x^* > \bar{x}_M$, полиморфное состояние неустойчиво, мономорфные состояния устойчивы. |
| IIIb) $x^* > K_{Aa} > K_{AA}$ $x^* > K_{Aa} > K_{aa}$ | Если $x^* > \bar{x}_M$, то полиморфное состояние устойчиво. Мономорфные состояния неустойчивы. |

Численное исследование влияния промысла с постоянной долей изъятия на динамику популяции показало, что промысел при любой оптимальной доле изъятия ведет к стабилизации численности и частоты аллеля А. Если в популяции в отсутствие промысла наблюдаются колебания численности и генетического состава (рисунок 1), то промысел при любом равновесном состоянии (даже без изменения типа отбора) выводит численность и генетический состав на стационарный уровень (рисунок 2). На рисунках введены обозначения: 1, 3 – промысел с оптимальной долей изъятия, соответствующей мономорфным равновесным состояниям q=0 и q=1; 2 - промысел с оптимальной долей изъятия, соответствующей полиморфному состоянию.

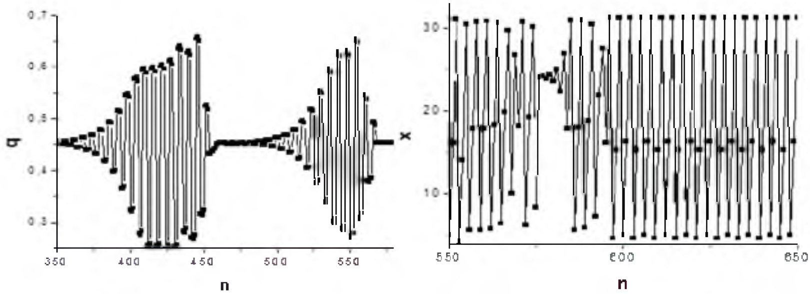


Рисунок 1 – Динамика генетического состава (q) и численности (x) в отсутствие промысла. Совместные колебания

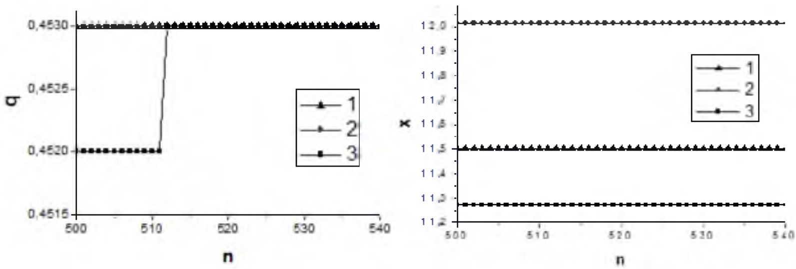


Рисунок 2 – Динамика частоты аллеля A (q) и численности (x) при промысле с различными оптимальными долями изъятия

Кроме того, показано, что оптимальный промысел может привести к изменению генетического разнообразия в случае, если какая-либо из оптимальных долей изъятия переведет равновесную численность через x*. Таким образом, промысел может привести к изменениям результатов отбора и вызвать разрушение или способствовать поддержанию полиморфизма.

**Библиографический список**

1. Ратнер В.А. Математическая популяционная генетика (элементарный курс). – Новосибирск: Наука, 1977.

2. Жданова О.Л., Колбина Е.А., Фрисман Е.Я. Проблемы регулярного поведения и детерминированного хаоса в математической модели эволюции менделевской лимитированной популяции // Дальневосточный математический журнал. – Владивосток: Дальнаука, 2003. – Т. 4, № 2. - С. 289–303.

3. Жданова О.Л., Фрисман Е.Я. Динамические режимы в модели однолокусного плотностно-зависимого отбора // Генетика. 2005. - Т. 41, №11. - С. 1575–1584.

4. Жданова О.Л., Колбина Е.А., Фрисман Е.Я. Влияние промысла на генетическое разнообразие и характер динамического поведения менделевской лимитированной популяции // ДАН. 2007. - Т. 412, №4. - С. 564–567.

5. Фрисман Е.Я., Жданова О.Л., Колбина Е.А. Влияние промысла на генетическое разнообразие и характер динамического поведения менделевской лимитированной популяции // Генетика. – М.: Наука, 2010. – Т. 46, № 2. - С. 272–281.

**УДК 556.16.01**

## Математические модели для прогнозирования паводковых ситуаций в системах открытых русел

***Т.Н. Корбут***

*ГАГУ, Россия, Республика Алтай, г. Горно-Алтайск*

Рельеф Республики Алтай характеризуется исключительным разнообразием и подразделяется на высокогорные, среднегорные и низкогорные, а так же рельеф межгорных котловин, отличается значительной глубиной расчленения и крутизной склонов, присутствием современного оледенения и суровым климатом [3]. В условиях сложного горного рельефа изучение, мониторинг климата и прогнозирование чрезвычайных ситуаций стоит проблема поиска методов и моделей прогноза возникновения паводковых ситуаций в руслах горно-равнинных рек, наносящих значительный ущерб региону. Моделирование процесса формирования речного стока является основой создания прогноза возникновения паводковой ситуации на участке русла реки. С привлечением и объединением различных видов моделей, возможно разработать эффективные алгоритмы анализа.

Водохозяйственная система включает в общем случае сильно разнящиеся друг от друга по морфометрическим и гидравлическим характеристикам объекты (водоемы, водотоки с прилегающими к ним поймами и др.), что является основной трудностью при проведении математического моделирования. Теоретической основой разработанных математических моделей для исследования волновых процессов, возникающих при неустановившихся течениях воды в открытых руслах и их системах, являются одномерные уравнения Сен-Венана в общей форме [1,2]: