

Независимая аксиоматизируемость квазимногообразий групп

А.И. Будкин

АлтГУ, г. Барнаул

Квазимногообразии групп – это класс групп, определяемый специальными формулами, называемыми квазитожествами. В этой работе изучается вопрос о существовании независимых и w -независимых базисов квазитожеств, интерес к которому возрос в последнее время. Приведём ряд результатов в данном направлении, полученных к настоящему моменту.

В [1] доказано, что если квазимногообразие групп содержит бесконечную циклическую группу и не содержит бесконечного множества групп простого порядка, то оно имеет независимый базис квазитожеств. Следствием этого явилось то, что для квазимногообразий групп без кручения задача о существовании независимого базиса квазитожеств всегда рассматривается в классе групп без кручения. Условия существования независимого базиса квазитожеств в классе групп без кручения найдены [2]. В частности, оказалось, что ряд широко изучаемых квазимногообразий (например, квазимногообразие, порождённое неабелевой свободной разрешимой группой, всех линейно упорядочиваемых групп) являются таковыми. В [3] исследован вопрос о существовании независимых базисов для всех квазимногообразий, являющихся покрытиями абелевых групп в решётке квазимногообразий разрешимых групп. В [4] найдены условия независимой аксиоматизируемости квазимногообразий универсальных алгебр. В [5] показано, что множество квазимногообразий разрешимых групп, не имеющих независимого базиса квазитожеств в классе групп без кручения, имеет мощность континуума. В [6] построены континуальные серии квазимногообразий нильпотентных групп, не имеющих независимых базисов квазитожеств. В [1] построено квазимногообразие групп, не имеющее независимого базиса квазитожеств, которое можно задать независимой системой универсальных формул. В [7] доказано, что свободная 2-нильпотентная группа ранга n , большего 1, не имеет независимого базиса квазитожеств в классе групп без кручения. В [8] также показано, что аналогичным свойством обладает, квазимногообразие, порождённое неабелевой группой порядка p^3 , где p – простое число, отличное от 2. Вопрос о существовании независимых базисов квазитожеств подробно изучался в универсальной алгебре. В [9] показано, что любую

конечную решетку можно вложить в конечную решетку, не имеющую независимого базиса квазитожеств. В [10] доказано существование континуума квазимногообразий унарных, не имеющих независимого базиса квазитожеств. Аналогичная теорема доказана в [11] для орграфов, в [12] для унарных алгебр специального вида, в [13] для дифференциальных группоидов и точечных абелевых групп, в [14] в случае (неориентированных) графов (без петель), в [15] для антимногообразий унарных. Весьма активно изучаются квазимногообразия, не имеющие независимого базиса квазитожеств, но имеющие w -независимый базис. Отметим, что наличие w -независимого базиса у данного квазимногообразия влечёт следующее свойство решётки квазимногообразий: существует бесконечное множество квазимногообразий, все попарные пересечения которых совпадают с рассматриваемым квазимногообразием. Мощность множества таких квазимногообразий найдена в [16] для графов, ориентированных графов, унарных, точечных абелевых групп. В [17] построен пример квазимногообразия с двумя унарными операциями, не имеющего независимого базиса, но имеющего w -независимый базис квазитожеств. Там же найдена конечная унарная алгебра, которая не имеет w -независимого и, следовательно, независимого базиса квазитожеств. В [18] доказано, что существует квазимногообразие унарных алгебр такое, что (а) в решетке его подквазимногообразий есть континуум элементов, не имеющих покрытий (и, следовательно, независимого базиса квазитожеств), (б) среди них есть континуум квазимногообразий, имеющих w -независимый базис квазитожеств. В [14] установлено, что для любого квазимногообразия графов, содержащего хотя бы один недвудольный граф, существует континуум его подквазимногообразий, не имеющих независимого базиса квазитожеств.

В данной работе доказана следующая теорема.

Теорема. Существует множество R квазимногообразий нильпотентных групп класса не выше двух, не имеющих независимого базиса квазитожеств в классе $N_{\{2\}}$ нильпотентных групп ступени не выше двух, имеющих w -независимый базис квазитожеств в $N_{\{2\}}$. Совокупность таких множеств R континуальна.

Библиографический список

1. Budkin A.I. Independent axiomatizability of quasivarieties of groups // *Mathematical Notes*. – 1982. – V. 31, №6. – P. 413–417.
2. Budkin A.I. Independent axiomatizability of quasivarieties of generalized solvable groups // *Algebra and Logic*. – 1986. – V. 25, №3. – P. 155–166.

3. Budkin A.I. Independent axiomatizability of quasi-varieties of soluble groups // *Algebra and Logic*. – 1999. – V. 30, №2. – P. 81–100.
4. Budkin A.I. On the independent axiomatizability of quasimanifolds of universal algebras // *Mathematical Notes*. – 1994. – V. 56, №4. – P. 1008–1014.
5. Medvedev N.Ya. Quasivarieties of Z-groups and groups // *Siberian Mathematical Journal*. – 1985. – V. 26, №5. – P. 717–723.
6. Budkin A.I. Quasivarieties of groups having no coverings // *Mathematical Notes*. – 1985. – V. 37, №5. – P. 333–337.
7. Fedorov A.N. Quasi-identities of a free 2-nilpotent group // *Mathematical Notes*. – 1986. – V. 40, №5, – P. 837–841.
8. Fedorov A.N. Subquasivarieties of nilpotent minimal non-Abelian group varieties // *Siberian Mathematical Journal*. – 1980. – V. 21, №6. – P. 840–850.
9. Tumanov V.I. Finite lattices having no independent basis of quasi-identities // *Mathematical Notes*. – 1984. – V. 36, №5. – P. 811–815.
10. Kartashov V.K. Quasivarieties of unars // *Math. Notes*. – 1980. – V. 27, №1. – P. 5–12.
11. Sizi S.V. Quasivarieties of graphs // *Siberian Mathematical Journal*. – 1994. – V. 35, №4. – P. 783–794.
12. Kravchenko A.V. Complexity of quasivariety lattices for varieties of unary algebras. II // *Siberian Electronic Mathematical Reports*. – 2016. – V. 13. – P. 388–394.
13. Basheyeva A., Nurakunov A.M., Schwidefsky M.V., Zamojska-Dzienio A. Lattices of subclasses. III // *Siberian Electronic Mathematical Reports*. – 2017. – V. 14. – P. 252–263.
14. Kravchenko A.V., Yakovlev A.V. Quasivarieties of graphs and independent axiomatizability // *Siberian Advances in Mathematics*. – 2017. – V. 20, №2 (2017), 80–89.
15. Kartashova A.V. Antivarieties of unars // *Algebra and Logic*. – 2011. – V. 50, №4. – P. 357–364.
16. Basheyeva A.O., Yakovlev A.V. On w-independent bases for quasi-identities // *Siberian Electronic Mathematical Reports*. – V. 14. – P. 838–847.
17. Gorbunov V.A. Algebraic Theory of Quasivarieties // *Siberian School of Algebra and Logic, Consultants Bureau*, 1998.
18. Gorbunov V.A. Covers in lattices of quasivarieties and independent axiomatizability // *Algebra and Logic*. – 1977. – V. 16, №5. – P. 340–369.