УДК 512.55

О графах делителей нуля коммутативных локальных колец

***Е.В. Журавлев*[1], *А.С. Монастырева*[2]**
[1]*АлтГУ, г. Барнаул;* [2]*АлтГПУ, г. Барнаул*

Пусть S – коммутативная полугруппа с нулем, $x \in S$,

$$Ann(x) = \{y \in S \mid xy = 0\}.$$

Введем на S отношение эквивалентности:

$$\forall x, y \in S \quad x \sim y \Leftrightarrow Ann(x) = Ann(y).$$

Класс эквивалентности элемента $x \in S$ будем обозначать $[x]$, а соответствующее фактормножество $S/\sim$.

Отношение $\sim$ является конгруэнцией на S: для любых $x_1, x_2, y_1, y_2 \in S$ если $x_1 \sim x_2$ и $y_1 \sim y_2$, то $x_1 x_2 \sim y_1 y_2$. Следовательно, мы можем рассматривать фактормножество $S/\sim$ как полугруппу относительно операции $[x][y] = [xy]$. Графом делителей нуля $\Gamma(S/\sim)$ полугруппы $S/\sim$ будем называть граф, вершинами которого являются элементы $S/\sim$ и две вершины $[x]$, $[y]$ (не обязательно различные) соединяются ребром (или петлей) тогда и только тогда, когда $[x][y] = [0]$ (равносильно $xy = 0$).

Пусть R – конечное коммутативное локальное кольцо с единицей, $J(R)$ и R^* – соответственно радикал Джекобсона и группа обратимых элементов кольца R соответственно, $F = R/J(R) = GF(p^r)$ – конечное поле из p^r элементов, $F^* = F \setminus \{0\}$. Существуют элементы $m_1, \ldots, m_h \in J(R)$ такие, что кольцо R раскладывается в прямую сумму F-модулей (см. [1]):

$$R = F \oplus Fm_1 \oplus \ldots \oplus Fm_h.$$

причем

$$J(R) = Fm_1 \oplus \ldots \oplus Fm_h.$$

Рассмотрим случай, когда $char R = 2$ и $\dim_F J/J^2 = 2$, $\dim_F J^2/J^3 = 2$, $\dim_F J^3 = 1$, $J^4 = 0$,

$$R = F \oplus Fu_1 \oplus Fu_1 \oplus Fv_1 \oplus Fv_2 \oplus Fw,$$

где $\{u_1,u_2,v_1,v_2,w\}$ – базис идеала $J(R)$ над полем F, $u_1,u_2\in J/J^2$, $v_1,v_2\in J^2/J^3$, $w\in J^3$.

В работе [2] классифицированы с точностью до изоморфизма все кольца R указанного типа. Наша цель – построить графы делителей нуля $\Gamma(S/\sim)$ одного из таких колец. А именно, рассмотрим кольцо со следующим умножением базисных элементов:

$$u_1^2=v_2,\ u_1u_2=u_2^2=v_1,\ u_1v_1=u_2v_1=u_2v_2=w,\ \ u_1v_2=zw,$$

где z – такой элемент F, что $z+1\notin\left(F^*\right)^3$, $z\neq 1$ (см. [2], теорема 1, пункт 9). Непосредственным вычислением получаем, что

$$R=[1]\bigcup_{n_i\in F\setminus\{0,1\}}[n_iu_1+u_2]\bigcup[u_1]\bigcup_{k_i\in F}[u_2+k_iv_2]\bigcup_{l_i\in F}[u_1+u_2+l_iv_2]$$
$$\bigcup_{m_i\in F}[m_iv_1+v_2]\bigcup[v_1]\bigcup[w]\bigcup[0],$$

где

$$[n_iu_1+u_2]=F^*(n_iu_1+u_2)+Fv_1+Fv_2+Fw,\quad n_i\neq 0,1,$$
$$[u_1]=F^*u_1+Fv_1+Fv_2+Fw,$$
$$[u_2+k_iv_2]=F^*(u_2+k_iv_2)+Fv_1+Fw,$$
$$[u_1+u_2+l_iv_1]=F^*(u_1+u_2+l_iv_2)+F(v_1+v_2)+Fw,$$
$$[m_iv_1+v_2]=F^*(m_iv_1+v_2)+Fw,$$
$$[v_1]=F^*v_1+Fw,$$
$$[w]=F^*w,\ \ [0]=\{0\},\ \ [1]=R^*,$$

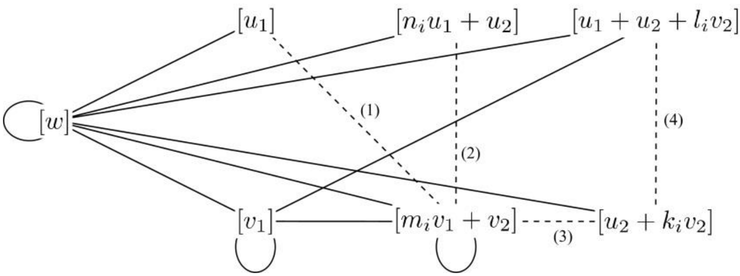
и для любых $l_i,m_i,m_j,n_i,k_i\in F,\ \ i,j\in\{1,\dots,p^r\}$,

$$Ann(n_iu_1+u_2)=\left[\frac{1+n_iz}{1+n_i}v_1+v_2\right]\bigcup[w]\bigcup[0],\quad n_i\neq 0,1,$$
$$Ann(u_1)=[zv_1+v_2]\bigcup[w]\bigcup[0],$$
$$Ann(u_2+k_iv_2)=[u_1+u_2+(1+z)k_iv_1]\bigcup[v_1+v_2]\bigcup[w]\bigcup[0],$$
$$Ann(u_1+u_2+l_iv_1)=\left[u_2+\frac{l_i}{1+z}v_2\right]\bigcup[v_1]\bigcup[w]\bigcup[0],$$
$$Ann(zv_1+v_2)=[u_1]\bigcup_{m_i\in F}[m_iv_1+v_2]\bigcup[v_1]\bigcup[w]\bigcup[0],$$
$$Ann(v_1+v_2)=\bigcup_{k_i\in F}[u_2+k_iv_2]\bigcup_{m_i\in F}[m_iv_1+v_2]\bigcup[v_1]\bigcup[w]\bigcup[0],$$
$$Ann(m_jv_1+v_2)=\left[\frac{1+m_i}{z+m_i}u_1+u_2\right]\bigcup_{m_i\in F}[m_iv_1+v_2]\bigcup[v_1]\bigcup[w]\bigcup[0],\quad m_i\neq z,1,$$

$$Ann(v_1) = \bigcup_{l_i \in F} [u_1 + u_2 + l_i v_1] \bigcup_{m_i \in F} [m_i v_1 + v_2] \bigcup [v_1] \bigcup [w] \bigcup [0],$$

$$Ann(w) = J.$$

На рисунке 1 представлено геометрическое изображение графа $\Gamma(S/\sim)$, за исключением вершин $[0]$ и $[1]$ ($[0]$ смежна со всеми вершинами, а $[1]$ смежна только $[0]$).



$n_i \neq 0,1$

1) если $m_i = z$;

2) если $1 + m_i + m_i n_j + n_j z = 0$, $m_i \neq 1, z$;

3) если $m_i = 1$;

4) если $l_i = (1+z)k_j$.

Рисунок 1 – Геометрическое изображение графа $\Gamma(S/\sim)$

В данном изображении вершины $[n_i u_1 + u_2]$, $[u_1 + u_2 + l_i v_2]$, $[m_i v_1 + v_2]$, $[u_2 + k_i v_2]$ это группы вершин графа $\Gamma(S/\sim)$, причем пунктирные ребра означают смежность вершин графа при выполнение некоторых условий, указанных внизу рисунка.

Библиографический список

1. Raghavendran R., Finite associative rings // Compositio Math. – 1969. – V. 21. – P. 195–229.

2. Zhuravlev E.V. On the classification of finite commutative local rings // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2015. – № 12. – C. 625–638.