УДК 512.54.01

Класс Леви, порожденный квазимногообразием qH_2

В.В. Лодейщикова
АлтГТУ им. И.И. Ползунова, г. Барнаул

Для произвольного класса групп M классом Леви, порожденным M, будем называть класс всех групп G, в которых нормальное замыкание $(x)^G$ любого элемента x из G принадлежит M.

Классы Леви были введены в работе Л.К. Каппе [1] под влиянием работы Ф. Леви [2], из которой следует, что класс Леви, порожденный многообразием абелевых групп, является многообразием 2-энгелевых групп.

Р.Ф. Морсом [3] доказано, что класс Леви, порожденный многообразием групп M, также будет многообразием групп. А.И. Будкин в работе [4] получил аналогичный результат для квазимногообразий групп.

Введем некоторые обозначения: qK – квазимногообразие, порожденное классом групп K (если K={G}, то пишем qG), $F_2(N_2)$ – свободная группа ранга 2 в многообразии нильпотентных групп ступени не выше 2.

А.И. Будкин [4] доказал, что если K – произвольное множество нильпотентных групп ступени 2 без элементов порядков 2 и 5, и в каждой группе из K централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, является абелевой подгруппой, то класс Леви, порожденный qK, содержится в многообразии нильпотентных групп ступени не выше 3. В работе А.И. Будкина и Л.В. Тараниной [5] данный результат был усилен и доказана аналогичная теорема для произвольного множества нильпотентных групп ступени 2 без элементов порядка 2.

Рассмотрим группы, имеющие следующие представления в многообразии нильпотентных групп ступени не выше 2:

$$H_p = gr\left(x, y \mid [x,y]^p = 1\right),\ H_{p^s} = gr\left(x, y \mid [x,y]^p = x^{p^s} = y^{p^s} = 1\right),$$

где s – натуральное число, p – простое число.

Набор qH_{p^s} (исключая qH_{2^1}), qH_p, $qF_2(N_2)$ (p – простое число), представляет собой полный список почти абелевых квазимногообразий нильпотентных групп (т. е. неабелевых квазимногообразий нильпотентных групп, все собственные подквазимногообразия которых абелевы).

В работах [6-8] найдены описания классов Леви, порожденных почти абелевыми квазимногообразиями нильпотентных групп (исключая класс Леви, порожденный qH_2). С.А. Шахова [9, 10] показала, что квазимногообразие Леви, порожденное классом qH_{p^s}, конечно аксиоматизируемо.

В [11] установлено существование класса K такого, что во всякой группе из K централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, – абелева подгруппа, но класс Леви, порожденный qK содержит нильпотентную группу ступени 4. В [12] построена нильпотентная ступени 3 группа, которая принадлежит классу Леви, порожденному qH_2.

В работах [13, 14] установлено, что для класса Леви, порожденного квазимногообразием qH_2 справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. Всякая 2-порожденная группа G, принадлежащая классу Леви, порожденному квазимногообразием qH_2, нильпотентна ступени не выше 3.

Теорема 2. Если нильпотентная ступени 4 группа принадлежит классу Леви, порожденному квазимногообразием qH_2, то она будет нильпотентной ступени не выше 3.

Теорема 3. Класс Леви, порожденный квазимногообразием qH_2, содержится в многообразии нильпотентных групп ступени не выше 3.

Данная работа продолжает исследование квазимногообразия Леви, порожденного qH_2.

Рассмотрим квазимногообразие N, заданное в многообразии нильпотентных групп ступени не выше 2 следующим бесконечным множеством формул:

$$(\forall x)(\forall y)\left([x,y]^2=1\right),\ (\forall x)(\forall y)\left(x^2=1\to[x,y]=1\right),$$

$$(\forall x)\left(x^q=1\to x=1\right),\ (\forall x)\left(x^4=1\to x^2=1\right),$$

где q пробегает множество простых чисел $(q\neq 2)$.

Через M обозначим квазимногообразие, заданное в многообразии нильпотентных групп ступени не выше 3 следующим бесконечным множеством формул:

$$(\forall x)\left(x^q=1\to x=1\right),\ (\forall x)\left(x^4=1\to x^2=1\right),$$

$$(\forall x)(\forall y)\left([x,y,x]^2=1\right),\ (\forall x)(\forall y)\left(x^2=1\to[x,y,x]=1\right),$$

$$\left(\forall x\right)\left(\forall x_1\right)\ldots\left(\forall x_k\right)\left(x^{2\delta}=\prod_{i=1}^{k}\left[x,x_i\right]^{-2\varepsilon_i}\left[x,x_i,x\right]^{-\varepsilon_i\delta}\rightarrow\prod_{i=1}^{k}\left[x,x_i,x\right]=1\right),$$

где q пробегает множество простых чисел $\left(q\neq 2\right)$, $\varepsilon_i\in\left\{-1,1\right\}$ $\left(i=1,\ldots,k\right)$, δ и k пробегают множество натуральных чисел.

Теорема 4. Пусть K – произвольный класс групп из N, содержащий неабелеву группу. Тогда класс Леви, порожденный квазимногообразием qK, совпадает с квазимногообразием M.

Следствие. Класс Леви, порожденный квазимногообразием qH_2, совпадает с квазимногообразием M.

Библиографический список

1. Kappe L.C. On Levi-formation // Arch. Math. – 1972. – №6 (23). – P. 561–572.

2. Levi F.W. Groups in which the commutator operation satisfies certain algebraic condition // J. Indian Math. Soc. – 1942. – V. 6. – P. 87–97.

3. Morse R.F. Levi-properties generated by varieties // The mathematical legacy of Wilhelm Magnus. Groups, geometry and special functions (Contemp. Math., 169), Providence, RI, Am. Math. Soc. – 1994. – P. 467–474.

4. Будкин А.И. Квазимногообразия Леви // Сибирский математический журнал. – 1999. – №2 (40). – С. 266–270.

5. Будкин А.И., Таранина Л.В. О квазимногообразиях Леви, порожденных нильпотентными группами // Сибирский математический журнал. – 2000. – №2 (41). – С. 270–277.

6. Лодейщикова В.В. О квазимногообразиях Леви, порожденных нильпотентыми группами // Известия Алтайского государственного университета. – 2009. – №1 (61). – С. 26–29.

7. Лодейщикова В.В. О классах Леви, порожденных нильпотентными группами // Сибирский математический журнал. – 2010. – №6 (51). – С. 1359–1366.

8. Лодейщикова В.В. О квазимногообразиях Леви экспоненты ps // Алгебра и логика. – 2011. – №1 (50). – С. 26–41.

9. Шахова С.А. Об аксиоматическом ранге квазимногообразия M^{p^2} // Известия Алтайского государственного университета. – 2015. – №1/2 (85). – С. 179–182.

10. Шахова С.А. Об аксиоматическом ранге класса Леви, порожденного квазимногообразием qH_{p^s} // МАК: «Математики – Алтайскому краю» : сборник трудов всероссийской конференции по математике. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2016. – С. 10–11.

11. Лодейщикова В.В. Об одном квазимногообразии Леви экспоненты 8 // Известия Алтайского государственного университета. – 2010. – №1/2 (65). – С. 42–45.

12. Лодейщикова В.В. О классе Леви, порожденном почти абелевым квазимногообразием нильпотентных групп // Известия Алтайского государственного университета. – 2016. – №1 (89). – С. 148–151.

13. Лодейщикова В.В. Об одном свойстве класса Леви, порожденного квазимногообразием qH2 // МАК: «Математики – Алтайскому краю» : сборник трудов всероссийской конференции по математике. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2017. – С. 20–23.

14. Лодейщикова В.В. О некоторых свойствах класса Леви, порожденного квазимногообразием qH_2 // Сборник научных статей международной конференции «Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования» – 2017 [Электронный ресурс] / АлтГУ; отв. ред. Е. Д. Родионов. – Электрон. текст. дан. – Барнаул: ФГБОУ ВО "Алтайский государственный университет", 2017. – С. 383–385.

УДК 512.54.01

О базисе класса Леви квазимногообразия, порождённого конечной p-группой

С.А. Шахова

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

Для произвольного класса групп M обозначим через $L(M)$ класс всех групп $G,$ в которых нормальное замыкание $(a)^G$ каждого элемента $a \in G$ принадлежит квазимногообразию $M.$ Класс $L(M)$называется классом Леви, порождённым классом групп $M.$

А.И. Будкин установил в [1], что если M – квазимногообразие, то $L(M)$ также является квазимногообразием. Изучению классов Леви квазимногообразий нильпотентных групп посвящены работы [2–7]. В работе [7] возникли классы Леви квазимногообразий, порождённых конечными группами, заданные бесконечными системами квазитождеств.

Совокупность квазитождеств, задающих квазимногообразие, называется базисом этого квазимногообразия. Говорят, что квазимногообразие имеет бесконечный аксиоматический ранг, если его нельзя задать базисом от конечного числа переменных.