структура матриканта уравнений движения термоупругих волн в объемном случае.

Библиографический список

1. Тлеукенов С.К. Метод матриканта. Павлодар, НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004, 148 с.
2. Ispulov N. A., Qadir A., and Shah M.A. Reflection of thermoelastic wave on the interface of isotropic half-space and tetragonal syngony anisotropic medium of classes 4, 4/m with thermomechanical effect // Chinese Physics B, vol. 25, no. 3, Article ID 038102, 2016.
3. Ispulov N. A., Qadir A., Zhukenov M. K., Dossanov T. S., and Kissikov T. G. The analytical form of the dispersion equation of elastic waves in periodically inhomogeneous medium of different classes of crystals // Advances in Mathematical Physics, vol. 2017, Article ID 5236898, 2017.
4. Nurlybek A. Ispulov, Abdul Qadir, Marat Zhukenov, and Erkin Arinov. The Propagation of Thermoelastic Waves in Anisotropic Media of Orthorhombic, Hexagonal, and Tetragonal Syngonies // Advances in Mathematical Physics, Volume 2017, Article ID 4898467, 2017.
5. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1986, 556 с.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука,1988, 552 с.

УДК 517.9

Задача Коши–Дирихле для квазилинейного ультра-параболического уравнения колмогоровского типа

***И.В. Кузнецов*[1], *С.А. Саженков*[1,2]**
[1]ИГиЛ СО РАН, НГУ, Новосибирск;
[2]Хэйлунцзянский ун-т, Харбин

Аннотация. Рассматривается начально-краевая задача для неклассического квазилинейного уравнения конвекции-диффузии колмогоровского типа. Уравнение содержит две время-подобные переменные t и s. Его особенностью является то, что направление течения времени по переменной s может меняться. В связи с этим возникает возможность, что заданные начальные и финальные условия по s могут не приниматься решением. В настоящей статье формулируется достаточно общий класс слабых энтропийных решений, хорошо согласованный с физической мотивировкой задачи. Доказывается, что для этого класса поставленная задача является корректной. В целом, исследование является продолжением работ авторов [1, 2].

1. Формулировка задачи. Пусть Ω – ограниченная область пространственных переменных $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$ ($\partial\Omega \in C^2$). Пусть $t \in [0,T]$ и $s \in [0,S]$ – две переменные, подобные переменной времени. Здесь T и S – заданные положительные постоянные. Обозначим $G_{T,S} \coloneqq \Omega \times (0,T) \times (0,S)$, $\Xi^1 \coloneqq \Omega \times (0,S)$, $\Xi^2 \coloneqq \Omega \times (0,T)$, $\Gamma_0^1 \coloneqq \bar{\Omega} \times \{t=0\} \times [0,S]$, $\Gamma_0^2 \coloneqq \bar{\Omega} \times [0,T] \times \{s=0\}$, $\Gamma_S^2 \coloneqq \bar{\Omega} \times [0,T] \times \{s=S\}$, $\Gamma_l \coloneqq \partial\Omega \times [0,T] \times [0,S]$.

Рассматривается следующая задача Коши–Дирихле.

Задача A. Для произвольно заданных начальных и финальных данных $u_0^1 \in C_0^{0,\alpha}(\Xi^1)$, $u_0^2, u_S^2 \in C_0^{0,\alpha}(\Xi^2)$ ($\alpha \in (0,1)$) требуется найти функцию $u\colon G_{T,S} \mapsto \mathbb{R}$, удовлетворяющую квазилинейному ультра-параболическому уравнению:

$$\partial_t a(u) + \partial_s b(u) + \operatorname{div}_x \boldsymbol{\varphi}(u) = \operatorname{div}_x(\mathbb{A}(u)\nabla_x u),\ (\boldsymbol{x},t,s) \in G_{T,S}, \tag{1a}$$

начальным данным по t:

$$u|_{t=0} = u_0^1(\boldsymbol{x},s),\ (\boldsymbol{x},s) \in \Xi^1, \tag{1b}$$

начальным и финальным данным по s:

$$u|_{s=0} \approx u_0^2(\boldsymbol{x},t),\ u|_{s=S} \approx u_S^2(\boldsymbol{x},t),\ (\boldsymbol{x},t) \in \Xi^2, \tag{1c}$$

и однородному краевому условию

$$u|_{\Gamma_l} = 0. \tag{1d}$$

Через $C_0^{0,\alpha}(\bar{\mathcal{O}})$ стандартно обозначается пространство непрерывных по Гельдеру с показателем $\alpha \in (0,1)$ финитных функций на некотором замкнутом множестве $\bar{\mathcal{O}} \subset \mathbb{R}^N$, снабженное нормой

$$\|\Phi\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\mathcal{O}})} = \max_{\boldsymbol{\zeta}\in\bar{\mathcal{O}}}|\Phi(\boldsymbol{\zeta})| + \sup_{\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta}\in\mathcal{O},\boldsymbol{\zeta}\neq\boldsymbol{\eta}} \frac{|\Phi(\boldsymbol{\zeta}) - \Phi(\boldsymbol{\eta})|}{|\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\eta}|^\alpha}.$$

В (1c) знак соотношения $\approx$ означает, что значения u_0^2 и u_S^2 могут не приниматься на некоторых частях множеств Γ_0^2 и Γ_S^2, соответственно. То обстоятельство, становится ли $\approx$ знаком равенства, или нет, определяется *апостериори*, то есть после того, как решение задачи A каким-либо способом сконструировано.

Нелинейные функции $a = a(u)$ и $b = b(u)$, вектор-функция $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1(u), \dots, \varphi_d(u))$ и $d\,\times$-матрица-функция $\mathbb{A} = \mathbb{A}(u)$ заданы и удовлетворяют следующим условиям.

Условия на a&b&$\boldsymbol{\varphi}$&$\mathbb{A}$. Пусть $a, b \in C^2(\mathbb{R})$, $\varphi_j \in C^2(\mathbb{R})$, $j = 1, \dots d$, $\mathbb{A} = (A_{ij})$, $A_{ij} \in C^2(\mathbb{R})$. Функция $a = a(u)$ является строго монотонно возрастающей. Функция $b = b(u)$ монотонной возможно не является. Для a и b выполняется *условие истинной нелинейности*

$$\operatorname{mes}\{\lambda \in \mathbb{R}\colon a'(\lambda)\theta + b'(\lambda)\vartheta = 0\} = 0 \quad \forall(\theta,\vartheta) \in \mathbb{S}^1.$$

(Через $\mathbb{S}^1$ обозначается единичная окружность в $\mathbb{R}^2$ с центром в начале координат. Через $\operatorname{mes}\mathfrak{K}$ — мера Лебега множества $\mathfrak{K}$.) Матрица $\mathbb{A}(u)$ является равномерно (по u) положительно определенной.

Замечание. *Заметим, что если потребовать выполнение условий*
$u|_{s=0} = u_0^2(\boldsymbol{x},t),\ u|_{s=S} = u_S^2(\boldsymbol{x},t),\ (\boldsymbol{x},t) \in \Xi^2,$ (2)
вместо (1c), то задача A станет некорректно поставленной. Действительно, так как функция $b = b(u)$ *является нелинейной и, вообще говоря, немонотонной, то возможно, что никакое из решений уравнения (1a) не принимает значений* u_0^2 *(и* u_S^2*) на* ***всем*** *множестве* Γ_0^2 *(и* Γ_S^2*, соответственно), хотя, может быть, принимает значения на некоторой его части. Поэтому допускаем, что возможное решение задачи A отличается от* u_0^2 *и* u_S^2 *на* Γ_0^2 *и* Γ_S^2 *и, в связи с этим, накладываем на него более слабое требование (1c), следуя идее из [3].*

2. Параболическая регуляризация и основной результат о корректности задачи A. Для того, чтобы преодолеть указанные в замечании трудности, вводится понятие слабого энтропийного решения (с.э.р.) задачи A (см. ниже в п. 3). Основной результат работы состоит в следующем.

Теорема A. (Существование, единственность и устойчивость с.э.р.) *Пусть выполняются условия на* a&b&$\boldsymbol{\varphi}$&$\mathbb{A}$. *Тогда при любых заданных* $u_0^1 \in C_0^{0,\alpha}(\Xi^1),\ u_0^2, u_S^2 \in C_0^{0,\alpha}(\Xi^2)$ *задача A имеет единственное с.э.р. Более того, если* u *и* v *— это два с.э.р., соответствующих двум наборам начальных и финальных данных* (u_0^1, u_0^2, u_S^2) *и* (v_0^1, v_0^2, v_S^2)*, то при п.в.* $t \in (0,T]$ *справедлива оценка*

$$\|u(\cdot,t,\cdot) - v(\cdot,t,\cdot)\|_{L^1(\Xi^1)} \le \|u_0^1 - v_0^1\|_{L^1(\Xi^1)} + \frac{\max_{\lambda\in[-M,M]}|b'(\lambda)|}{\min_{\lambda\in[-M,M]}|a'(\lambda)|}\left(\|u_0^2 - v_0^2\|_{L^1(\Omega\times(0,t))} + \|u_S^2 - v_S^2\|_{L^1(\Omega\times(0,t))}\right) \qquad (3)$$

Здесь, $M = \max\left\{\|u_0^1, v_0^1\|_{L^\infty(\Xi^1)}, \|u_0^2, v_0^2, u_S^2, v_S^2\|_{L^\infty(\Xi^2)}\right\}$.

Наличие оценки (3) означает устойчивость с.э.р. по отношению к краевым условиям задачи. Понятие с.э.р. и обоснование теоремы A основаны на систематическом изучении аппроксимирующей параболической задачи, состоящей из строго параболического уравнения

$$\partial_t a(u_\varepsilon) + \partial_s b(u_\varepsilon) + \operatorname{div}_x \boldsymbol{\varphi}(u_\varepsilon) = \operatorname{div}_x(\mathbb{A}(u_\varepsilon)\nabla_x u_\varepsilon) + \varepsilon\partial_s^2 u_\varepsilon, \qquad (4)$$

$(\boldsymbol{x},t,s) \in G_{T,S},\ \varepsilon > 0$, снабженного краевыми условиями (1b,d) и (2). Задача (4), (1b,d), (2) имеет единственное классическое решение в силу известных положений теории параболических уравнений [4]. Устанавливается, что предел семейства решений задачи (4), (1b,d), (2) существует и служит с.э.р. задачи A, и что справедлива оценка (3) для любой пары с.э.р.

3. Слабое энтропийное решение задачи A

Функция $u \in L^\infty(G_{T,S}) \cap L^2((0,T)\times(0,S); H_0^1(\Omega))$ называется *с.э.р.* задачи A, если она удовлетворяет *энтропийному неравенству*

$$\partial_t q_a(u) + \partial_s q_b(u) + \operatorname{div}_x\left(\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{\varphi}} - \mathbb{A}(u)\nabla_x\eta(u)\right) \le -\eta''(u)\left|\mathbb{A}^{1/2}(u)\nabla_x u\right|^2$$

в слабом обобщенном смысле, принципу максимума

$$\|u\|_{L^\infty(G_{T,S})} \le \max\left\{\|u_0^1\|_{\mathrm{L}^\infty(\Xi^1)}, \|u_0^2\|_{\mathrm{L}^\infty(\Xi^2)}, \|u_S^2\|_{\mathrm{L}^\infty(\Xi^2)}\right\},$$

начальному условию (1b) в смысле сильного следа и *энтропийным граничным условиям*

$$q_b\left(u_0^{\mathrm{tr},2}\right) - q_b(u_0^2) - \eta'(u_0^2)\left(b\left(u_0^{\mathrm{tr},2}\right) - b(u_0^2)\right) \le 0 \text{ в } \Gamma_0^2,$$

$$q_b\left(u_S^{\mathrm{tr},2}\right) - q_b(u_S^2) - \eta'(u_S^2)\left(b\left(u_S^{\mathrm{tr},2}\right) - b(u_S^2)\right) \ge 0 \text{ в } \Gamma_S^2.$$

Через $(\eta, q_a, q_b, \boldsymbol{q_\varphi})$ обозначается *выпуклая энтропийная четверка*: $\eta \in C^2(\mathbb{R})$ — произвольная выпуклая функция, $q_a' = a'\eta'$, $q_b' = b'\eta'$, $\boldsymbol{q_\varphi'} = \boldsymbol{\varphi}'\eta'$. Через $u_0^{\mathrm{tr},2}$ и $u_S^{\mathrm{tr},2}$ обозначаются следы решения энтропийного неравенства на поверхностях Γ_0^2 и Γ_S^2, соответственно.

Заметим, что из энтропийного неравенства непосредственно следует уравнение (1a).

Финансовая поддержка. *Работа поддержана Министерством науки и высшего образования РФ (код проекта III.22.4.2) и РФФИ (грант № 18-01-00649).*

Библиографический список

1. Kuznetsov I.V. Genuinely nonlinear forward-backward ultra-parabolic equations // Sib. Elect. Math. Rep. – 2017. – Vol. 14. – P. 710–731.

2. Kuznetsov I.V. and Sazhenkov S.A. Quasi-solutions of genuinely nonlinear forward-backward ultra-parabolic equations // J. Phys.: Conf. Ser. – 2017. – No. 894 012046. – P. 1–7.

3. Otto F. Initial-boundary value problem for a scalar conservation law // C. R. Acad. Sci. Paris Ser I Math. – 1996. – Vol. 322. – P. 729–734.

4. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

УДК 539.3

Деформирование упругой пластины конечной толщины под действием подвижной нагрузки

О.В. Марченко, А.М. Сергеева

Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения РАН, г. Комсомольск-на-Амуре

Разрабатывается математическая модель для исследования напряженно-деформированного состояния деформируемой внешним воз-