

Доказательство основано на замене первого уравнения (1) на уравнение

$$\rho(\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v})_t) + (\mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) / \tau + \nabla(p_t + p / \tau) = \text{div}(\mathbf{S}_t + \mathbf{S} / \tau),$$

являющееся обобщением (8) на нелинейный случай. Единственность доказывается при помощи интегральных оценок, в частности, тождества (2).

### Библиографический список

1. Астарита Дж. Марручи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. – М.: Мир, 1978.
2. Пухначев В. В. Математическая модель несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // ПМТФ. – 2010. – Т. 51, № 4. – С. 116–126.
3. Мелешко С. В., Петрова А.Г., Пухначев В.В. Характеристические свойства системы уравнений несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // ПМТФ. – 2017. – Т. 58, № 5. – С. 44–50.

УДК 535.529:541.64

### Исследование характера течений полимерного расплава в канале с внезапным сужением

*Г.В. Пышноград<sup>1</sup>, А.Е. Кузнецов<sup>2</sup>*  
<sup>1</sup>АлтГУ, г. Барнаул; <sup>2</sup>АлтГПУ, г. Барнаул

На сегодняшний день существует достаточное количество реологических уравнений состояния, которые позволяют описать те или иные наблюдаемые в экспериментах явления. При этом до сих пор не создана единая теория течения полимеров. В связи с этим необходимо исследовать существующие модели для определения их адекватности для описания сложных течений полимерных растворов и расплавов, возникающих, в частности, в областях со сложной геометрией.

В данной работе в качестве определяющего реологического соотношения используется модифицированная модель Виноградова-Покровского, которая замыкает уравнения сохранения импульса и массы [1, 2]. В безразмерном виде уравнения можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho v = 0,$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} \operatorname{Re} \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial v_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_k} \delta_{ik} + \frac{\eta_1}{\eta_0} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial v_i} \right) + \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}, \quad (1)$$

$$\operatorname{Wi} \left( \frac{d}{dt} a_{ik} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} a_{jk} - \frac{\partial v_k}{\partial x_j} a_{ji} \right) + (1 + (\kappa - \beta) I) a_{ik} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \operatorname{Wi} \beta a_{ij} a_{jk}.$$

Здесь  $p$  – гидростатическое давление;  $\eta_0$  и  $\tau_0$  – значения сдвиговой вязкости и времени релаксации для вязкоупругой составляющей;  $\eta_1$  – остаточная сдвиговая вязкость ( $\eta_1 \ll \eta_0$ );  $a_{ik}$  – симметричный тензор дополнительных напряжений;  $I = a_{11} + a_{22} + a_{33}$  – первый инвариант тензора дополнительных напряжений;  $\kappa = 1, 2\beta$  и  $\beta = \beta(I) = (\beta_0 + p_0 I) / (1 + p_0 I)$  – феноменологические параметры модели, учитывающие в уравнениях динамики макромолекулы размеры и форму молекулярного клубка;  $\rho$  – плотность полимера;  $v_i$  –  $i$ -я компонента скорости;  $\operatorname{Re}$  – число Рейнольдса;  $\operatorname{Wi}$  – число Вайсенберга;  $\rho / \rho_0 = 1 + k p$ ,  $\rho_0 = 918$  кг/м<sup>3</sup>.

Расчетная область изображена на рисунке 1 и состоит из двух параллелепипедов. Первый параллелепипед является резервуаром и имеет квадратное сечение  $H_{res} \times H_{res} = 14 \times 14$  мм. Второй параллелепипед называется щелевым каналом, его сечение  $H_{res} \times H_{slit} = 14 \times 1$  мм. При расчетах длины широкого и узкого каналов выбираются достаточно большими,  $-10H_{res} \leq x \leq 50H_{res}$ , для исключения влияния как входа в резервуар, так и выхода из щелевого канала.

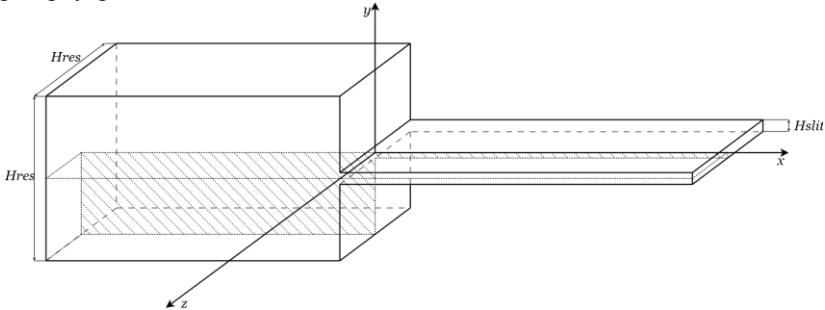


Рисунок 1 – Расчетная область и ее размеры

Так как расчетная область симметрична относительно плоскостей  $y = 0$  и  $z = 0$ , то расчеты проводились для выделенной на рисунке 1 области.

Численный метод строится таким образом, чтобы его можно было реализовать с использованием GPU NVIDIA и технологии CUDA. При этом использовалась неравномерная пространственная сетка, со сгущением у начала узкой части канала. Расчеты, результаты которых приведены далее, выполнялись на сетке  $180 \times 42 \times 30$ .

Полученные результаты сравнивались с экспериментальными данными, приведенными в работах [3, 4].

В работе [3] была изучена зависимость размера возникающих в углах проточного канала вихревых областей от температуры и удельного расхода расплава разветвленного полиэтилена низкой плотности. Показано, что размеры вихревой зоны существенно зависят от названных выше характеристик, причем эти вихри изменяли свою форму в параллельных оси канала сечениях, что характеризует трехмерный характер поля течения. Также отмечается наличие винтового потока, направленного к стенкам резервуара. Обнаружено, что максимальное значение скорости в осевом сечении достигается непосредственно за входом в щелевую часть канала.

Отмеченные в работах [3, 4] явления наблюдаются и в численных экспериментах [1, 2]. Результаты расчетов показывают, что перед входом в щелевой канал существует вихревая зона, размер которой изменяется при удалении от осевого сечения [1]. Методика определения размера вихревой области описана в работе [1]. В [5] показано, что максимальное значение скорости достигается вблизи от входа в щелевой канал.

Также в численных экспериментах обнаружен винтовой поток, иллюстрирующий трехмерный характер течений. На рисунке 2 изображены траектории двух частиц в потоке.

Начало траекторий отмечено символом «\*». Заметим, что, как и в работе [3], площади вихревых зон в различных сечениях, проведенных вдоль оси  $Oz$ , могут быть различными. Это также подтверждается работой [1]. В работе [5] показано, что размер вихря немонотонно зависит от значения безразмерного числа Вайсенберга  $Wi$  – с увеличением числа  $Wi$  вихревая область сначала увеличивается, затем начинает уменьшаться. Этот эффект можно объяснить комплексным влиянием начальной сдвиговой вязкости  $\eta_0$  и начального времени релаксации  $\tau_0$ , которые позволяют управлять числом Вайсенберга.

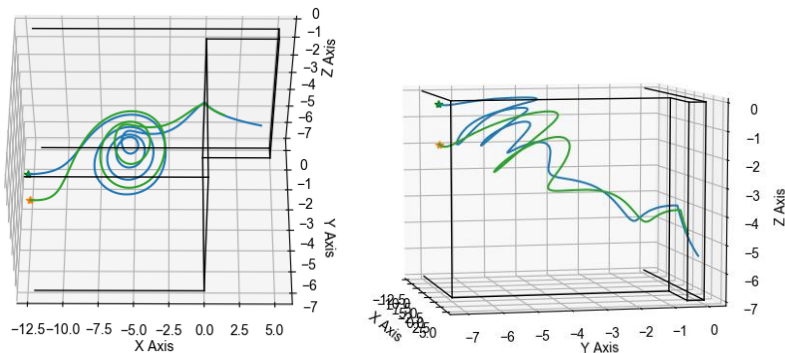


Рисунок 2 – Траектории движения двух частиц в потоке

Таким образом, в работе показано, что использование модифицированной реологической модели Виноградова-Покровского (1) позволяет качественно описывать наблюдаемые в экспериментах [3, 4] явления. При этом отмечено, что течения расплавов полимеров имеют трехмерный характер, присутствует винтовой поток, направленный от оси канала к его стенкам. Различия между экспериментальными и расчетными кривыми можно объяснить одномодовым характером модели.

Это позволяет утверждать, что модифицированная модель Виноградова-Покровского (1) пригодна для описания течений полимерных расплавов в областях со сложной геометрией.

*Авторы выражают глубокую признательность Сибирскому суперкомпьютерному центру за возможность проведения расчетов. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-31-00030 мол. а).*

### Библиографический список

1. Кошелев К.Б., Кузнецов А.Е., Пышнограй Г.В., Толстых М.Ю. Зависимость гидродинамических характеристик течения полимерного расплава в сходящемся канале от температуры // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2016. – Т. 22, №2. – С. 175–191.
2. Кошелев К.Б., Пышнограй Г.В., Толстых М.Ю. Моделирование трехмерного течения полимерного расплава в сходящемся канале с прямоугольным сечением // Известия РАН. МЖГ. – 2015. – №3. – С. 16–24.
3. Hertel D., Valette R., Munstedt H. Three-dimensional entrance flow of a low-density polyethylene (LDPE) and a linear low-density polyethylene (LLDPE) into a slit die // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2008.V. 153.P. 82–94.

4. Hertel D., Munstedt H. Dependence of the secondary flow of a low-density polyethylene on processing parameters as investigated by laser-Doppler velocimetry // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 2008.V. 153. P. 73–81.

5. Кузнецов А.Е., Пышнограй Г.В., Черпакова Н.А. Влияние числа Вайсенберга на структуру течений полимерных расплавов в каналах с внезапным сужением // *Фундаментальные проблемы современного материаловедения.* 2017. – Т.14, №3. – С. 332–336.

**УДК 532.135**

**Моделирование нелинейных эффектов в мезоскопической теории полимерных жидкостей при их больших периодических деформациях**

*Г.В. Пышнограй<sup>1</sup>, Н.А. Черпакова<sup>2</sup>, О.А. Кондратьева<sup>2</sup>*  
*<sup>1</sup>АлтГУ, <sup>2</sup>АлтГПУ, г. Барнаул*

В настоящее время нет необходимости говорить о важности полимеров. Они находят применение во многих областях жизнедеятельности человека. Их широкое использование приводит к росту числа научных исследований, посвященных полимерам и можно отметить, что рост числа экспериментальных и прикладных работ опережает рост работ, посвященными математическому моделированию полимерных систем и в частности, при моделировании течений растворов и расплавов полимеров [1–10]. Это обусловлено тем, что математическая теория таких течений еще далека от завершения. И связано как со сложностью строения полимерных молекул, так и с высокой сложностью получающихся реологических моделей, расчеты по которым требуют применения новых подходов. Известно, что система уравнений динамики сплошных сред, которая записана на основе законов сохранения, не полна. Следовательно, проблема замыкания этой системы в случае растворов и расплавов полимеров различного строения является одной из современных фундаментальных проблем, стоящих перед естественными науками. В случае моделирования течений полимерных жидкостей такое замыкание осуществляется на основе формулировки реологического определяющего соотношения. Это соотношение устанавливает связь между напряжениями в полимерной системе и кинематическими характеристиками течения. Как и всякая математическая модель нуждается во всестороннем обосновании. Для этого используют как методы статистической механики, при выводе реологического определяющего соотношения [2, 4, 5], так и сравнение с экс-