5. Прауст Р.Э. Апология и проблематика семейного сельского хозяйства // Изд-во «Экономика российских деревень» (ЭРД), Всероссийский институт аграрных проблем и информатики имени А.А. Никонова (ВИАПИ), 2008. – Вып. 11. – 249 с.

6. Лысенко Е.Г. Личные подсобные хозяйства населения в структуре сельскохозяйственного производства // Вестн. РАСН. – 2007. – № 1. – С. 13–15.

УДК. 517.958

Неявные итерационные схемы для стационарных задач гидродинамики

Е.К. Ергалиев, А.Б. Тойганбаев, А.Солтанбеккызы

ВКГУ им. С. Аманжолова, г. Усть-Каменогорск, Казахстан

Рассматривается стационарная задача несжимаемой жидкости в переменных «вектор скорости, давление». Для построенной итерационной схемы показана ограниченность итерации и скорость сходимости.

В прямоугольной области $D=\{0\le x_\alpha \le l_\alpha, \alpha=1,2,\ldots,N\}$ рассматриваем стационарную систему уравнений несжимаемой жидкости

$$(\vec{U},\nabla)\vec{U}+grad p=\nu\Delta\vec{U}+\vec{f}\,, \tag{1}$$

$$div\vec{U}=0\,, \tag{2}$$

с краевыми условиями

$$\vec{U}\Big|_{\partial D}=0\,, \tag{3}$$

где $\vec{U}=(U_1,U_2,\ldots,U_N)$ – вектор скорости, $\vec{f}=(f_1,f_2,\ldots,f_N)$ – вектор-функция источников, p – гидростатическое давление, ν – коэффициент вязкости, $N=2,3$ – пространственная размерность задачи.

Для численного решения задачи (1)–(3) конечно-разностным методом рассмотрим итерационную схему вида

$$\frac{U^{n+1}-U^n}{\tau}+L_h\vec{U}^{n+1}+\overline{grad}_h\,p^{n+1}=\nu\Delta_h U^{n+1}+\vec{f}^{\,n}\,, \tag{4}$$

$$\varepsilon\frac{p^{n+1}-p^n}{\tau}+\underline{div}_h\vec{U}^{n+1}=0\,, \tag{5}$$

с однородными краевыми условиями

$$\vec{U}^{n+1}\Big|_{\partial D_h}=0\,, \tag{6}$$

где τ,ε — положительные итерационные параметры.

Здесь и в далее сохранены общеизвестные обозначения из теории разностных схем [1]. Предположим, что операторы L_h, $m=\overline{1,N}$, соответствующие аппроксимации конвективных членов, являются энергетически “нейтральными”, т.е. [2, 3]

$$(L_h U_m, U_m)=0 \quad , \quad \forall m=\overline{1,N}. \tag{7}$$

Для доказательства ограниченности итерации (4)–(6) умножим уравнение (4) скалярно в L_2 на $2\tau U^{n+1}$, а уравнение (5) – скалярно в L_2 на $2\tau\, p^{n+1}$. Полученные результаты складываем, тогда

$$\begin{gathered}\left\|\vec{U}^{n+1}-\vec{U}^{n}\right\|^2+\left\|\vec{U}^{n+1}\right\|^2-\left\|\vec{U}^{n}\right\|^2+\\ +2\tau\nu\left\|\nabla_h\vec{U}^{n+1}\right\|^2+\varepsilon(\left\|p^{n+1}\right\|^2-\left\|p^{n}\right\|^2)+\\ +\frac{\tau^2}{\varepsilon}\left\|div\vec{U}^{n+1}\right\|^2=2\tau(\vec{f},\vec{U}^{n+1}).\end{gathered} \tag{8}$$

Из уравнения (4) оценим норму $\left\|p^{n+1}\right\|$,

$$\left\|p^{n+1}\right\|\le c_0(\frac{1}{\tau}\left\|\vec{U}^{n+1}-\vec{U}^{n}\right\|+\nu\left\|\nabla_h\vec{U}^{n+1}\right\|+c_1\left\|\vec{U}^{n}\right\|\cdot\left\|\nabla_h\vec{U}^{n+1}\right\|+\left\|\vec{f}\right\|_{-1}),$$

где $\left\|\vec{f}\right\|_{-1}=\sup\limits_{\vec{\varphi}\in H_0^1}\dfrac{(\vec{f},\varphi)}{\left\|\nabla\vec{\varphi}\right\|}, \quad \vec{\varphi}\in H_0^1.$

Возведя обе части в квадрат, оценивая правую часть, получим

$$\begin{gathered}\left\|p^{n+1}\right\|^2\le 4c_0^2(\frac{1}{\tau^2}\left\|\vec{U}^{n+1}-\vec{U}^{n}\right\|^2+\nu^2\left\|\nabla_h\vec{U}^{n+1}\right\|^2+\\ +c_1^2\left\|\vec{U}^{n}\right\|^2\cdot\left\|\nabla_h\vec{U}^{n+1}\right\|^2+\left\|\vec{f}\right\|_{-1}^2)\end{gathered}.$$

Далее, умножим обе части полученного неравенства на $\varepsilon\gamma\tau^2$, складывая с (8), имеем

$$\begin{gathered}\left\|\vec{U}^{n+1}\right\|^2-\left\|\vec{U}^{n}\right\|^2+(1-4c_0^2\varepsilon\gamma)\left\|\vec{U}^{n+1}-\vec{U}^{n}\right\|^2+\\ +2\tau(\nu-2c_0^2\varepsilon\gamma\tau(\nu^2+c_1^2\left\|\vec{U}^{n}\right\|^2))\left\|\nabla_h\vec{U}^{n+1}\right\|^2+\\ +\varepsilon(1+\gamma\tau^2)\left\|p^{n+1}\right\|^2-4c_0^2\varepsilon\gamma\tau^2\left\|\vec{f}\right\|_{-1}^2-\varepsilon\left\|p^{n}\right\|^2\le\tau\left\|\vec{f}\right\|_{-1}^2.\end{gathered} \tag{9}$$

Из (9) следует оценка

$$\left\|\vec{U}^{n+1}\right\|^2+(1-4c_0^2\varepsilon\gamma)\left\|\vec{U}^{n+1}-\vec{U}^n\right\|^2+$$
$$+2\tau(\nu-2c_0^2\varepsilon\gamma\tau(\nu^2+c_1^2M^2))\left\|\nabla_h\vec{U}^{n+1}\right\|^2+ \tag{10}$$
$$+\varepsilon(1+\gamma\tau^2)\left\|p^{n+1}\right\|^2\le\left\|\vec{U}^n\right\|^2+\varepsilon\left\|p^n\right\|^2+\tau(1+4c_0^2\varepsilon\gamma\tau)\left\|\vec{f}\right\|_{-1}^2,$$

где M положительная константа. Пусть $\left\|\vec{U}^n\right\|^2+\varepsilon\tau\left\|p^n\right\|^2\le M^2$, тогда M выбираем так, чтобы выполнялось неравенство

$$\left\|\vec{U}^{n+1}\right\|^2+\varepsilon\tau\left\|p^{n+1}\right\|^2\le M^2. \tag{11}$$

При фиксированном M выбираем ε,τ таким образом, чтобы выполнялись неравенства,

$$1-4c_0^2\varepsilon\gamma\ge 0,$$
$$\nu-2c_0^2\varepsilon\gamma\tau(\nu^2+c_1^2M^2)\ge 0.5\ .$$

Тогда из неравенства (10) имеем,

$$(1+\frac{\tau}{2})\left\|\vec{U}^{n+1}\right\|^2+\varepsilon(1+\gamma\tau^2)\left\|p^{n+1}\right\|^2\le\left\|\vec{U}^n\right\|^2+\varepsilon\left\|p^n\right\|^2+2\tau\left\|\vec{f}\right\|_{-1}^2 \tag{12}$$

Из (12) видно, что для выполнения (11) достаточно, чтобы имела место оценка

$$(1+c_2\tau^2)^{-1}(M^2+2\tau\left\|\vec{f}\right\|_{-1}^2)\le M^2,$$

где $c_2=\min\{0.5,\gamma\}$. Из последнего неравенства получаем следующую оценку ограниченности итерации (4)–(6)

$$M^2\ge\max\{\left\|\vec{U}^0\right\|^2+\varepsilon\tau\left\|p^0\right\|^2,\frac{2}{c_2}\left\|\vec{f}\right\|_{-1}^2\}..$$

Библиографический список

1. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 552 с.

2. Данаев Н.Т., Ергалиев Е.К. Об одном итерационном методе решения стационарных уравнений Навье-Стокса // Вычислительные технологии. – Новосибирск, 2006. Т. 11, №4. – С. 37–43.

3. Ергалиев Е.К. Неявные итерационные схемы для решения стационарных задач несжимаемой жидкости с большим запасом устойчивости // Известия Алтайского государственного университета. – Барнаул, 2018. – №1(99). – С. 81–87.