МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФГБОУ ВО «АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Физико-технический факультет
Кафедра радиофизики и теоретической физики

ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ И ВАРИАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

Методические указания

Барнаул, 2019

УДК 517.968.2 + 517.972

Задания к практическим занятиям по интегральным уравнениям и вариационному исчислению: методические указания. — Барнаул: изд-во АлтГУ, 2019. —12 с.

Составитель:
канд. физ.-мат. наук *А. И. Гончаров*

Рецензент:
канд. физ.-мат. наук *Н. В. Волков*

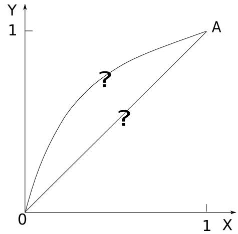
Методичка предназначена для студентов, обучающихся по направлениям 03.03.02 «Физика» и 03.03.03 «Радиофизика». Она содержит задачи, которые разбираются на практических занятиях по предмету «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» и предлагаются в качестве домашних заданий. Часть задач, — возможно, с изменением формулировки, — взята из книг, список которых приведен в конце методички.

Печатается по решению кафедры радиофизики и теоретической физики и учебно-методической комиссии физико-технического факультета.

Подписано в печать 15.05.2019. Формат 60 × 84/16.
Усл. печ. л. 0,7. Тираж 100 экз. Заказ 244.
Типография Алтайского государственного университета:
656049, Барнаул, ул. Димитрова, 66.

Задача №1 (Кратчайшая линия на плоскости)

На плоскости даны две точки: $O = (0, 0)$ и $A = (1, 1)$. С помощью методов вариационного исчисления найдите непрерывную кривую $y(x)$, проходящую через эти точки, длина которой l_{OA} минимальна.

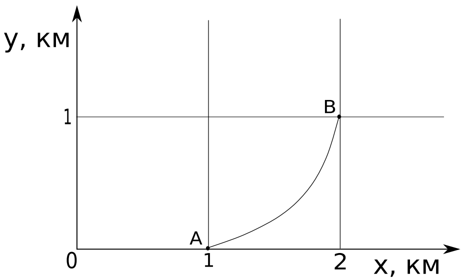


План решения

1. Запишите формулу для l_{OA}. Укажите граничные условия.
2. Выясните, относится ли эта задача к числу тех, которые сводятся к уравнению Эйлера или одному из его первых интегралов.
3. В случае положительного ответа
   (a) запишите в общем виде соответствующее уравнение;
   (b) подставьте F в уравнение, вычислите частные производные;
   (c) найдите общее решение полученного дифференциального уравнения для $y(x)$;
   (d) учтите граничные условия.

Задача №2 («Ходьба по болоту»)

Найдите траекторию $y(x)$, при движении по которой со скоростью $v = 2x$ км/час можно попасть из точки $A = (1, 0)$ в точку $B = (2, 1)$ за наименьшее время.



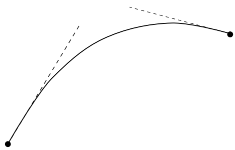
Задача №3 («Принцип Ферма»)

Луч света распространяется в неоднородной среде со скоростью, зависящей от координаты y: $v = 5y$. Найдите траекторию луча, если известно, что она проходит через точки $(0, 1)$, $(1, 2)$. Нарисуйте (приблизительно) график.

Задача №4 («Кубический сплайн»)

Найдите форму $y(x)$ упругой линейки, концы которой закреплены в заданных точках и, кроме того, заданы углы наклона касательных в точках закрепления. Сила тяжести отсутствует; действуют только силы упругости.

Указание. Потенциальная энергия силы упругости участка линейки $[x_1, x_2]$ приближенно равна $U = k\int\limits_{x_1}^{x_2} (y''(x))^2\,dx$, где $k > 0$ — константа.

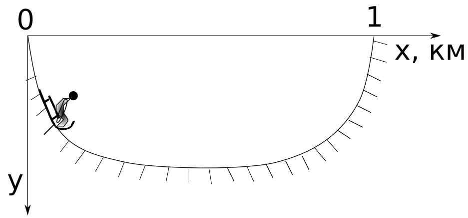


План решения

1. Напишите полную постановку задачи, указав, кроме функционала, граничные условия (в общем виде) для $y(x)$ и $y'(x)$.
2. Докажите, что эта задача не может быть решена с помощью уравнения Эйлера.
3. Запишите необходимое условие экстремума функционала $U[y]$. Вычислите вариацию функционала (используйте формулу, которая содержит производную по параметру).
4. Полученную формулу для δU проинтегрируйте по частям необходимое число раз, чтобы исключить $\delta y''$ и $\delta y'$ из подынтегрального выражения. Учтите, что, согласно граничным условиям, на границах $\delta y'$ и δy равны нулю.
5. Исходя из преобразованного уравнения $\delta U = 0$ и основной леммы вариационного исчисления, получите дифференциальное уравнение для $y(x)$.
6. Найдите общее решение уравнения. Постоянные интегрирования находить не нужно.

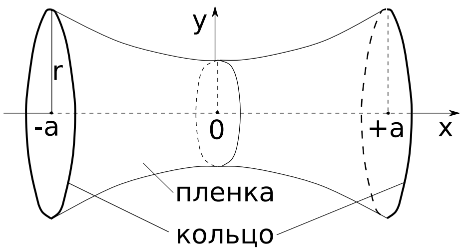
Задача №5 (Задача о брахистохроне)

Найдите форму горки $y(x)$, по которой можно было бы проехать из точки $(0, 0)$ в точку $(1, 0)$ за наименьшее время, если бы отсутствовало трение.



Задача №6

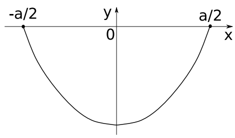
Найдите форму мыльной пленки, натянутой на два одинаковых колечка, расположенных перпендикулярно их линии центров (нужно найти уравнение $y(x)$ образующей). Силы тяжести нет. Покажите, что если уравнение $\operatorname{ch}(ac) = rc$ для постоянной интегрирования c имеет два корня, то только один из них соответствует минимуму площади пленки.



Задача №7 («Цепная линия»)

Нерастяжимая цепь длиной l висит неподвижно. Ее концы закреплены в точках $(\pm a/2, 0)$. Найдите форму $y(x)$ цепи, исходя из того, что в состоянии устойчивого равновесия потенциальная энергия минимальна. Для частного случая $l = 150$ см, $a = 75$ см найдите все константы и вычислите координату $y(0)$ нижней точки.

Указание. Так как цепь нерастяжимая, то потенциальная энергия сил упругости равна нулю, и имеется только потенциальная энергия силы тяжести. Нерастяжимость цепи приводит также к тому, что эта задача — на условный экстремум.

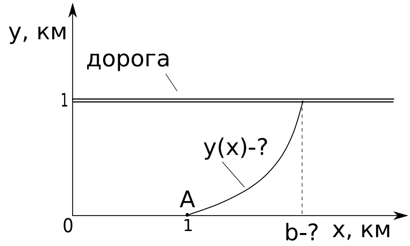


План решения

1. Выведите общую формулу для потенциальной энергии U цепи формы $y(x)$. Уровень y_0, которому соответствует нулевая потенциальная энергия материальной точки, выберите по своему усмотрению.
2. Напишите полную постановку задачи, указав, кроме функционала $U[y]$, граничные условия и интегральное условие (связь) для длины цепи.
3. Запишите функцию F^* и 1-й интеграл уравнения Эйлера. Выведите дифференциальное уравнение для $y(x)$.
4. Найдите общее решение; оно должно содержать три константы, одна из которых — множитель Лагранжа.
5. С помощью граничных условий найдите одну из констант.
6. На основе интегрального условия и полученной формулы для $y(x)$ выведите еще одно уравнение для констант. Для частного случая $l = 2a$ решите его численно; при $a = 75$ см найдите вторую константу, а затем из $y(a/2) = 0$ — множитель Лагранжа.
7. Вычислите $y(0)$ и сравните с результатом измерения.

Задача №8 (Задача с подвижной границей о ходьбе по болоту)

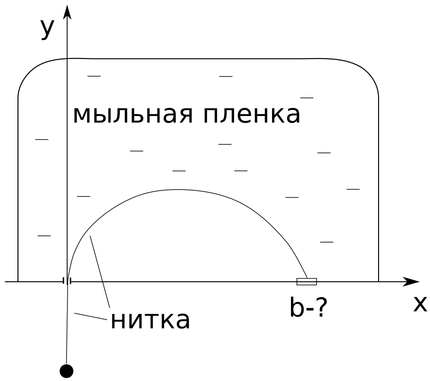
В задаче №2 требовалось найти оптимальную траекторию $y(x)$ при движении между двумя заданными точками. В этой задаче скорость и начальная точка те же: $v = 2x$ км/час, $A = (1, 0)$. Отличие в том, что нужно за наименьшее время выйти на дорогу, уравнение которой $y = 1$. Таким образом, для конечной точки y-координата известна: $y(b) = 1$, а x-координата b неизвестна.



Задача №9 (Задача с подвижной границей)

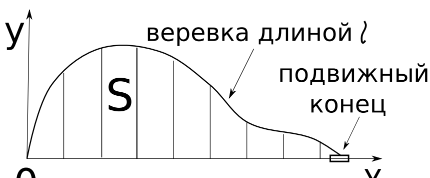
Внутри рамки находится нитка, один конец которой может свободно скользить по оси x, а другой выходит за пределы рамки через маленькое отверстие в точке $x = 0$, и к нему подвешен груз весом P. Полная длина нитки равна l. Между рамкой и ниткой с одной стороны имеется мыльная пленка, коэффициент поверхностного натяжения σ. В начальный момент площадь области между ниткой и осью x была равна S. Найдите форму нити $y(x)$ внутри рамки (в том числе координату b) после того, как груз отпустили и система пришла в устойчивое равновесие.

Указание. Выясните, является ли минимумом найденный экстремум потенциальной энергии. Рассмотрите вопрос об *устойчивом* равновесии.



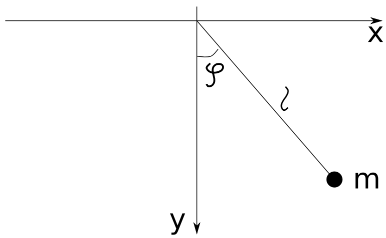
Задача №10 (Задача Дидоны)

Имеется веревка длиной l. Один ее конец закреплен в точке $(0, 0)$, а второй конец — подвижный — может находиться в произвольной точке отрезка $[0, l]$ на оси x. Найдите форму веревки, при которой площадь контура, образованного веревкой и осью x, будет наибольшей.



Задача №11

1. Выведите дифференциальное уравнение для функции $\varphi(t)$, описывающей колебания математического маятника, исходя из уравнения Лагранжа II рода.
2. Выведите систему дифференциальных уравнений для функций $x(t)$, $y(t)$, описывающих колебания математического маятника, исходя из принципа Гамильтона и метода множителей Лагранжа. Выясните физический смысл множителя Лагранжа.



Задача №12 (Типовая задача на безусловный экстремум)

Найдите функцию $y(x)$, при которой выполняется необходимое условие экстремума функционала

$$v[y] = \int\limits_0^{\pi/2} ({y'}^2(x) - 2xy'(x) - y^2(x))dx,$$

если $y(x)$ удовлетворяет граничным условиям $y(0) = 0,\ y(\pi/2) = 0$.

Задача №13 (Типовая изопериметрическая задача)

Найдите функцию $y(x)$, при которой выполняется необходимое условие экстремума функционала

$$v[y] = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2}{y'}^2(x) + x\right) dx,$$

если $y(x)$ удовлетворяет граничным условиям $y(0) = 0,\ y(1) = 0$ и условию

$$\int\limits_0^1 ydx = \frac{1}{6}.$$

Задача №14 (Типовая задача с подвижной границей)

Найдите функции $y(x)$, при которых выполняется необходимое условие экстремума функционала

$$v[y] = \int\limits_0^1 \left(y'^2(x) + 2y(x) + \sin x\right)\, dx,$$

если $y(x)$ удовлетворяет граничному условию $y(1) = \frac{3}{2}$, а значение $y(0)$ не задано (подвижная граница).

Задача №15

Найдите собственные функции и собственные значения уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^1 (x - s)\varphi(s)\, ds.$$

Задача №16

1. Найдите собственное значение уравнения $\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^1 \varphi(s)\, ds$.
2. Решите в общем виде уравнение $y(x) = f(x) + \mu \int\limits_0^1 y(s)\, ds$.
3. Существует ли найденное решение $y(x)$, и если да, то единственно ли оно, в следующих случаях.
   (a) $\mu \neq 1,\ f(x)$ — любая интегрируемая функция;
   (b) $\mu = 1,\ f(x) = 2x$;
   (c) $\mu = 1,\ f(x) = 2x - 1$.

Прокомментируйте полученные результаты в свете теорем Фредгольма.

Задача №17

Решите уравнение $y(x) = x + x \int\limits_0^x s y(s)\, ds$.

Задача №18

Решите уравнение

$$y(x) = e^{-x} - \int\limits_0^x e^{s-x} y(s)\, ds$$

следующими методами:

1. Методом дифференцирования.
2. Методом последовательных приближений.
3. Методом преобразования Лапласа.

Задача №19

Решите интегро-дифференциальное уравнение

$$y'(x) - \int\limits_0^x y(s)\, ds = x$$

с граничным условием $y(0) = 0$ методом преобразования Лапласа.

Задача №20

Решите уравнение Фредгольма типа свертки методом преобразования Фурье:

$$y(x) = e^{-|x|} + \frac{3}{8} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-s|} y(s)\, ds.$$

Задача №21

Решите уравнение Фредгольма типа свертки методом преобразования Фурье:

$$\frac{1}{x^2+4} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-s)^2+1} y(s)\, ds.$$

Задача №22

Решите уравнение $y(x) = 1 + 2\int\limits_0^1 y(s) ds$.

Задача №23

Решите уравнение $y(x) = 4 + 6\int\limits_0^1 (x - s)y(s)ds$.

Задача №24

Имеет ли решение следующее уравнение с вырожденным ядром:

$$y(x) = 1 + \int\limits_0^1 y(s)ds?$$

Задача №25

1. Имеет ли решение уравнение

$$y(x) = \sin x + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \cos^2(xs)y(s)ds?$$

2. Имеет ли нетривиальные решения уравнение

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \cos^2(xs)\varphi(s)ds?$$

Ответы нужно обосновать.

Задача №26

1. Имеет ли решение уравнение $y(x) = e^x + \int\limits_0^x e^{xs}y(s)ds$?

2. Имеет ли нетривиальные решения уравнение

$$\varphi(x) = \int\limits_0^x e^{xs}\varphi(s)ds?$$

Ответы нужно обосновать.

Задача №27

Решите методом последовательных приближений уравнение

$$y(x) = 1 + \int\limits_0^x y(s)ds.$$

Задача №28

Решите уравнение Вольтерры с вырожденным ядром методом дифференцирования:

$$y(x) = 1 + \int\limits_0^x (x-s)y(s)ds.$$

Задача №29

Решите методом преобразования Лапласа уравнение

$$y(x) = 1 + \int\limits_0^x (x-s)y(s)ds.$$

Задача №30

Решите методом преобразования Лапласа уравнение

$$x^3 = 3\int\limits_0^x (x-s)^2 y(s)ds.$$

Табличный интеграл:

$$\int\limits_0^\infty t^n e^{-t}dt = n!$$

Литература

1. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.:Эдиториал УРСС, 2002. — 320 с.

2. Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения. — СПб.: Лань, 2009. — 160 с.

3. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики. — М.: Наука, 1967. — 648 с.