Заслуженный учитель Российской Федерации

Евгения Владимировна Напалкова

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КЛАССИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДНЫЕ ТЕМЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ВЫСОКОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ

XX турнир математических боев Барнаула, посвященный памяти заслуженного учителя России Евгении Владимировны Напалковой

Учебное пособие

Барнаул

Издательство
Алтайского государственного
университета
2019

УДК 51 (076.1)
ББК 22.1м. я72-4
С 147

Рецензент – профессор кафедры математического анализа АлтГУ,
д. ф-м. н. ***Е.Д. Родионов***

С 147 Саженков, Александр Николаевич
Классические олимпиадные темы и математические задачи высокого уровня сложности. XX турнир математических боев Барнаула, посвященный памяти заслуженного учителя России Евгении Владимировны Напалковой : учебное пособие / А.Н. Саженков, Д.Н. Оскорбин, Т.В. Саженкова. – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та. – 2019. – 76 с.

ISBN 978-5-7904-2365-9

В пособии представлены задания XX турнира математических боев Барнаула, посвященного памяти заслуженного учителя России Евгении Владимировны Напалковой. Среди задач, предлагавшихся участникам турнира, представлены задачи как из классических олимпиадных тем по математике, так и задачи традиционной элементарной математики, но повышенного уровня сложности. Турнир проводился по трём возрастным группам, в каждой группе осуществлялось деление на три уровня сложности: высшая, первая и вторая лиги. Задания для турнира составлены с использованием задач из различных источников, среди них представлено несколько оригинальных задач составителей данного практикума. Задания для девятиклассников составлены И.М. Исаевым и О.В. Никитенко В пособии приведены решения практически всех задач турнира.

Предлагаемый в пособии материал может быть использован для факультативных занятий со школьниками и студентами, а также самостоятельного совершенствования в решении математических задач.

УДК 51 (076.1)
ББК 22.1м. я72-4

ISBN 978-5-7904-2365-9

© Саженков А.Н., Оскорбин Д.Н.,
Саженкова Т.В., 2019
© Оформление. Издательство Алтайского
государственного университета, 2019

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Турниры математических боев между командами школьников г. Барнаула впервые были проведены в феврале 1999 года по инициативе учителя математики школы-гимназии № 42 Оскорбина Дмитрия Николаевича – ученика Напалковой Евгении Владимировны, и сразу стали завоевывать популярность. В первом турнире приняло участие 10 команд, в третьем турнире было 14 команд, в том числе команда Бийского лицея и команда студентов Алтайского и Новосибирского госуниверситетов, составленная из выпускников барнаульских школ, причем эта команда и стала победителем турнира в высшей лиге. IV турнир математических боев был посвящен памяти заслуженного учителя России Напалковой Евгении Владимировны. В дальнейшем турнир стал завоёвывать популярность в Сибири: в разные годы принимали участие команды Новосибирска, Бердска, Красноярска, Томска, Новокузнецка, Железногорска, республики Алтай и Алтайского края – из Усть-Тальменки, Заринска, Змеиногорского района, Шебалино. Команды Бийского лицея-интерната – постоянные участницы турнира. Турнир, начиная с 2017 года, поддерживается Министерством образования и науки Алтайского края, Центром по работе с одаренными детьми в Алтайском крае и носит название «Математические бои команд школ Алтайского края и городов Сибири памяти Е.В. Напалковой». В жюри турнира входят ведущие учителя математики края, преподаватели и студенты факультета математики и информационных технологий Алтайского государственного университета и других вузов.

В настоящем пособии представлены задачи юбилейного XX турнира. В турнире приняли участие 60 команд. Команды были разбиты по трём возрастным группам, в каждой группе осуществлялось деление на три уровня сложности: высшая, первая и вторая лиги. Из достаточно простых задач составлены задания для вторых лиг турнира, которые позволяют начать знакомство с олимпиадными темами. Есть куда более сложные задачи, которые могут быть полезны как дополнительный материал при подготовке к математическим олимпиадам высокого уровня, по ним играли в высших лигах турнира. Таким образом, материалы пособия могут стать основой для занятий кружка на 3-4 года. Задания для турнира составлены с использованием задач из различных источников, часть из которых приведена в библиографическом списке, а также среди них представлено несколько оригинальных задач составителей данного пособия. Задания для девятиклассников составлены Исаевым И.М. и Никитенко О.В. В пособии приведены решения практически всех задач турнира.

Часть 1. Условия задач

Младшая группа: 8 класс высшая лига, первая лига, вторая лига, лига 7-8 класс, 7 класс высшая лига, первая лига, вторая лига

Математический бой № 1, 8 класс, высшая лига

1. В выпуклом семиугольнике проведены некоторые диагонали так, что никакие три из них не образуют треугольник с вершинами в вершинах исходного семиугольника. Какое наибольшее число диагоналей могло быть проведено? Приведите пример и докажите, что никаким способом большего числа диагоналей провести нельзя.

2. Докажите, что если $n + 1 < k < 2n$, то n различных прямых не могут разделить плоскость на k частей.

3. Федор задумал число, делящееся на 300, и выписал на доске все его делители, кроме самого числа. Докажите, что сумма нечетных чисел, выписанных на доске, меньше суммы четных.

4. Несколько команд играли однокруговой турнир (каждая команда играет с каждой одну партию). В некоторый момент оказалось, что среди любых четырех команд имеется хотя бы одна команда, которая успела сыграть с тремя другими командами. Доказать, что командам осталось сыграть не более трех игр.

5. Сумма цифр натурального числа x равна n. Всегда ли между x и $10\cdot x$ можно найти натуральное число с суммой цифр $n + 5$?

6. В остроугольном треугольнике одна из сторон равна опущенной на нее высоте. Как такой треугольник разрезать двумя прямолинейными разрезами ровно на четыре части, из которых можно сложить квадрат?

7. Саша и Катя играют в следующую игру. У Саши есть 100 карточек, на которых написаны числа 1, 2, 3, …, 100. Саша выкладывает по две карточки на стол, а Катя забирает себе одну из них. В конце игры на столе остается 50 карточек. Если сумма чисел на них четна, выигрывает Саша, а если нечетна, то Катя. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

8. Половина клеток квадрата 4×4 белые, половина — черные. Докажите, что всегда можно вычеркнуть две строки и два столбца так, что в оставшейся части окажется поровну белых и черных клеток. Половина клеток квадрата 4×4 белые, половина — черные. Докажите, что всегда можно вычеркнуть две строки и два столбца так, что в оставшейся части окажется поровну белых и черных клеток.

Математический бой № 1, 8 класс, первая лига

1. В выпуклом семиугольнике проведены некоторые диагонали так, что никакие три из них не образуют треугольник с вершинами в вершинах исходного семиугольника. Какое наибольшее число диагоналей могло быть проведено? Приведите пример и докажите, что никаким способом большего числа диагоналей провести нельзя.

2. В 8 «А» и 8 «Б» поровну учеников. Оба класса написали контрольную работу. Проверив контрольные работы, учитель сказал, что он поставил двоек на 13 больше, чем остальных оценок. Не ошибся ли учитель?

3. На столе лежат четыре монеты. Их взвешивают на чашечных весах. Оказалось, что первая и вторая весят меньше, чем две другие; первая и третья равны по массе двум оставшимся, а первая и четвертая весят больше двух оставшихся. Какая монета самая тяжелая?

4. Докажите, что пять различных прямых не могут разделить плоскость на 8 частей.

5. Среди 20 внешне одинаковых монет, лежащих в ряд, есть фальшивые. На каждую монету наклеена бирка, на которой указано количество фальшивых среди следующих монет: монеты, на которую наклеена бирка, и ее соседей. Обязательно ли по числам на бирках всегда можно определить хотя бы одну фальшивую монету?

6. Сумма цифр натурального числа x равна n. Всегда ли между x и $10 \cdot x$ можно найти натуральное число с суммой цифр $n + 5$?

7. В остроугольном треугольнике одна из сторон равна опущенной на нее высоте. Как такой треугольник разрезать двумя прямолинейными разрезами ровно на четыре части, из которых можно сложить квадрат?

8. Саша и Катя играют в следующую игру. У Саши есть 100 карточек, на которых написаны числа 1, 2, 3, …, 100. Саша выкладывает по две карточки на стол, а Катя забирает себе одну из них. В конце игры на столе остается 50 карточек. Если сумма чисел на них четна, выигрывает Саша, а если нечетна, то Катя. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

Математический бой № 1, 7-8 класс, первая лига

1. В выпуклом семиугольнике проведены некоторые диагонали так, что никакие три из них не образуют треугольник с вершинами в вершинах исходного семиугольника. Какое наибольшее число диагоналей могло быть проведено? Приведите пример и докажите, что никаким способом большего числа диагоналей провести нельзя.

2. В 7 «А» и 7 «Б» поровну учеников. Оба класса написали контрольную работу. Проверив контрольные работы, учитель сказал, что он поставил двоек на 13 больше, чем остальных оценок. Не ошибся ли учитель?

3. На столе лежат четыре монеты. Их взвешивают на чашечных весах. Оказалось, что первая и вторая весят меньше, чем две другие; первая и третья равны по массе двум оставшимся, а первая и четвертая весят больше двух оставшихся. Какая монета самая тяжелая? Ответ обосновать.

4. Докажите, что пять различных прямых не могут разделить плоскость на 8 частей.

5. Несколько команд играли однокруговой турнир (каждая команда играет с каждой одну партию). В некоторый момент оказалось, что среди любых четырех команд имеется хотя бы одна команда, которая успела сыграть с тремя другими командами. Доказать, что командам осталось сыграть не более трех игр.

6. Среди 20 внешне одинаковых монет, лежащих в ряд, есть фальшивые. На каждую монету наклеена бирка, на которой указано количество фальшивых среди следующих монет: монеты, на которую наклеена бирка, и ее соседей. Обязательно ли по числам на бирках всегда можно определить хотя бы одну фальшивую монету?

7. Сумма цифр натурального числа x равна n. Всегда ли между x и $10 \cdot x$ можно найти натуральное число с суммой цифр $n + 5$?

8. Саша и Катя играют в следующую игру. У Саши есть 100 карточек, на которых написаны числа 1, 2, 3, …, 100. Саша выкладывает по две карточки на стол, а Катя забирает себе одну из них. В конце игры на столе остается 50 карточек. Если сумма чисел на них четна, выигрывает Саша, а если нечетна, то Катя. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

Математический бой № 1, 7 класс, высшая лига

1. В выпуклом семиугольнике проведены некоторые диагонали так, что никакие три из них не образуют треугольник с вершинами в вершинах исходного семиугольника. Какое наибольшее число диагоналей могло быть проведено? Приведите пример и докажите, что никаким способом большего числа диагоналей провести нельзя.

2. На столе лежат четыре монеты. Их взвешивают на чашечных весах. Оказалось, что первая и вторая весят меньше, чем две другие; первая и третья равны по массе двум оставшимся, а первая и четвертая весят больше двух оставшихся. Какая монета самая тяжелая? Ответ обосновать.

3. Докажите, что если $n + 1 < k < 2n$, то n различных прямых не могут разделить плоскость на k частей.

4. Федор задумал число, делящееся на 300, и выписал на доске все его делители, кроме самого числа. Докажите, что сумма нечетных чисел, выписанных на доске, меньше суммы четных.

5. Несколько команд играли однокруговой турнир (каждая команда играет с каждой одну партию). В некоторый момент оказалось, что среди любых четырех команд имеется хотя бы одна команда, которая успела сыграть с тремя другими командами. Доказать, что командам осталось сыграть не более трех игр.

6. Сумма цифр натурального числа $\underline{x}$ равна n. Всегда ли между x и $10 \cdot x$ можно найти натуральное число с суммой цифр $n + 5$?

7. Саша и Катя играют в следующую игру. У Саши есть 100 карточек, на которых написаны числа 1, 2, 3, …, 100. Саша выкладывает по две карточки на стол, а Катя забирает себе одну из них. В конце игры на столе остается 50 карточек. Если сумма чисел на них четна, выигрывает Саша, а если нечетна, то Катя. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

8. На уроке физкультуры все ученики класса построились в шеренгу. Оказалось, что мальчики и девочки в шеренге чередуются. Известно, что ровно 52% учеников – девочки. Найдите количество мальчиков в классе.

Математический бой № 1, 7 класс, первая лига

1. В выпуклом семиугольнике проведены некоторые диагонали так, что никакие три из них не образуют треугольник с вершинами в вершинах исходного семиугольника. Какое наибольшее число диагоналей могло быть проведено? Приведите пример и докажите, что никаким способом большего числа диагоналей провести нельзя.

2. В 7 «А» и 7 «Б» поровну учеников. Оба класса написали контрольную работу. Проверив контрольные работы, учитель сказал, что он поставил двоек на 13 больше, чем остальных оценок. Не ошибся ли учитель?

3. На столе лежат четыре монеты. Их взвешивают на чашечных весах. Оказалось, что первая и вторая весят меньше, чем две другие; первая и третья равны по массе двум оставшимся, а первая и четвертая весят больше двух оставшихся. Какая монета самая тяжелая?

4. Среди 20 внешне одинаковых монет, лежащих в ряд, есть фальшивые. На каждую монету наклеена бирка, на которой указано количество фальшивых среди следующих монет: монеты, на которую наклеена бирка, и ее соседей.

Обязательно ли по числам на бирках всегда можно определить хотя бы одну фальшивую монету?

5. Сумма цифр натурального числа x равна 2014. Всегда ли между x и $10\cdot x$ можно найти натуральное число с суммой цифр 2019?

6. На уроке физкультуры все ученики класса построились в шеренгу. Оказалось, что мальчики и девочки в шеренге чередуются. Известно, что ровно 52% учеников – девочки. Найдите количество мальчиков в классе.

7. Саша и Катя играют в следующую игру. У Саши есть 100 карточек, на которых написаны числа 1, 2, 3, …, 100. Саша выкладывает по две карточки на стол, а Катя забирает себе одну из них. В конце игры на столе остается 50 карточек. Если сумма чисел на них четна, выигрывает Саша, а если нечетна, то Катя. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

8. Четырехугольник можно разделить диагональю на два равнобедренных прямоугольных треугольника. Чему могут быть равны углы такого четырехугольника? Укажите все варианты

Математический бой № 1, 7 класс, вторая лига

1. В выпуклом семиугольнике проведены некоторые диагонали так, что никакие три из них не образуют треугольник с вершинами в вершинах исходного семиугольника. Какое наибольшее число диагоналей могло быть проведено? Приведите пример и докажите, что никаким способом большего числа диагоналей провести нельзя.

2. В 7 «А» и 7 «Б» поровну учеников. Оба класса написали контрольную работу. Проверив контрольные работы, учитель сказал, что он поставил двоек на 13 больше, чем остальных оценок. Не ошибся ли учитель?

3. На столе лежат четыре монеты. Их взвешивают на чашечных весах. Оказалось, что первая и вторая весят меньше, чем две другие; первая и третья равны по массе двум оставшимся, а первая и четвертая весят больше двух оставшихся. Какая монета самая тяжелая?

4. Среди 20 внешне одинаковых монет, лежащих в ряд, есть фальшивые. На каждую монету наклеена бирка, на которой указано количество фальшивых среди следующих монет: монеты, на которую наклеена бирка, и ее соседей. Обязательно ли по числам на бирках всегда можно определить хотя бы одну фальшивую монету?

5. На уроке физкультуры все ученики класса построились в шеренгу. Оказалось, что мальчики и девочки в шеренге чередуются. Известно, что ровно 52% учеников – девочки. Найдите количество мальчиков в классе.

6. Саша и Катя играют в следующую игру. У Саши есть 100 карточек, на которых написаны числа 1, 2, 3, …, 100. Саша выкладывает по две карточки на стол, а Катя забирает себе одну из них. В конце игры на столе остается 50 карточек. Если сумма чисел на них четна, выигрывает Саша, а если нечетна, то Катя. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

7. Четырехугольник можно разделить диагональю на два равнобедренных прямоугольных треугольника. Чему могут быть равны углы такого четырехугольника? Укажите все варианты

8. Сумма цифр натурального числа x равна 10. Докажите, что между x и $10 \cdot x$ можно найти натуральное число с суммой цифр 15.

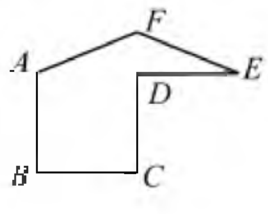
Математический бой № 2, 8 класс, высшая лига

1. В ряд слева направо стоят 8 одинаковых коробочек, в каждой по 13 одинаковых пуговиц. Из одной коробочки переложили одну пуговицу в соседнюю справа. Как двумя взвешиваниями на чашечных весах без гирь определить коробочку, в которой меньше пуговиц? Открывать коробочки нельзя.

2. Два натуральных числа называются подобными, если одно из них получается из другого вычеркиванием какой-то одной цифры (и, возможно, отбрасыванием впереди стоящих нулей). Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, которые не представимы в виде суммы двух подобных.

3. Целые числа x, y, z таковы, что $xy + yz + xz = 1$. Докажите, что число $(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2)$ является полным квадратом.

4. Дан шестиугольник $ABCDEF$ (см. рис.) Точки A, B, C, D – вершины квадрата, D – середина AE, $AF=FE$ и $\angle AFE = 135^\circ$. Разделите шестиугольник одной ломаной на две равные части.



5. Пусть x, y, z – длины сторон прямоугольного треугольника, причем $z > y \geq x$. Докажите, что $x > 2 \cdot (z - y)$.

6. Клетчатая бумажная полоска $2 \times n$ склеена в цилиндрическое кольцо высоты 2. Два игрока по очереди вырезают по одной клетке. Игрок, после хода которого полоска развернется (потеряет цилиндрическую связность), проигрывает. Кто выиграет при правильной игре - начинающий или его соперник? Две клетки, соседние по углу, считаются несвязанными.

7. Житель города считается богатым, если его месячный доход выше зарплаты профессора университета, иначе – небогатым. Докажите, что если доходы у всех разные, то можно установить профессору университета такую зарплату, чтобы богатых мужчин стало столько же, сколько небогатых женщин.

8. В выпуклом 12-угольнике все углы кратны 30 градусам. Докажите, что все углы этого многоугольника равны

Математический бой № 2, 8 класс, первая лига

1. Имеется шесть человек. Среди любых троих есть двое, которые не знают друг друга. Обязательно ли найдутся трое из этой шестерки, которые попарно незнакомы?

2. На матбои пришли 105 девочек и 95 мальчиков и разбились на сто пар. Каждые два мальчика, образовавшие пару, поздоровались за руку. Две девочки, образовавшие пару, обняли друг друга. Смешанные пары начали решать задачи. Чего оказалось больше: рукопожатий или объятий и на сколько?

3. В выпуклом 12-угольнике все углы кратны 30 градусам. Докажите, что все углы этого многоугольника равны.

4. На плоскости отметили 8 точек. Каждую пару точек соединили отрезком, затем к каждому такому отрезку построили серединный перпендикуляр. Могло ли на каждом из этих перпендикуляров оказаться ровно по две отмеченные точки?

5. В ряд слева направо стоят 8 одинаковых коробочек, в каждой по 13 одинаковых пуговиц. Из одной коробочки переложили одну пуговицу в соседнюю справа. Как двумя взвешиваниями на чашечных весах без гирь определить коробочку, в которой меньше пуговиц? Открывать коробочки нельзя.

6. Лотерея проводится следующим образом. Никита выбирает случайное число от 1 до 1000. Если число делится на 2, платят 1 рубль, если делится на 10 – 2 рубля, если делится на 12 – четыре рубля, на 20 – восемь, если оно делится на несколько числе, платят сумму. Сколько может выиграть Никита за один раз в такой игре? Укажите все варианты и докажите, что других нет.

7. Житель города считается богатым, если его месячный доход выше зарплаты профессора университета, иначе – небогатым. Докажите, что если доходы у всех разные, то можно установить профессору университета такую зарплату, чтобы богатых мужчин стало столько же, сколько небогатых женщин.

8. Пусть x, y, z – длины сторон прямоугольного треугольника, причем $z > y \geq x$. Докажите, что $x > 2\cdot(z - y)$.

Математический бой № 2, 7-8 класс, первая лига

1. В ряд слева направо стоят 8 одинаковых коробочек, в каждой по 13 одинаковых пуговиц. Из одной коробочки переложили одну пуговицу в соседнюю справа. Как двумя взвешиваниями на чашечных весах без гирь определить коробочку, в которой меньше пуговиц? Открывать коробочки нельзя.

2. Найдите все четверки попарно различных натуральных чисел a, b, c, d таких, что $ab = c + d$ и $cd = a + b$.

3. Имеется шесть человек. Среди любых троих есть двое, которые не знают друг друга. Обязательно ли найдутся трое из этой шестерки, которые попарно незнакомы?

4. Лотерея проводится следующим образом. Никита выбирает случайное число от 1 до 1000. Если число делится на 2, платят 1 рубль, если делится на 10 – 2 рубля, если делится на 12 – четыре рубля, на 20 – восемь, если оно делится на несколько числе, платят сумму. Сколько может выиграть Никита за один раз в такой игре? Укажите все варианты и докажите, что других нет.

5. В выпуклом 12-угольнике все углы кратны 30 градусам. Докажите, что все углы этого многоугольника равны.

6. На плоскости отметили 8 точек. Каждую пару точек соединили отрезком, затем к каждому такому отрезку построили серединный перпендикуляр. Могло ли на каждом из этих перпендикуляров оказаться ровно по две отмеченные точки?

7. Клетчатая бумажная полоска 2×5 склеена в цилиндрическое кольцо высоты 2. Два игрока по очереди вырезают по одной клетке. Игрок, после хода которого полоска развернется (потеряет цилиндрическую связность), проигрывает. Кто выиграет при правильной игре - начинающий или его соперник? Две клетки, соседние по углу, считаются несвязанными.

8. Житель города считается богатым, если его месячный доход выше зарплаты профессора университета, иначе — небогатым. Докажите, что если доходы у всех разные, то можно установить профессору университета такую зарплату, чтобы богатых мужчин стало столько же, сколько небогатых женщин.

Математический бой № 2, 7 класс, высшая лига

1. В ряд слева направо стоят 8 одинаковых коробочек, в каждой по 13 одинаковых пуговиц. Из одной коробочки переложили одну пуговицу в соседнюю справа. Как двумя взвешиваниями на чашечных весах без гирь определить коробочку, в которой меньше пуговиц? Открывать коробочки нельзя.

2. Два натуральных числа называются подобными, если одно из них получается из другого вычеркиванием какой-то одной цифры (и, возможно, отбрасыванием впереди стоящих нулей). Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, которые не представимы в виде суммы двух подобных.

3. Артем написал три натуральных числа (не обязательно различных) на доске, каждое из которых меньше 2019. Затем он стер эти числа (a, b, c) и вместо них написал $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}$. Когда он повторил это еще 10 раз, на доске появилось число 100. Какие еще числа записаны на доске в этот момент?

4. Лотерея проводится следующим образом. Никита выбирает случайное число от 1 до 1000. Если число делится на 2, платят 1 рубль, если делится на 10 – 2 рубля, если делится на 12 – четыре рубля, на 20 – восемь, если оно делится на несколько числе, платят сумму. Сколько может выиграть Никита за один раз в такой игре? Укажите все варианты и докажите, что других нет.

5. На плоскости отметили 8 точек. Каждую пару точек соединили отрезком, затем к каждому такому отрезку построили серединный перпендикуляр. Могло ли на каждом из этих перпендикуляров оказаться ровно по две отмеченные точки?

6. Найдите все четверки попарно различных натуральных чисел a, b, c, d таких, что $ab = c + d$ и $cd = a + b$.

7. Клетчатая бумажная полоска $2 \times n$ склеена в цилиндрическое кольцо высоты 2. Два игрока по очереди вырезают по одной клетке. Игрок, после хода которого полоска развернется (потеряет цилиндрическую связность), проигрывает. Кто выиграет при правильной игре – начинающий или его соперник? Две клетки, соседние по углу, считаются несвязанными.

8. Житель города считается богатым, если его месячный доход выше зарплаты профессора университета, иначе — небогатым. Докажите, что если доходы у всех разные, то можно установить профессору университета такую зарплату, чтобы богатых мужчин стало столько же, сколько небогатых женщин.

Математический бой № 2, 7 класс, первая лига

1. В ряд слева направо стоят 8 одинаковых коробочек, в каждой по 13 одинаковых пуговиц. Из одной коробочки переложили одну пуговицу в соседнюю справа. Как двумя взвешиваниями на чашечных весах без гирь определить коробочку, в которой меньше пуговиц? Открывать коробочки нельзя.

2. Имеется шесть человек. Среди любых троих есть двое, которые не знают друг друга. Обязательно ли найдутся трое из этой шестерки, которые попарно незнакомы?

3. Артем написал три натуральных числа (не обязательно различных) на доске, каждое из которых меньше 2019. Затем он стер эти числа (a, b, c) и вместо них написал $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}$. Когда он повторил это еще 10 раз, на доске появилось число 100. Какие еще числа записаны на доске в этот момент?

4. Лотерея проводится следующим образом. Никита выбирает случайное число от 1 до 1000. Если число делится на 2, платят 1 рубль, если делится на 10 – 2 рубля, если делится на 12 – четыре рубля, на 20 – восемь, если оно делится на несколько числе, платят сумму. Сколько может выиграть Никита за один раз в такой игре? Укажите все варианты и докажите, что других нет.

5. Клетчатая бумажная полоска $2 \times n$ склеена в цилиндрическое кольцо высоты 2. Два игрока по очереди вырезают по одной клетке. Игрок, после хода которого полоска развернется (потеряет цилиндрическую связность), проигрывает. Кто выиграет при правильной игре – начинающий или его соперник? Две клетки, соседние по углу, считаются несвязанными.

6. Житель города считается богатым, если его месячный доход выше зарплаты профессора университета, иначе — небогатым. Докажите, что если доходы у всех разные, то можно установить профессору университета такую зарплату, чтобы богатых мужчин стало столько же, сколько небогатых женщин.

7. Найдите все четверки попарно различных натуральных чисел a, b, c, d таких, что $ab = c + d$ и $cd = a + b$.

8. $2n$ гирек поставлены в ряд по возрастанию весов, причем веса соседних гирь отличаются на 1 грамм. При каких n гирьки можно разложить на чаши весов по n гирек на каждую чашу так, чтобы весы оказались в равновесии?

Математический бой № 2, 7 класс, вторая лига

1. В ряд слева направо стоят 8 одинаковых коробочек, в каждой по 13 одинаковых пуговиц. Из одной коробочки переложили одну пуговицу в соседнюю справа. Как двумя взвешиваниями на чашечных весах без гирь определить коробочку, в которой меньше пуговиц? Открывать коробочки нельзя.

2. Имеется шесть человек. Среди любых троих есть двое, которые не знают друг друга. Обязательно ли найдутся трое из этой шестерки, которые попарно незнакомы?

3. Лотерея проводится следующим образом. Никита выбирает случайное число от 1 до 1000. Если число делится на 2, платят 1 рубль, если делится на 10 – 2 рубля, если делится на 12 – четыре рубля, на 20 – восемь, если оно делится на несколько числе, платят сумму. Сколько может выиграть Никита за один раз в такой игре? Укажите все варианты и докажите, что других нет.

4. На матбои пришли 105 девочек и 95 мальчиков и разбились на сто пар. Каждые два мальчика, образовавшие пару, поздоровались за руку. Две девочки, образовавшие пару, обняли друг друга. Смешанные пары начали решать задачи. Чего оказалось больше: рукопожатий или объятий и на сколько?

5. Клетчатая бумажная полоска $2 \times n$ склеена в цилиндрическое кольцо высоты 2. Два игрока по очереди вырезают по одной клетке. Игрок, после хода которого полоска развернется (потеряет цилиндрическую связность), проигрывает. Кто выиграет при правильной игре – начинающий или его соперник? Две клетки, соседние по углу, считаются несвязанными.

6. Житель города считается богатым, если его месячный доход выше зарплаты профессора университета, иначе — небогатым. Докажите, что если доходы у всех разные, то можно установить профессору университета такую зарплату, чтобы богатых мужчин стало столько же, сколько небогатых женщин.

7. Найдите все четверки попарно различных натуральных чисел a, b, c, d таких, что $ab = c + d$ и $cd = a + b$.

8. $2n$ гирек поставлены в ряд по возрастанию весов, причем веса соседних гирь отличаются на 1 грамм. При каких n гирьки можно разложить на чаши весов по n гирек на каждую чашу так, чтобы весы оказались в равновесии?

Математический бой № 3, 8 класс, высшая лига, бои за 1-2 места

1. В ряд стоят 2019 стаканов, один вверх дном, остальные вниз дном. За один ход можно выбрать любой стакан, стоящий вверх дном, и перевернуть его соседей (или одного соседа, если стакан крайний). Найдите все позиции, на которых может располагаться изначально стакан, стоящий вверх дном, если оказалось, что такими операциями удалось поставить все стаканы вверх дном.

2. В клетках таблицы 8×8 написаны $+1$ и -1 так, что в любом квадрате 2×2 сумма написанных чисел оказалась равна 2 или -2. Докажите, что есть две строки, в которых написаны одинаковые числа.

3. Клетчатый квадрат со стороной 101 разрезали по линиям сетки на несколько прямоугольников. Докажите, что среди них есть хотя бы один прямоугольник, периметр которого делится на 4.

4. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$, в котором $AB=CD$, пересекаются в точке O. Серединные перпендикуляры к диагоналям AC и BD и биссектриса угла AOD проходят через одну точку. Докажите, что стороны AD и BC параллельны.

5. Две поварихи Аня и Таня хотят почистить 60 кг картошки и 60 кг морковки. Аня за один час чистит 3 кг картошки или 5 кг морковки, а Таня за один час чистит 2 кг картошки или 4 кг морковки. За какое минимальное время они могут справиться с работой?

6. Квадрат 23×23 разрезали на квадраты 1×1, 2×2 и 3×3. Какое наименьшее количество квадратов 1×1 могло получиться?

7. Можно ли выписать в ряд все натуральные числа, большие 1, так, чтобы любые два соседних числа были не взаимно просты?

8. По кругу стоят 2019 человек, каждый из которых либо лжец (он всегда врет), либо рыцарь (он всегда говорит правду). Некоторые из них сказали: «Мой правый сосед – лжец». Какое наибольшее количество таких людей могло быть?

Математический бой № 3, 8 класс, высшая лига, бои за 3-4 места, 8 класс, первая лига, 7-8 класс

1. В ряд стоят 9 стаканов, стакан в центре стоит вверх дном, остальные вниз дном. За один ход можно выбрать любой стакан, стоящий вверх дном, и перевернуть его соседей (или одного соседа, если стакан крайний). Как такими операциями поставить все стаканы вверх дном?

2. В клетках таблицы 8×8 написаны $+1$ и -1 так, что в любом квадрате 2×2 сумма написанных чисел оказалась равна 2 или -2. Докажите, что есть две строки, в которых написаны одинаковые числа.

3. Клетчатый квадрат со стороной 101 разрезали по линиям сетки на несколько прямоугольников. Докажите, что среди них есть хотя бы один прямоугольник, периметр которого делится на 4.

4. Две поварихи Аня и Таня хотят почистить 60 кг картошки и 60 кг морковки. Аня за один час чистит 3 кг картошки или 5 кг морковки, а Таня за один час чистит 2 кг картошки или 4 кг морковки. За какое минимальное время они могут справиться с работой?

5. Квадрат 23×23 разрезали на квадраты 1×1, 2×2 и 3×3. Какое наименьшее количество квадратов 1×1 могло получиться?

6. Можно ли построить выпуклый шестиугольник, в котором все диагонали имеют равную длину?

7. Верно ли, что любой треугольник можно разрезать на два треугольника одинакового периметра?

8. По кругу стоят 2019 человек, каждый из которых либо лжец (он всегда врет), либо рыцарь (он всегда говорит правду). Некоторые из них сказали: «Мой правый сосед – лжец». Какое наибольшее количество таких людей могло быть?

Математический бой № 3, 7 класс, высшая лига

1. В клетках таблицы 8×8 написаны $+1$ и -1 так, что в любом квадрате 2×2 сумма написанных чисел оказалась равна 2 или -2. Докажите, что есть две строки, в которых написаны одинаковые числа.

2. В ряд стоят 5 стаканов, один вверх дном, остальные вниз дном. За один ход можно выбрать любой стакан, стоящий вверх дном, и перевернуть его соседей (или одного соседа, если стакан крайний). Найдите все позиции, на которых может располагаться изначально стакан, стоящий вверх дном, если оказалось, что такими операциями удалось поставить все стаканы вверх дном

3. Клетчатый квадрат со стороной 101 разрезали по линиям сетки на несколько прямоугольников. Докажите, что среди них есть хотя бы один прямоугольник, периметр которого делится на 4.

4. Две поварихи Аня и Таня хотят почистить 60 кг картошки и 60 кг морковки. Аня за один час чистит 3 кг картошки или 5 кг морковки, а Таня за один час чистит 2 кг картошки или 4 кг морковки. За какое минимальное время они могут справиться с работой?

5. Квадрат 23×23 разрезали на квадраты 1×1, 2×2 и 3×3. Какое наименьшее количество квадратов 1×1 могло получиться?

6. Можно ли выписать в ряд все натуральные числа, большие 1, так, чтобы любые два соседних числа были не взаимно просты?

7. По кругу стоят 2019 человек, каждый из которых либо лжец (он всегда врет), либо рыцарь (он всегда говорит правду). Некоторые из них сказали: «Мой правый сосед – лжец». Какое наибольшее количество таких людей могло быть?

8. Верно ли, что любой треугольник можно разрезать на два треугольника одинакового периметра?

Математический бой № 3, 7 класс, первая и вторая лиги

1. В ряд стоят 9 стаканов, стакан в центре стоит вверх дном, остальные вниз дном. За один ход можно выбрать любой стакан, стоящий вверх дном, и перевернуть его соседей (или одного соседа, если стакан крайний). Как такими операциями поставить все стаканы вверх дном?

2. В клетках таблицы 8×8 написаны $+1$ и -1 так, что в любом квадрате 2×2 сумма написанных чисел оказалась равна 2 или -2. Докажите, что есть две строки, в которых написаны одинаковые числа.

3. Клетчатый квадрат со стороной 101 разрезали по линиям сетки на несколько прямоугольников. Докажите, что среди них есть хотя бы один прямоугольник, периметр которого делится на 4.

4. Разрежьте клетчатый квадрат размером 13×13 на 12 квадратов так, чтобы все разрезы проходили по сторонам клеточек.

5. Две поварихи Аня и Таня хотят почистить 60 кг картошки и 60 кг морковки. Аня за один час чистит 3 кг картошки или 5 кг морковки, а Таня за один час чистит 2 кг картошки или 4 кг морковки. За какое минимальное время они могут справиться с работой?

6. Квадрат 23×23 разрезали на квадраты 1×1, 2×2 и 3×3. Какое наименьшее количество квадратов 1×1 могло получиться?

7. По кругу стоят 2019 человек, каждый из которых либо лжец (он всегда врет), либо рыцарь (он всегда говорит правду). Некоторые из них сказали: «Мой правый сосед – лжец». Какое наибольшее количество таких людей могло быть?

8. У продавца есть два мотка веревки. В одном мотке – 100 м веревки, в другом – 14 м. Как ему, не пользуясь измерительными инструментами, отмерить покупателю ровно 1 м веревки?

Средняя группа: 9 класс, высшая и первая лиги

Математический бой № 1, 9 класс, высшая лига

1. Пусть A_0 – середина дуги описанной окружности треугольника ABC, не содержащая точку A, аналогично строятся B_0 и C_0. Докажите, что площадь шестиугольника $AC_0BA_0CB_0$ равна pR, где p – полупериметр, а R – радиус описанной окружности треугольника ABC.

2. Можно ли на шахматной доске расположить несколько ферзей так, чтобы каждый ферзь бился ровно 4 другими (ферзи не прозрачны)?

3. Известно, что опытный эксперт проверяет каждый час одно и то же целое число работ ЕГЭ, не меньшее 6, причем это на две работы ЕГЭ больше, чем проверяет начинающий эксперт. На проверку принесли пачку работ. Опытному эксперту на проверку всех этих работ потребуется некоторое целое число часов, а двоим начинающим экспертам вместе на проверку этих же работ потребуется на 1 час меньше. Сколько работ принесли на проверку?

4. Найдите все положительные решения уравнения $x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+4=2\cdot\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}\right)$.

5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. На высоте AA_1 выбрана точка D такая, что $A_1D = C_1D$. Точка E – середина стороны AC. Докажите, что точки A, C_1, D и E лежат на одной окружности.

6. Найти наименьшее значение выражения: $x^2y^2+(x-2)^2+(y-2)^2$.

7. Две клетки на шахматной доске (8 × 8) считаются соседними, если с одной можно перейти на другую за один или два горизонтальных (вертикальных) хода, или за один горизонтальный (вертикальный) и один диагональный ход. Найти максимальное количество клеток, которые могут быть выбраны на шахматной доске таким образом, что среди них нет двух соседних.

8. В некоторой компании, состоящей из мужчин и женщин, каждый знаком хотя бы с одним лицом противоположного пола, но нет таких, кто был бы знаком со всеми лицами противоположного пола. Докажите, что можно выбрать двух мужчин M_1 и M_2, и двух женщин W_1 и W_2 так, что пары $(M_1;W_1)$ и $(M_2;W_2)$ – знакомы, а $(M_1;W_2)$ и $(M_2;W_1)$ – незнакомы.

Математический бой № 2, 9 класс, высшая лига

1. Разрежьте квадрат на 5 частей, из которых можно составить 3 попарно различных квадрата.

2. Пусть $S(n)$ – сумма цифр натурального числа n. Найдется ли такое n, что $nS(n)=1000001$?

3. Два велосипедиста стартуют из некоторой точки кругового трека в одном направлении. Отношение скоростей велосипедистов равно m/n ($m>n$, дробь несократимая). Чему равно число точек обгона при достаточно долгой езде?

4. Пусть a и b такие натуральные числа, что для любого натурального числа t числа $at+1$ и $bt+2$ имеют общий натуральный делитель, больший 1. Чему может быть равно отношение a/b?

5. Внутри средней линии треугольника ABC, параллельной стороне AC, выбрана произвольная точка O. Через вершины A и C параллельно BO провели прямые, которые пересекают прямые CO и AO соответственно в точках P и M. Докажите, что точки B, P и M лежат на одной прямой.

6. Решите в действительных числах систему: $\begin{cases} x^2+xy+y^2=37 \\ x^2+xz+z^2=28 \\ y^2+yz+z^2=19 \end{cases}$.

7. В некоторой компании 25 акционеров, причём любые 15 из них владеют не менее, чем 50% акций компании. Каким наибольшим процентом всех акций может владеть один акционер?

8. Докажите для положительных чисел a, b и c неравенство $\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+3a}+\frac{c}{a+4b}\geq\frac{2}{3}$.

Математический бой № 3, 9 класс, высшая лига

1. Пусть x_1 и x_2 – корни приведенного квадратного трехчлена $f(x)$. Вычислите $f(x_1+1)+f(x_2+1)$.

2. Найдите все иррациональные значения x, при которых значения выражений $\left(x^3+2x^2\right)$ и $\left(x^2+x\right)$ – целые числа.

3. На диагонали AC вписанного четырёхугольника $ABCD$ нашлась такая точка M, что $\angle BMC=\angle DMC=\angle BAD$. Верно ли, что M обязательно середина диагонали AC?

4. Решите систему: $\begin{cases} (x+y)(x+y+z)=18 \\ (y+z)(x+y+z)=30 \\ (z+x)(x+y+z)=24 \end{cases}$.

5. Какое количество последовательных автобусных билетов надо купить, чтобы гарантированно получить «счастливый» билет»? (Билет считается «счастливым», если сумма первых трех цифр равна сумме последних трех цифр).

6. На единичном отрезке расположено несколько непересекающихся отрезков красного цвета, общая длина которых больше 0,5. Обязательно ли найдутся две красные точки на расстоянии 1/99?

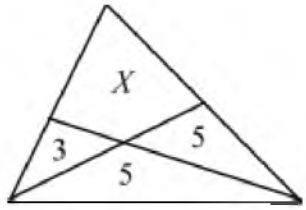
7. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC и AC в точках M и N соответственно, E и F – середины сторон AB и AC, соответственно. Прямые MN и EF пересекаются в точке D. Найдите площадь треугольника BED, если $AB = 20$ и $\angle ABC = 60°$.

8. Дан некоторый квадратный трехчлен с целыми коэффициентами $P(x)$. Можно ли для некоторого $P(x)$, с ненулевым коэффициентом при x^2, покрыть ряд натуральных чисел множеством значений многочлена $P(x)$ в натуральных точках?

Задачи первой лиги, 9 класс

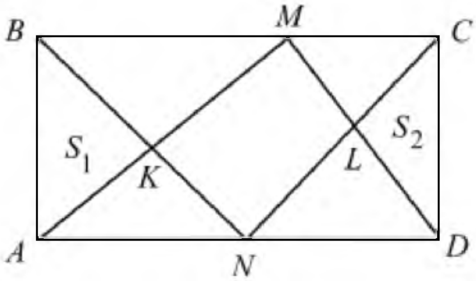
1. Известно, что a, b и c – целые положительные числа и $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$. Докажите, что $a^2+b^2+c^2$ – точный квадрат. (Точный квадрат – это квадрат некоторого натурального числа).

2. Бассейн наполняют водой две трубы. После наполнения половины бассейна, скорость заполнения одной трубой увеличилась на 10%, другой – на 20%. В результате, вторая половина бассейна была наполнена на 2 часа быстрее, чем первая. Может ли бассейн быть полностью заполнен не более, чем за 21 час?



3. Треугольник разделен на четыре части двумя отрезками. Известны площади трех треугольников (см. рисунок). Найти площадь четырехугольника *X*.

4. Для чисел x, y, z и k выполняются соотношения $\frac{7}{x+y}=\frac{k}{z+x}=\frac{11}{z-y}$. Найдите k.



5. В прямоугольнике $ABCD$ площадь треугольника ABK равна S_1, площадь треугольника CDL равна S_2. Найдите площадь четырехугольника $KLMN$.

6. В неравнобедренном треугольнике ABC с углами в вершинах A, B, C равными соответственно α, β, γ, серединный перпендикуляр к стороне AC и биссектриса угла B пересекаются в точке P. Найдите угол APC.

Старшая группа: 10-11 класс, высшая, первая и вторая лиги

Математический бой № 1, 10-11 класс, высшая лига

1. Докажите неравенство $x^5+y^5 \geq x^3y^2+x^2y^3$ для положительных чисел.

2. Для любой пары чисел определена некоторая операция *, удовлетворяющая следующим свойствам: $a*(b*c)=(a*b)\cdot c$ и $a*a=1$. Решите уравнение: $x*3=673$.

3. На плоскости требуется разместить n белых точек и наименьшее возможное число черных точек так, чтобы на любом отрезке, соединяющем две белые точки, находилась хотя бы одна черная точка. Какое минимальное количество черных точек необходимо для этого?

4. Прямоугольник, состоящий из клеток шахматной доски 8×8, называется *несбалансированным*, если он имеет различное число белых и черных клеток. Сколько несбалансированных прямоугольников на шахматной доске?

5. Существует ли выпуклый многогранник, у которого 6 граней, 8 вершин и 12 ребер, при этом имеются четыре грани, каждая пара из которых имеет общее ребро?

6. Четырехугольник $ABCD$ вписанный, при этом $AB = AD$ и $AB + BC = CD$. Найдите величину угла $\angle CDA$.

7. Имеются 48 камней. На первом шаге их раскладывают в 24 кучи по 2 камня, на втором – в 16 куч по 3 камня, на третьем в 12 куч по 4 камня и так далее. После каждого шага должно выполняться требование: никакие два камня не встретились в куче более одного раза. Какое максимальное количество шагов можно сделать?

8. Найдите многочлен $P(x)$ наименьшей степени такой, что 1) $P(x)$ имеет целые коэффициенты; 2) каждый корень многочлена $P(x)$ является целым числом; 3) $P(0) = -1$; 4) $P(3) = 128$.

Математический бой № 2, 10-11 класс, высшая лига

1. В 2019 коробках находится 1, 2, 3, …, 2019 конфет. За один раз Винни Пух может выбрать любую группу коробок и из каждой коробки этой группы извлечь одинаковое количество конфет. Какое минимальное количество раз Винни Пух сможет забрать все конфеты?

2. Можно ли в любой бесконечной арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, отыскать три члена, которые являются длинами сторон прямоугольного треугольника?

3. С квадратным трехчленом $ax^2 + bx + c$ можно выполнять две операции: 1) поменять местами коэффициенты a и c; 2) заменить x на $x + d$, где d – любое число. Можно ли с помощью этих операций превратить $x^2 - x - 2$ в $x^2 - x - 1$?

4. Пять отрезков таковы, что из любых трёх можно составить треугольник. Какое максимальное количество тупоугольных треугольников может оказаться?

5. На высоте AD, лежащей внутри треугольника ABC, взята произвольная точка. Точки K и L выбраны на сторонах AB и AC так, что отрезки CK и BL проходят через выбранную точку. Докажите, что углы ADK и ADL равны между собой.

6. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность с центром I. Стороны AB, BC, CD и DA касаются окружности в точках K, L, M и N, соответственно. Точки P, Q, R и S середины сторон NK, KL, LM и MN. Докажите, что если четырехугольник $PQRS$ прямоугольник, то $ABCD$ вписанный четырехугольник.

7. Про каких-то n человек известно, что: 1) среди любых трех человек есть двое, которые знают друг друга; 2) среди любых четырех человек есть двое, которые не знают друг друга (предполагается, что если A знает B, то и B знает A). Найдите наибольшее возможное значение n.

8. Каждую субботу по письмам слушателей выбирают 20 популярнейших песен. Известно, что

1) в одном и том же порядке песни не могут звучать две недели подряд;

2) песня, однажды опустившаяся в выборке, в дальнейшем уже не поднимается.

Какое максимальное количество суббот, следуя этим правилам, могут держаться в выборке одни и те же песни?

Математический бой № 3, 10-11 класс, высшая лига

1. Найдите все положительные решения уравнения $x^{2019x} = (2019x)^x$.

2. Даны 2^{n-1} подмножества множества X, состоящего из n элементов такие, что пересечение любых трех из них – непустое. Докажите, что пересечение всех множеств не пусто.

3. Можно ли клетки таблицы 8×8 заполнить числами от 1 до 8 так, чтобы в каждой строке, каждом столбце и на двух больших диагоналях были записаны различные числа?

4. Решите уравнение $\sqrt{m} + \sqrt{n} = \sqrt{2019}$ в целых числах.

5. Пусть ABC треугольник, Γ – окружность с диаметром AB. Биссектрисы $\angle BAC$ и $\angle ABC$ пересекают окружность Γ в точках D и E соответственно. Вписанная в треугольник ABC окружность касается BC и AC в точках F и G соответственно. Докажите, что точки D, E, F и G лежат на одной прямой.

6. *Перестройка* выпуклого m – угольника это замена двух последовательных сторон AB и BC на три стороны AM, MN и BN, где M и N – середины сторон AB и BC. Пусть имеется правильный шестиугольник P_6 площади 1, к нему применили перестройку и получили семиугольник P_7, затем получили P_8 (выбрав для перестройки любую из вершин P_7). После нескольких таких перестроек был получен некоторый n – угольник. Докажите, что его площадь не меньше 1/2.

7. Найдите все натуральные n, такие, что число $n\cdot(n + 1)\cdot(n + 2)\cdot(n + 3)$ является произведением трех различных простых чисел в некоторых ненулевых степенях.

8. Имеется куча из 1000 камней. Два игрока на каждом своем ходе могут взять от 1 до 5 камней. Кроме того, если игрок сказал: «Эгегей!», то он может взять 6 камней. За игру возглас «Эгегей!» может прозвучать не более 10 раз (например, 7 раз скажет первый игрок и 2 раза второй). Выигрывает тот, кто забирает последний камень. Определите, кто из игроков может выиграть независимо от ходов соперника.

Математический бой № 1, 10-11 класс, первая лига

1. Найдите число x, являющееся корнем уравнения $\frac{x-a-b}{c}+\frac{x-b-c}{a}+\frac{x-c-a}{b}=3$, где a, b, c – положительные числа и $a + b + c = 2019$.

2. Парабола $y = 5x^2 + ax + b$ ($a \neq b$) проходит через точки $A(a, b)$ и $B(b, a)$ найдите минимальное значение $5x^2 + ax + b$.

3. Пусть n – произвольное натуральное число. Для каждого n найдите, какая цифра стоит сразу после запятой в десятичной записи числа $\sqrt{n^2+n}$.

4. Сумма 49 натуральных чисел равна 624. Докажите, что среди них найдутся три одинаковых числа.

5. На стороне AB квадрата $ABCD$ отметили точку E, на стороне CD отметили четыре точки K, L, M, N так, что выполняются равенства $AE = CK = KL = LM = MN = ND$. Найдите сумму углов: $\angle ACE + \angle AKE + \angle ALE + \angle AME + \angle ANE$.

6. Точка D лежит на стороне BC треугольника ABC. O_1 и O_2 – центры окружностей, описанных около треугольников ABD и ACD соответственно. Докажите, что треугольники ABC и AO_1O_2 подобные.

7. Числа a_1, a_2, a_3, a_4 и a_5 образуют геометрическую прогрессию. При этом среди них есть как рациональные числа, так и иррациональные. Какое наибольшее количество членов этой прогрессии могут быть рациональными числами?

8. Игра ведется на доске $n \times n$. В начале игры на каждой клетке квадрата 1×1 находится 99 камней. Два игрока A и B по очереди выбирают строку или столбец и удаляют по одному камню из каждого квадрата 1×1 в выбранной строке или столбце. Брать камни в строке или столбце можно, если есть хотя бы один камень на каждом квадрата 1×1 выбранной линии. Тот, кто не может сделать ход – проигрывает. Игрок A ходит первым. Определите все числа n, для которых игрок A имеет выигрышную стратегию.

Математический бой № 2, 10-11 класс, первая лига

1. Решите уравнение $x + x^2 + x^3 + \ldots +x^{2018} = 0$.

2. Сколько существует 2019-значных натуральных чисел, в которых каждая цифра, кроме крайних, равняется произведению двух соседних с ней цифр?

3. Квадратный трехчлен $p(x)$ имеет корни x_1 и x_2, при этом выполняется равенство $p(2x + 1) = 4x^2 – 30x + 12$. Найдите $x_1 + x_2$.

4. Пусть S – множество натуральных чисел содержит числа 1, 2, 3 и 4 и обладает свойством: если различные числа a, b, c и d принадлежат S, то и их сумма $a + b + c + d$ тоже принадлежит S. Докажите, что число 2018 принадлежит S.

5. В равнобедренном треугольнике ABC сторона BC является основанием, биссектриса угла B пересекает AC в точке D. Оказалось, что имеет место равенство $BD + DA = BC$. Найдите углы треугольника ABC.

6. В квадрате $ABCD$ на сторонах BC и CD выбраны точки Q и P так, что $\angle PAQ = 45^\circ$. Диагональ BD пересекает отрезки AP и AQ в точках M и N. Докажите, что четырехугольник $PMNQ$ вписанный.

7. В выражении $*3^5 * 3^4 * 3^3 * 3^2 * 3 * 1$ вместо $*$ Дима и Саша ставят знаки арифметических действий «+» или «–» (один из двух). Может ли Дима, который ходит вторым, получить в конце выражение которое будет делиться на 7?

8. Двадцать различных натуральных чисел написали на десяти карточках, по одному на каждой стороне каждой карточки. Сумма двух чисел на каждой карточке является одинаковой для всех 10 карт. Карточки выложили на стол. Оказалось, что сумма десяти чисел, которые видны, совпадает с суммой чисел, которые не видны. Одну карточку убрали со стола. На столе видны девять чисел 2, 5, 17, 21, 24, 31, 35, 36 и 42. Карту, с какими числами на лицевой и обратной стороне удалили?

Математический бой № 3, 10-11 класс, первая лига

1. Числа a, b, c, d и e таковы, что выполнены неравенства:
$a + b < c + d < e + a < b + c < d + e$. Найдите среди этих чисел наибольшее число.

2. Распределите натуральные числа от 1 до 16 в вершины двух кубов, по одному числу в каждую вершину так, чтобы числа в вершинах одной грани имели одну и ту же сумму.

3. Известно, что верно ровно одно из приведенных ниже утверждений:

(A) Все последующие утверждения верны;

(B) Никакое из последующих утверждений не верно;

(C) Верно хотя бы одно из последующих утверждений;

(D) Все предыдущие утверждения верны;

(E) Никакое из предыдущих утверждений не верно.

Определите это верное утверждение.

4. Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что каждое из уравнений $f(x)=x-1$ и $f(x)=2-2x$ имеет ровно по одному решению. Докажите, что трёхчлен $f(x)$ не имеет корней.

5. Дан квадрат $ABCD$ и треугольник AFE, у которого вершины E и F лежат на сторонах квадрата BC и CD соответственно. При этом угол AFE прямой, $AF = 4$, $FE = 3$. Найдите площадь квадрата $ABCD$.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$, $AB = CD$, $\angle BCD = 57°$, и $\angle ADB + \angle CBD = 180°$. Найдите величину $\angle BAD$.

7. Квадрат разрезали на прямоугольники так, что ни одна из точек квадрата не является общей вершиной четырех прямоугольников. Затем пересчитали все точки квадрата, которые являются вершинами прямоугольников. Докажите, что в результате получили четное число.

8. Имеется классическая шахматная доска 8×8 с полями черного и белого цветов и шашка. Шашка начинает на белой клетке первой горизонтали и далее может делать ходы с белой клетки на соседнюю сверху белую клетку. Сколько можно построить разных маршрутов по белым полям для шашки от первой до восьмой горизонтали?

Математический бой № 1, 10-11 класс, вторая лига

1. Первую половину пути автомобиль проехал со средней скоростью v_1 = 60 км/ч, а вторую – со средней скоростью v_2 = 40 км/ч. Определить среднюю скорость автомобиля на всем пути.

2. Известно, что для чисел a и c выполняется неравенство $a\cdot c<0$. Рассмотрим неравенства: $a/c < 0$; $ac^2 < 0$; $a^2c < 0$; $ac^3 < 0$; $a^3c < 0$. Какое количество из них выполняется?

3. Пусть a минимальный корень уравнения $x^2 - 3|x| - 2 = 0$, найдите значение $-1/a$.

4. На карточке в определенном порядке записаны числа (a,b). За один ход можно к любому из чисел добавлять другое или менять знак любого из чисел. Каким образом из карточки (a,b) можно получить карточку (b,a)?

5. Сумма 49 натуральных чисел равна 624. Докажите, что среди них найдутся три одинаковых числа.

6. Девятизначное число состоит из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 в некотором порядке. Если в этом числе на любые две подряд идущие цифры посмотреть как на двузначное число, то окажется, что оно является произведением двух однозначных чисел. Найдите все такие девятизначные числа.

7. На стороне AB квадрата $ABCD$ отметили точку E, на стороне CD отметили четыре точки K, L, M, N так, что выполняются равенства:

$$AE = CK = KL = LM = MN = ND.$$

Найдите сумму углов: $\angle ACE + \angle AKE + \angle ALE + \angle AME + \angle ANE$.

8. Треугольник $ABCD$ вписан в окружность ω. Точки D, E, F являются серединами дуг AB, BC, CA соответственно, а эти дуги не содержат внутри себя вершин треугольника. Докажите, что отрезки DF и AE перпендикулярны.

Математический бой № 2, 10-11 класс, вторая лига

1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + xy + x = 10 \\ y^2 + xy + y = 20 \end{cases}$.

2. Докажите неравенство $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$, где $a > 0$, $b > 0$.

3. В лес пошли 11 девочек и n мальчиков. Вместе они собрали $n^2 + 9n - 2$ гриба, причём все собрали поровну грибов. Кого было больше: мальчиков или девочек?

4. Для нумерации страниц некоторой книги использовано 6969 цифры. Сколько страниц в этой книге?

5. Сколько существует 2019-значных натуральных чисел, в которых каждая цифра, кроме крайних, равняется произведению двух соседних с ней цифр?

6. В выражении $*3^5 * 3^4 * 3^3 * 3^2 * 3 * 1$ вместо звездочек – $*$, Дима и Саша ставят знаки арифметических действий «+» или «–» (один из двух). Может ли Дима, который ходит вторым, получить в конце выражение которое будет делиться на 7?

7. В трёхмерном пространстве придумайте такую фигуру, что её проекциями на координатные плоскости являются: на одну плоскость – квадрат, на другую – треугольник, а на третью – круг.

8. В равнобедренном треугольнике ABC сторона BC является основанием, биссектриса угла B пересекает AC в точке D. Оказалось, что имеет место равенство $BD + DA = BC$. Найдите углы треугольника ABC.

Математический бой № 3, 10-11 класс, вторая лига

1. Числа a, b, c, d и e таковы, что выполнены неравенства: $a + b < c + d < e + a < b + c < d + e$. Найдите среди этих чисел наибольшее.

2. Путешественник вышел из дома в 3 часа дня, в дороге не останавливался и возвратился в 9 часов вечера по тому же маршруту. Известно, что по ровным участкам он шел со скоростью 4 км/ч, в гору – 3 км/ч, под гору – 6 км/ч. Найдите расстояние, которое прошел путешественник.

3. Распределите натуральные числа от 1 до 16 в вершины двух кубов, по одному числу в каждую вершину так, чтобы числа в вершинах одной грани имели одну и ту же сумму.

4. Если в произведении двух чисел первый множитель увеличить на 1, а второй уменьшить на 1, то произведение увеличится на 2017. Как изменится произведение исходных чисел, если, наоборот, первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1?

5. Учащиеся отправились на праздник. У каждого юноши было по 5 воздушных шаров, а у каждой девушки – по 4 шара. По дороге они стали шутить и прокалывать шары друг у друга. В итоге каждая девушка проколола по 1 шару, а каждый юноша – по 2 шара. Дима сосчитал все оставшиеся шары, и у него получилось 100. Докажите, что Дима ошибся.

6. Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что каждое из уравнений $f(x) = x - 1$ и $f(x) = 2 - 2x$ имеет ровно по одному решению. Докажите, что трёхчлен $f(x)$ не имеет корней.

7. Дан квадрат $ABCD$ и треугольник AFE, у которого вершины E и F лежат на сторонах квадрата BC и CD соответственно. При этом угол AFE прямой, $AF = 4$, $FE = 3$. Найдите площадь квадрата $ABCD$.

8. В прямоугольном треугольнике ABC угол A равен 30^0, O – середина гипотенузы AB, I – центр вписанной окружности. Найдите угол IOC.

Часть 2. Решения

Младшая группа

Математический бой № 1, 8 класс, высшая, первая, 7-8, 7 высшая, первая, вторая лиги

1. (все лиги). В выпуклом семиугольнике проведены некоторые диагонали так, что никакие три из них не образуют треугольник с вершинами в вершинах исходного семиугольника. Какое наибольшее число диагоналей могло быть проведено? Приведите пример и докажите, что никаким способом большего числа диагоналей провести нельзя.

Ответ: 10 диагоналей. *Оценка*. Назовем диагональ короткой, если она отсекает треугольник от семиугольника. Остальные диагонали назовем длинными. Из каждой вершины выходит по две коротких и по две длинных диагонали. Если проведены все 14 диагоналей, получается 7 запрещенных треугольников. Заметим, что вычеркивание длинной диагонали разрушает один запрещенный треугольник, а короткой – два. Поэтому три вычеркивания испортят не более 6 треугольников, то есть нужно хотя бы 4 вычеркивания. *Пример*. Вычеркнем диагонали 1-3, 3-5, 4-6, 2-7 (вершины занумерованы по кругу).

2. (7 высшая, 8 высшая). Докажите, что если $n+1<k<2n$, то n различных прямых не могут разделить плоскость на k частей.

(7-8, 8, первая). Докажите, что пять различных прямых не могут разделить плоскость на 8 частей.

Если все прямые параллельны, то плоскость делится ими на $n + 1$ часть. Предположим, что есть две прямые, которые пересекаются друг с другом. Проведем сначала их, а затем остальные прямые будем проводить по одной. Каждая новая прямая пересекает, по крайней мере, одну из вначале проведенных прямых, поэтому новая прямая разбивается точками пересечения по крайней мере на два промежутка. Эти промежутки делят части, в которых они лежат, на две; количество частей увеличивается на столько же, на сколько частей разделена прямая точками пересечения с другими прямыми. Первые две прямые делят плоскость на 4 части, каждая новая прямая увеличивает количество частей как минимум на 2, поэтому n прямых делят плоскость как минимум на $2n$ частей.

3. (7 высшая, 8 высшая). Федор задумал число, делящееся на 300, и выписал на доске все его делители, кроме самого числа. Докажите, что сумма нечетных чисел, выписанных на доске, меньше суммы четных.

Заметим, что задуманное число делится на 300 и поэтому делится на 4. Если d – нечетный делитель данного числа, то $2d$ – также его делитель, причем отличный от самого числа, так как $2d$ не делится на 4. Поэтому сумма нечетных делителей даже как минимум вдвое меньше суммы четных.

4. (7 высшая, 8 высшая, 7-8). Несколько команд играли однокруговой турнир (каждая команда играет с каждой одну партию). В некоторый момент оказалось, что среди любых четырех команд имеется хотя бы одна команда, которая успела сыграть с тремя другими командами. Докажите, что командам осталось сыграть не более трех игр.

Пусть A и B – две еще не сыгравшие команды, а C и D – две другие команды. Рассматривая четверку A, B, C, D, видим, что либо D, либо C сыграли с остальными тремя, в частности между собой. Таким образом, все пары, не содержащие ни A, ни B, уже играли. Если при этом найдется C, не игравшая с A или B, то любая другая команда D играла и с A, и с B. То есть все еще не состоявшиеся игры могут быть только между A, B и C, то есть их не более 3.

5. (все лиги). Сумма цифр натурального числа x равна n. Всегда ли между x и $10 \cdot x$ можно найти натуральное число с суммой цифр $n + 5$?

Ответ: да, всегда. Пусть a – последняя цифра числа x. Если $a < 5$, то возьмем число $n + 5$, а если $a > 5$, то возьмем число $10 \cdot x - 4$. При умножении на 10 и вычитании 4 последняя цифра числа a уменьшается на 1 и справа приписывается 6, то есть сумма цифр увеличивается на 5.

6. (8 класс высшая и первая). В остроугольном треугольнике одна из сторон равна опущенной на нее высоте. Как такой треугольник разрезать двумя прямолинейными разрезами ровно на четыре части, из которых можно сложить квадрат?

Указание. Рассмотрим середины двух других сторон и опустим из них перпендикуляры на основание. Эти середины и их проекции на основание – вершины квадрата. Разрежем треугольник по диагоналям этого квадрата.

7. (все лиги). Саша и Катя играют в следующую игру. У Саши есть 100 карточек, на которых написаны числа 1, 2, 3, …, 100. Саша выкладывает по две карточки на стол, а Катя забирает себе одну из них. В конце игры на столе остается 50 карточек. Если сумма чисел на них четна, выигрывает Саша, а если нечетна, то Катя. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

Ответ: Катя. Покажем, что Катя может забрать половину нечетных карточек. Поскольку нечетных карточек всего 50, она выиграет. Если Саша выкладывает карточки одной четности, Катя забирает любую. Из карточек, которые участвуют в таких ходах, Катя заберет ровно половину нечетных. Поскольку всего четных карточек 50, а в таких ходах участвует четное число четных карточек, остальные ходы Саши, т.е. в которых он выкладывает карточки разной четности (назовем такие ходы важными), будет четное число. Кате достаточно чередовать выбор четности карточек на важных ходах: в первый важный ход брать четную карточку, во второй нечетную, потом снова четную и т.д. Так как будет сделано четное число важных ходов, Катя заберет в них ровно половину всех нечетных карточек.

8. (8 класс высшая). Половина клеток квадрата 4×4 белые, половина – черные. Докажите, что всегда можно вычеркнуть две строки и два столбца так, что в оставшейся части окажется поровну белых и черных клеток. Половина клеток квадрата 4×4 белые, половина – черные. Докажите, что всегда можно вычеркнуть две строки и два столбца так, что в оставшейся части окажется поровну белых и черных клеток.

Разобьем квадрат на 4 квадрата 2×2. Если в каком-то из них белых и черных клеток поровну, то вычеркнем строки и столбцы, содержащие остальные три квадрата, и получим то, что требуется. Предположим, что в каждом из квадратов 2×2 черных и белых клеток не поровну. Для определенности, пусть в одном из них не меньше трех черных клеток (обозначим его буквой A). Рассмотрим два соседних с ним квадрата (имеющие общую сторону). Если в обоих этих квадратах также не меньше 3 черных клеток, то всего черных клеток не меньше $3 \times 3 = 9$, то есть больше половины всех клеток, что противоречит условию. Поэтому хотя бы в одном их соседних квадратов не больше одной черной клетки (обозначим его буквой Б).

Для определенности считаем, что квадраты А и Б лежат на одном уровне (а не один под другим — в противном случае повернем исходных квадрат на 90°). Тогда в квадрате А есть столбец из двух черных клеток, в квадрате Б — столбец из двух белых клеток. Оставим эти четыре клетки, а все остальные столбцы и строки — вычеркнем.

9. (8 первая, 7-8, 7 первая и вторая лиги). В 7«А» и 7«Б» поровну учеников. Оба класса написали контрольную работу. Проверив контрольные работы, учитель сказал, что он поставил двоек на 13 больше, чем остальных оценок. Не ошибся ли учитель?

Ответ: учитель ошибся. Если положительных оценок x, то всего выставлено $13 + 2x$, то есть нечетное число оценок, а контрольную работу писало четное число учеников.

10. (7 первая и вторая лиги). Четырехугольник можно разделить диагональю на два равнобедренных прямоугольных треугольника. Чему могут быть равны углы такого четырехугольника? Укажите все варианты.

Ответ: 1) 4 угла по 90 градусов, 2) 2 угла по 135 и 2 по 45 градусов, 3) два по 90 градусов, 135 градусов и 45 градусов.

11. (8 первая, 7-8, 7 все лиги). На столе лежат четыре монеты. Их взвешивают на чашечных весах. Оказалось, что первая и вторая весят меньше, чем две другие; первая и третья равны по массе двум оставшимся, а первая и четвертая весят больше двух оставшихся. Какая монета самая тяжелая?

Ответ: четвертая монета самая тяжелая. Пусть a, b, c, d – массы первой, второй, третьей и четвертой монет соответственно. По условию $a + b < c + d$, $a + c = b + d$. Отсюда $2a + b + c < b + c + 2d$, $a < d$. Аналогично $a + d > b + c$, $b + d = a + c$. Тогда $a + b + 2d > a + b + 2c$, $d > c$, $a + b < c + d$, $b + c < a + d$, отсюда $a + c + 2b < a + c + 2d$, $b < d$. Значит, d – самая тяжелая.

12. (8 класс первая, 7-8, 7 класс первая и вторая лиги) Среди 20 внешне одинаковых монет, лежащих в ряд, есть фальшивые. На каждую монету наклеена бирка, на которой указано количество фальшивых среди следующих монет: монеты, на которую наклеена бирка, и ее соседей. Обязательно ли по числам на бирках всегда можно определить хотя бы одну фальшивую монету?

Ответ: нет. Предположим, что на всех бирках написаны единицы. Тогда фальшивыми могли оказаться как монеты с номерами 1, 4, 7, … 19 либо монеты с номерами 2, 5, 8, …, 20.

13. (8 класс вторая, 7 класс – все лиги). На уроке физкультуры все ученики класса построились в шеренгу. Оказалось, что мальчики и девочки в шеренге чередуются. Известно, что ровно 52% учеников – девочки. Найдите количество мальчиков в классе.

Ответ: 12. Из условия следует, что мальчиков в классе меньше, чем девочек. Поскольку мальчики и девочки чередуются, девочек ровно на одну больше. Если x – количество мальчиков, получаем уравнение: $x + 1 = 0{,}52\cdot(2x + 1)$, отсюда $x = 12$.

Математический бой № 2, 8 класс, высшая лига

1. (все лиги). В ряд слева направо стоят 8 одинаковых коробочек, в каждой по 13 одинаковых пуговиц. Из одной коробочки переложили одну пуговицу в соседнюю справа. Как двумя взвешиваниями на чашечных весах без гирь определить коробочку, в которой меньше пуговиц? Открывать коробочки нельзя.

Пронумеруем коробочки слева направо. Сравним 3 и 6. если равновесие, то перекладывали из 1, 4 или 7. Сравнивая 1 и 4, определим более легкую из этих трех коробочек. Если 3 тяжелее 6, перекладывали из 2 или 6, сравним их. Если 3 легче 6, перекладывали из 3 или 5. Сравним их.

2. (8 высшая, 7 высшая). Два натуральных числа называются подобными, если одно из них получается из другого вычеркиванием какой-то одной цифры (и, возможно, отбрасыванием впереди стоящих нулей). Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, которые не представимы в виде суммы двух подобных.

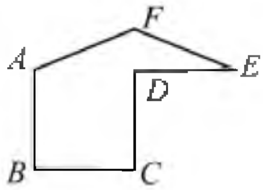
Рассмотрим число n, представимое в виде суммы двух подобных. Если вычеркнутая цифра не последняя, то два подобных числа оканчиваются на одну и ту же цифру. Тогда n четное. Если вычеркнутая цифра последняя, то два подобных числа имеют вид $10A + x$ и A, где x вычеркнутая цифра. Тогда $n = 11A + x$, т.е. цифра x остаток от деления n на 11. Таким образом, остаток от деления n на 11 не превосходит 9. Значит, числа вида $11A + 10$ не представимы в виде суммы двух подобных чисел, одно из которых получено из другого вычеркиванием последней цифры. Получаем, что числа вида $22m + 21$ не представимы в виде суммы двух подобных.

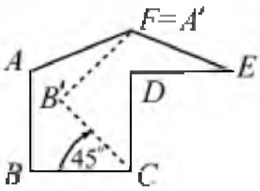
3. (8 все лиги, 7-8). Целые числа x, y, z таковы, что $xy + yz + xz = 1$. Докажите, что число $(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2)$ является полным квадратом.

Во-первых, из условия $xy + yz + xz = 1$, получаем $z = \dfrac{1-xy}{x+y}$. Далее,

$$\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)\left(1+z^2\right)=\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)\left(1+\left(\frac{1-xy}{x+y}\right)^2\right)=\frac{\left(1+x^2\right)^2\left(1+y^2\right)^2}{\left(x+y\right)^2}.$$

4. (8 все лиги). Дан шестиугольник $ABCDEF$ (см. рис.) Точки A, B, C, D – вершины квадрата, D – середина AE, $AF = FE$ и $\angle AFE = 135^\circ$. Разделите шестиугольник одной ломаной на две равные части.



Указание. 

5. (8 все лиги, 7-8). Пусть x, y, z – длины сторон прямоугольного треугольника, причем $z > y \geq x$. Докажите, что $x > 2\cdot(z - y)$.

По теореме Пифагора $x^2 = z^2 - y^2 = (z-y)(z+y)$. Поскольку x – наименьшая сторона, z + y > 2x, получаем, $x^2 = (z-y)(z+y) > 2x(z-y)$ и $x > 2\cdot(z - y)$.

6. (все лиги). Клетчатая бумажная полоска $2 \times n$ склеена в цилиндрическое кольцо высоты 2. Два игрока по очереди вырезают по одной клетке. Игрок, после хода которого полоска развернется (потеряет цилиндрическую связность), проигрывает. Кто выиграет при правильной игре – начинающий или его соперник? Две клетки, соседние по углу, считаются несвязанными.

Ответ: если n четное, то выиграет второй, если n нечетное первый.

Рассмотрим сначала случай четного n. Второй игрок мысленно разобьет каждый слой на доминошки, сместив разбиение на одну клетку («кирпичиками»). Теперь на каждый ход первого игрока он будет отвечать ходом в ту же «доминошку». Нетрудно видеть, что такая стратегия позволяет всегда иметь ход. Так как игра конечная, то такая стратегия приведет второго игрока в выигрышу. Если же n четное, то выиграет первый. После первого хода вырезанная им клетка «запрещает» ходить в три соседние с ней клетки другого ряда. Остаток (без вырезанной и запрещенных клеток) разбивается на доминошки точно так же. Стратегия, аналогичная описанной выше, на этот раз приводит к победе первого игрока.

7. (все лиги). Житель города считается богатым, если его месячный доход выше зарплаты профессора университета, иначе – небогатым. Докажите, что если доходы у всех разные, то можно установить профессору университета такую зарплату, чтобы богатых мужчин стало столько же, сколько небогатых женщин.

Пусть в городе N жителей, из которых M человек — мужчины. Пронумеруем всех жителей в порядке увеличения зарплаты номерами от 1 до N. Установим профессору зарплату больше, чем у M-го жителя, но меньше, чем у $(M + 1)$ -го жителя. Пусть при этом K мужчин стали небогатыми. Тогда $(M - K)$ мужчин остались богатыми, $(M - K)$ женщин стали небогатыми.

8. (8 высшая, первая, 7-8). В выпуклом 12-угольнике все углы кратны 30 градусам. Докажите, что все углы этого многоугольника равны.

Все внешние углы 12-угольника также кратны 30 градусам. Если хотя бы один из них более 30°, то общая сумма внешних углов более $12 \times 30° = 360°$, что невозможно (сумма внешних углов любого выпуклого многоугольника равна 360°). Значит, все внешние углы равны 30°, а все углы многоугольника равны 150°.

9. (8 первая лига, 7 все лиги, 7-8). Имеется шесть человек. Среди любых троих есть двое, которые не знают друг друга. Обязательно ли найдутся трое из этой шестерки, которые попарно незнакомы?

Ответ: да, найдутся. Рассмотрим человека A. Из остальных есть либо трое, незнакомых с A, либо трое знакомых с A, пусть в каждом случае это B, C, D. В первом случае в тройке BCD есть пара незнакомых, они вместе с A образуют искомую тройку. Во втором случае из условия сразу следует, что BCD – искомая тройка.

10. (8 первая лига, 7-8, 7 все) Артем написал три натуральных числа (не обязательно различных) на доске, каждое из которых меньше 2019. Затем он стер эти числа (a, b, c) и вместо них написал числа $\frac{a+b}{2}$, $\frac{b+c}{2}$, $\frac{c+a}{2}$ которые также оказались целые. Когда он повторил это еще 10 раз, на доске появилось число 100, а все промежуточные тройки состояли из целых чисел. Какие еще числа записаны на доске в этот момент?

Ответ: 100 и 100. За один шаг разность между максимальным и минимальным числом уменьшается вдвое. Если в конце не все числа равны, то эта разность равна хотя бы 1, значит, вначале она была, по крайней мере, $2^{11} = 2048$ – противоречие, так как числа меньше 2019.

11. (8 первая, 7-8, 7 все лиги) Лотерея проводится следующим образом. Никита выбирает случайное число от 1 до 1000. Если число делится на 2, платят 1 рубль, если делится на 10 – 2 рубля, если делится на 12 – четыре рубля, на 20 – восемь, если оно делится на несколько числе, платят сумму. Сколько может выиграть Никита за один раз в такой игре? Укажите все варианты и докажите, что других нет.

Ответ: 0, 1, 3, 5, 11, 15 рублей. Если число не делится на 2, то оно не делится на 10, 12, 20. Если делится на 20, то делится и на 10. Если делится на 10 и на 12, то делится на 20. Отсюда варианты (см. таблицу, плюс, если число делится, минус, если не делится).

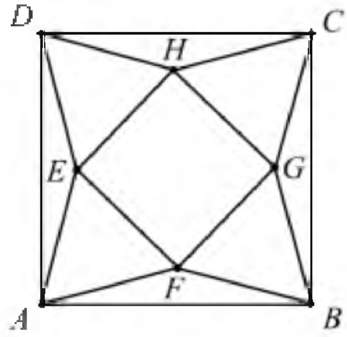
2	10	12	20	Выигрыш
–	–	–	–	0
+	–	–	–	1
+	–	+	–	5
+	+	–	–	3
+	+	–	+	11
+	+	+	+	15

12. (8 первая, 7 вторая) На матбои пришли 105 девочек и 95 мальчиков и разбились на сто пар. Каждые два мальчика, образовавшие пару, поздоровались за руку. Две девочки, образовавшие пару, обняли друг друга. Смешанные пары начали решать задачи. Чего оказалось больше: рукопожатий или объятий и на сколько?

Ответ: объятий на 5 больше, чем рукопожатий.

Уберем пары мальчик-девочка. Среди оставшихся девочек, как и было раньше, на 10 больше, чем мальчиков, но теперь есть только пары мальчик-мальчик и девочка-девочка. Таким образом, количество пар девочка-девочка на 5 больше, чем количество пар мальчик-мальчик, а значит, объятий на 5 больше.

13. (8 первая лига, 7-8, 7 высшая лига) На плоскости отметили 8 точек. Каждую пару точек соединили отрезком, затем к каждому такому отрезку построили серединный перпендикуляр. Могло ли на каждом из этих перпендикуляров оказаться ровно по две отмеченные точки?



Ответ: могло. Примером конструкции служат вершины квадрата $ABCD$ и такие точки E, F, G, H внутри квадрата, что треугольники ABE, BCF, CDG, DAH – равносторонние.

Еще одна конструкция получается, если взять точки E, F, G, H вне квадрата.

14. (8 первая лига, 7-8, 7 все). Найдите все четверки попарно различных натуральных чисел a, b, c, d таких, что $a{\cdot}b = c + d$ и $c{\cdot}d = a + b$.

Ответ: четверки попарно различных натуральных чисел (a, b, c, d) таковы: (2, 3, 1, 5), (2, 3, 5, 1), (3, 2, 1, 5), (3, 2, 5, 1), (1, 5, 2, 3), (1, 5, 3, 2), (5, 1, 2, 3), (5, 1, 3, 2).

Из данных равенств получаем, что $a{\cdot}b - a - b = c + d - c{\cdot}d$, откуда $(a - 1){\cdot}(b - 1) + (c - 1)(d - 1)=2$. Далее перебором получаем ответ.

15. (7 первая и вторая лиги). $2n$ гирек поставлены в ряд по возрастанию весов, причем веса соседних гирь отличаются на 1 грамм. При каких n гирьки можно разложить на чаши весов по n гирек на каждую чашу так, чтобы весы оказались в равновесии?

Ответ: при четных n. Пусть $n = 2k$. Разобьем гири на пары отличающихся на 1 грамм и выберем k пар. Положим из выбранных пар более легкую гирю на левую чашу, более тяжелую – на правую. В остальных k парах поступим наоборот. Если $n = 2k + 1$, то суммарный вес гирь нечетен и разложить гири нельзя.

Математический бой № 3, 8 класс, высшая лига, бои за 1-2 места

1. (8 высшая лига бой за 1 место). В ряд стоят 2019 стаканов, один вверх дном, остальные вниз дном. За один ход можно выбрать любой стакан, стоящий вверх дном, и перевернуть его соседей (или одного соседа, если стакан крайний). Найдите все позиции, на которых может располагаться изначально стакан, стоящий вверх дном, если оказалось, что такими операциями удалось поставить все стаканы вверх дном. (В остальных лигах задача для 5 или 9 стаканов)

Ответ: стакан должен быть центральным. Пронумеруем стаканы от 1 до 2019 по порядку. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ номера стаканов, стоящих вверх дном. Рассмотрим знакопеременную сумму $S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{k+1}a_k$. При этом в начальной позиции имеется только один номер a_1 и $S = a_1$. При операциях с не крайними стаканами S не меняется, при операции со стаканом 2019 меняется на 2020 (новая сумма $S + 2020$ или $S - 2020$), при операции со стаканом 1 меняет знак. В конце она должна стать равна 1010, значит, вначале она должны была быть кратна 1010. Это возможно только для среднего стакана. Пример, как все становятся вверх дном (проводим операции с 1010; 1009, 1011; 1008, 1010, 1012; . . .).

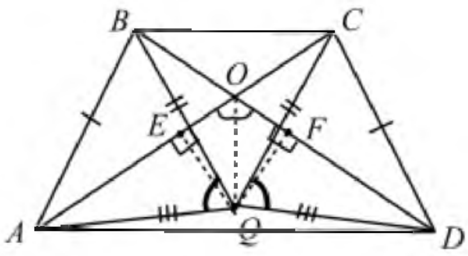
2. (все лиги). В клетках таблицы 8×8 написаны +1 и –1 так, что в любом квадрате 2×2 сумма написанных чисел оказалась равна 2 или –2. Докажите, что есть две строки, в которых написаны одинаковые числа.

Рассмотрим две соседние строчки. В них либо числа на четных местах совпадают, а на нечетных различны, либо наоборот. Поэтому у каждой строчки все числа на четных местах либо совпадают с числами первой строчки, либо противоположны. Аналогично, на нечетных. Таким образом, существует всего 4 различных вида строчек, поэтому какие-то две повторятся.

3. (все лиги). Клетчатый квадрат со стороной 101 разрезали по линиям сетки на несколько прямоугольников. Докажите, что среди них есть хотя бы один прямоугольник, периметр которого делится на 4.

Докажем, что найдётся прямоугольник, длина и ширина которого – числа одинаковой чётности, тогда его периметр будет делиться на 4. Предположим, что это не так, то есть у каждого из прямоугольников длина и ширина выражаются числами разной чётности. Тогда площадь каждого прямоугольника – чётное число, следовательно, и площадь квадрата также должна быть чётным числом, а на самом деле площадь квадрата равна нечетна. Противоречие.

4. (8 высшая лига бой за 1 место). Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$, в котором $AB = CD$, пересекаются в точке O. Серединные перпендикуляры к диагоналям AC и BD и биссектриса угла AOD проходят через одну точку. Докажите, что стороны AD и BC параллельны.



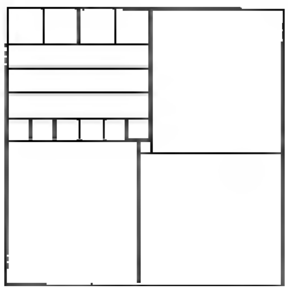
Пусть E и F – середины диагоналей AC и BD соответственно, а Q – точка пересечения серединных перпендикуляров. По свойству серединных перпендикуляров, $AQ = CQ$ и $BQ = DQ$. Тогда треугольники ABQ и CDQ равны по трем сторонам, и потому $\angle AQB = \angle CQD$. Значит $\angle AQC = \angle AQB + \angle BQC = \angle CQD + \angle BQC = \angle CQD$. В равнобедренных треугольниках AQC и BQD равны углы при вершине Q и высоты, опущенные из вершины Q на их основания (так как точка Q лежит на биссектрисе угла EOF). Отсюда нетрудно вывести, что треугольники ACQ и BDQ равны. Но тогда $AQ = BQ = CQ = DQ$. Так как $\angle AQB = \angle CQD$, высоты равнобедренных треугольников AQD и BQC, проведенные из вершины Q, лежат на одной прямой, откуда и следует параллельность оснований AC и BD этих треугольников.

5. (все лиги). Две поварихи Аня и Таня хотят почистить 60 кг картошки и 60 кг морковки. Аня за один час чистит 3 кг картошки или 5 кг морковки, а Таня за один час чистит 2 кг картошки или 4 кг морковки. За какое минимальное время они могут справиться с работой?

Ответ: 18 часов. Будем рассматривать морковку в новых единицах веса 1 кг равен двум обычным килограммам. Тогда всего есть 90 кг овощей, нуждающихся в очистке, при этом Танина скорость независимо от вида чистящихся овощей 2 кг в час. Аня же чистит картошку со скоростью 3 кг в час, а морковку со скоростью 2,5 кг в час. Поэтому Аня будет чистить картошку, а Таня морковку. Через 15 часов Аня почистит 45 кг картошки, а Таня всю морковку. После этого они со скоростью 5 кг в час продолжат чистить оставшиеся 15 кг картошки и управятся за 3 часа. Таким образом, минимальное требующееся им время 18 часов.

6. (все лиги). Квадрат 23×23 разрезали на квадраты 1×1, 2×2 и 3×3. Какое наименьшее количество квадратов 1×1 могло получиться?

Ответ: один. Заметим, что совсем без квадратов 1×1 обойтись не удастся. Действительно, предположим противное, и поставим в клетках столбцов с нечетными номерами –1, а с четными +1. Общая сумма будет равна 23, а сумма в каждом квадрате 2×2 и 3×3 будет делиться на 3 – противоречие.



Одного квадрата 1×1 достаточно. Поместим его в центр, остаток естественным образом разбивается на 4 прямоугольника 11×12, каждый из которых в свою очередь разбивается на один прямоугольник 3×12 и 4 прямоугольника 2×12, а их уже легко разбить на квадраты 3×3 и 2×2 соответственно.

7. (8 высшая лига, 7-8, 7 высшая лига). Можно ли выписать в ряд все натуральные числа, большие 1, так, чтобы любые два соседних числа были не взаимно просты?

Ответ: можно. Будем делать это последовательно. Пусть нам удалось выписать несколько натуральных чисел, и пусть последнее число в ряду это a, а наименьшее невыписанное число это b. Тогда продолжим наш ряд числами kab и b, где натуральное k подберем так, чтобы число kab было больше все уже выписанных чисел. Таким образом, нам удалось добавить в последовательность очередное натуральное число.

8. (все лиги). По кругу стоят 2019 человек, каждый из которых либо лжец (он всегда врет), либо рыцарь (он всегда говорит правду). Некоторые из них сказали: «Мой правый сосед – лжец». Какое наибольшее количество таких людей могло быть?

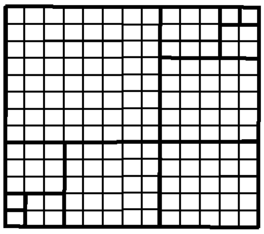
Ответ: 2018. Справа от рыцаря, сказавшего: «Мой правый сосед – лжец» – стоит лжец, а справа от сказавшего то же лжеца – рыцарь. Таким образом, если несколько человек, сказавших эту фразу, идут подряд, то лжецы и рыцари среди них чередуются. Поскольку число 2019 нечетно, все 2019 человек сказать эту фразу не могли, а 2018, очевидно, могли.

9. (8 класс, высшая лига, бои за 3-4 места, 8 класс, первая лига, 7-8 класс) Можно ли построить выпуклый шестиугольник, в котором все диагонали имеют равную длину?

Ответ: нет, нельзя. Если для шестиугольника это возможно, то в четырехугольнике, противоположные стороны которого – противоположные стороны шестиугольника, сумма диагоналей будет равна сумме противоположных сторон, а это невозможно по неравенству треугольника.

10. (8 класс, высшая лига, бои за 3-4 места, 8 класс, первая лига, 7-8 класс 7 высшая). Верно ли, что любой треугольник можно разрезать на два треугольника одинакового периметра?

Ответ: да, верно. Пойдем из вершины A по периметру треугольника ABC в сторону вершины B, пока не пройдем полпериметра. Точка D, в которой мы окажемся в этот момент, будет лежать на стороне BC, потому что в силу неравенства треугольника сторона AB меньше полупериметра, а сумма $AB + BC$ – больше полупериметра. Прямая AD делит треугольник ABC на два треугольника одинакового периметра.



11. (7 класс первая и вторая лиги). Разрежьте клетчатый квадрат размером 13×13 на 12 квадратов так, чтобы все разрезы проходили по сторонам клеточек.

На рисунке указан способ, как это можно сделать.

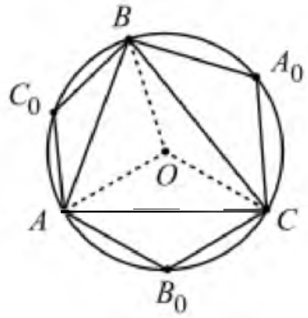
12. (7 класс первая и вторая лиги).У продавца есть два мотка веревки. В одном мотке – 100 м веревки, в другом – 14 м. Как ему, не пользуясь измерительными инструментами, отмерить покупателю ровно 1 м веревки?

Поскольку $100 = 14 \times 7 + 2$, отложив 14-метровую веревку вдоль стометровой 7 раз, получим двухметровый кусок длинной веревки, выступающий за пределы короткой. Отрежем его, сложим вдвое и получим 1 м веревки.

Средняя группа

Математический бой 1 (9 класс, высшая лига)

1. Пусть A_0 – середина дуги описанной окружности треугольника ABC, не содержащая точку A, аналогично строятся B_0 и C_0. Докажите, что площадь шестиугольника $AC_0BA_0CB_0$ равна pR, где p – полупериметр, а R – радиус описанной окружности треугольника ABC.



Площадь шестиугольника $AC_0BA_0CB_0$ равна сумме площадей четырехугольников (дельтоидов) OBA_0C, OCB_0A, OAC_0B. Но $S_{OBA_0C}=\dfrac{aR}{2}$, $S_{OCB_0A}=\dfrac{bR}{2}$, $S_{OAC_0B}=\dfrac{cR}{2}$. Складывая указанные равенства, получаем утверждение задачи.

2. Можно ли на шахматной доске расположить несколько ферзей так, чтобы каждый ферзь бился ровно 4 другими (ферзи не прозрачны)?

	Ф	Ф	
Ф			Ф
Ф			Ф
	Ф	Ф	

Ответ: да, можно.

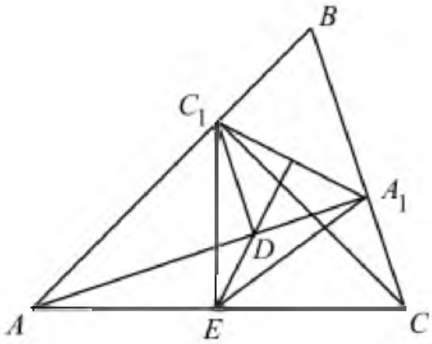
3. Известно, что опытный эксперт проверяет каждый час одно и то же целое число работ ЕГЭ, не меньшее 6, причем это на две работы ЕГЭ больше, чем проверяет начинающий эксперт. На проверку принесли пачку работ. Опытному эксперту на проверку всех этих работ потребуется некоторое целое число часов, а двоим начинающим экспертам вместе на проверку этих же работ потребуется на 1 час меньше. Сколько работ принесли на проверку?

Ответ: 24. Пусть число работ в пачке равно n и опытный эксперт проверяет за один час m работ. Задача сводится к решению уравнения $\dfrac{n}{m}-\dfrac{n}{2(m-2)}=1$, причем число $\dfrac{n}{m}=k$ – целое число. Отсюда $k-\dfrac{mk}{2(m-2)}=1$ или $(k-2)(m-4)=4$. Так как $m\geq 6$, то $m=6, k=4$, либо $m=8, k=3$. В обоих случаях $n=24$.

4. Найдите все положительные решения уравнения $x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+4=2\cdot\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}\right)$.

Ответ: $x=y=\sqrt{2}+1$. Так как $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ для положительных чисел a,b, то $x+\dfrac{2x+1}{x}\geq 2\sqrt{2x+1}$, причем равенство достигается при $x=\sqrt{2}+1$.

5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. На высоте AA_1 выбрана точка D такая, что $A_1D = C_1D$. Точка E – середина стороны AC. Докажите, что точки A, C_1, D и E лежат на одной окружности.



Из условия следует, что DE –серединный перпендикуляр к отрезку A_1C_1. Поэтому $\angle C_1AD = \frac{1}{2}\angle C_1EA_1 = \angle C_1ED$. В итоге четырехугольник AC_1DE – вписанный.

6. Найти наименьшее значение выражения: $x^2y^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2$.

Ответ: 3. $x^2y^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 = (xy-1)^2 + (x+y-2)^2 + 3 \geq 3.$

7. Две клетки на шахматной доске (8×8) считаются соседними, если с одной можно перейти на другую за один или два горизонтальных (вертикальных) хода, или за один горизонтальный (вертикальный) и один диагональный ход. Найти максимальное количество клеток, которые могут быть выбраны на шахматной доске таким образом, что среди них нет двух соседних.

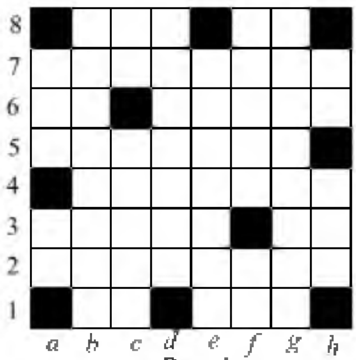


Рис.1

8	1	1	1	2	2	3	3	3
7	1	1	1	2	2	3	3	3
6	4	4	4	2	2	5	5	5
5	4	4	4	6	6	5	5	5
4	7	7	7	6	6	8	8	8
3	7	7	7	10	10	8	8	8
2	9	9	9	10	10	11	11	11
1	9	9	9	10	10	11	11	11
	a	b	c	d	e	f	g	h

Рис.2

8	1	1	1	2	2	3	3	3
7	1	1				3	3	3
6	4						5	5
5	4						5	5
4	7						8	8
3	7	7				8	8	8
2	9	9	9	10	10	11	11	11
1	9	9	9	10	10	11	11	11
	a	b	c	d	e	f	g	h

Рис.3

Ответ: 10. Пример для 10 клеток показан на Рис.1. Чтобы показать, что 11 таких клеток найти невозможно, разделим доску на одиннадцать частей, как показано на Рис.2. Легко видеть, что любые две клетки из одной части будут соседними; таким образом, чтобы получить 11 клеток, которые не будут соседними, нужно выбрать ровно по одной клетке в каждой части. Из соображений симметрии можно предположить, что одна из выбранных клеток – $d5$. Это исключает «белые» клетки на Рис.3. Далее, мы не можем взять $a5$, поскольку этот выбор устраняет все оставшиеся клетки в части «7»; поэтому мы должны взять $a6$; единственная доступная клетка в части «1» теперь $c8$; и это делает невозможным выбрать любую из клеток в части «2». Таким образом, невозможно выбрать 11 клеток, среди которых нет двух соседних.

8. В некоторой компании, состоящей из мужчин и женщин, каждый знаком хотя бы с одним лицом противоположного пола, но нет таких, кто был бы знаком со всеми лицами противоположного пола. Докажите, что можно выбрать двух мужчин M_1 и M_2, и двух женщин W_1 и W_2 так, что пары $(M_1;W_1)$ и $(M_2;W_2)$ – знакомы, а $(M_1;W_2)$ и $(M_2;W_1)$ – незнакомы.

Пусть M_1 – мужчина, знакомый с наибольшим количеством женщин (если таких несколько, то выбираем любого из них). Далее, пусть W_2 – любая из женщин, которая незнакома с M_1 (из условия задачи, хотя бы одна такая женщина есть). Теперь, пусть M_2 – любой мужчина, который знаком с W_2. Задача будет решена, если среди знакомых M_1 найдется W_1, которая незнакома с M_2. Предположим обратное – пусть M_2 знаком со всеми знакомыми M_1. Так как M_2 знаком еще и с W_2 (с которой не знаком M_1), то он знаком с большим количеством женщин, чем M_1. Получаем противоречие с выбором M_1.

Математический бой 2 (9 класс, высшая лига)

1. Разрежьте квадрат на 5 частей, из которых можно составить 3 попарно различных квадрата.

5	5	5	5	5	3	3
5	5	5	5	5	3	3
5	5	5	5	5	2	2
5	5	5	5	5	2	2
5	5	5	5	1	1	1
5	5	5	5	1	1	1
4	4	4	4	1	1	1

Разрежем на части, пронумерованные одинаковыми цифрами. Из частей с тройками, четверками и пятерками выложим квадрат 6×6.

2. Пусть $S(n)$ – сумма цифр натурального числа *n*. Найдется ли такое *n*, что $nS(n) = 1000001$?

Ответ: нет, не найдется. Заметим, что n и $S(n)$ имеют одинаковые остатки при делении на 3. Поэтому все возможные остатки от деления $nS(n)$ на 3 равны 0 или 1, а $1000001 = 3 \cdot 333333 + 2$.

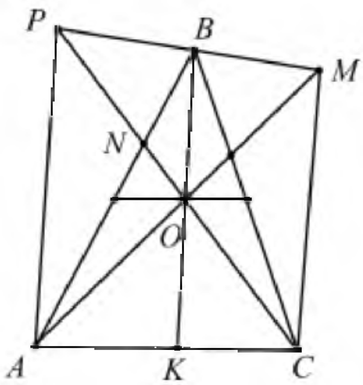
3. Два велосипедиста стартуют из некоторой точки кругового трека в одном направлении. Отношение скоростей велосипедистов равно m/n ($m > n$, дробь несократимая). Чему равно число точек обгона при достаточно долгой езде?

Ответ: *m* – *n*. Если первый проехал *m* кругов, а второй *n* кругов, то велосипедисты окажутся в месте старта и дальше точки обгона (всего обгонов было *m* – *n*) повторяются. Осталось понять, почему точки первых *m* – *n* точек обгона различны. Ввиду того, что любую из этих точек обгона можно принять за новую точку старта, то совпадение каких либо точек обгона (из первых *m* – *n*) означает, что велосипедисты встретятся в точке начального старта раньше, чем указано вначале. Пусть это произошло впервые после того как первый проехал m_1 кругов, а второй n_1 кругов. Ясно, что дальше ситуация повторяется и $m = m_1 k$, $n = n_1 k$. Ввиду взаимной простоты чисел m и n, $m = m_1$, $n = n_1$.

4. Пусть a и b такие натуральные числа, что для любого натурального числа t числа $at+1$ и $bt+2$ имеют общий натуральный делитель, больший 1. Чему может быть равно отношение a/b?

Ответ: $a/b = 1/2$. Если $a/b = 1/2$, то есть $a = k, b = 2k$, тогда числа $at+1$ и $bt+2$ имеют общий натуральный делитель $kt+1$. Допустим $b \neq 2a$ и $n = |b-2a| > 0$. Пусть для n числа $an+1$ и $bn+2$ делятся на натуральное число $d > 1$. Тогда $2(an+1)-(bn+2) = \pm n^2$ и $(bn+2)-(an+1) = (b-a)n+1$ делятся на d, что невозможно ввиду взаимной простоты указанных чисел.

5. Внутри средней линии треугольника ABC, параллельной стороне AC, выбрана произвольная точка O. Через вершины A и C параллельно BO провели прямые, которые пересекают прямые CO и AO соответственно в точках P и M. Докажите, что точки B, P и M лежат на одной прямой.



Воспользуемся теоремой Менелая для треугольника ANO. Точки P, B, M лежат на одной прямой, если выполняется равенство: $\frac{AB}{BN}\cdot\frac{NP}{PO}\cdot\frac{OM}{MA} = 1$. Ввиду подобия соответствующих треугольников достаточно проверить равенство: $\frac{AP+BO}{BO}\cdot\frac{AP}{AP+BO}\cdot\frac{OM}{MA} = 1$ или $\frac{MA}{OM} = \frac{PA}{OB}$. Но $\frac{MA}{OM} = \frac{AC}{KC} = \frac{PA}{OK} = \frac{PA}{OB}$, что и требуется.

6. Решите в действительных числах систему: $\begin{cases} x^2+xy+y^2 = 37 \\ x^2+xz+z^2 = 28 \\ y^2+yz+z^2 = 19 \end{cases}$.

Ответ: $\pm(4,3,2), \pm\left(\frac{10}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{8}{\sqrt{3}}\right)$. Вычтем из первого равенства второе. Получим $(y-z)(x+y+z) = 9$. Аналогично, вычитая из второго уравнения третье, получим $(x-y)(x+y+z) = 9$. Отсюда $x-y = y-z = \frac{9}{x+y+z}$. Положим $x-y = y-z = d$. Тогда $x = y+d$, $z = y-d$. Подставим в равенство

$(y-z)(x+y+z)=9$. Получим $yd=3$. Подставим $x=y+d$ в первое уравнение, получим $3y^2+d^2=28$. Отсюда получаем четыре решения системы: $\pm(4,3,2),\pm\left(\frac{10}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{8}{\sqrt{3}}\right)$.

7. В некоторой компании 25 акционеров, причём любые 15 из них владеют не менее, чем 50% акций компании. Каким наибольшим процентом всех акций может владеть один акционер?

Ответ: 20%. Расположим акционеров по возрастанию у них количества акций, и обозначим через x_i – процент акций у i – го акционера: $x_1\le x_2\le x_3\le\ldots\le x_{25}$. Тогда $x_1+x_2+\ldots+x_{15}\ge 50$, $x_{15}\ge\frac{50}{15}=\frac{10}{3}$ и $x_{16}+x_{17}+\ldots+x_{24}\ge 9\cdot\frac{10}{3}=30$, отсюда $x_1+x_2+\ldots+x_{24}\ge 80$ и $x_{25}\le 20$. Такая ситуация возможна, если каждый из $x_1=x_2=x_3=\ldots=x_{24}=\frac{10}{3}$ и $x_{25}=20$.

8. Докажите для положительных чисел a, b и c неравенство $\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+3a}+\frac{c}{a+4b}\ge\frac{2}{3}$.

Воспользуемся неравенством: $\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}+\frac{x_3^2}{y_3}\ge\frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{y_1+y_2+y_3}$, которое верно для любых положительных y_1,y_2,y_3. Имеем $\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+3a}+\frac{c}{a+4b}=\frac{a^2}{ab+2ac}+\frac{b^2}{bc+3ab}+\frac{c^2}{ac+4bc}\ge\frac{(a+b+c)^2}{4ab+5bc+3ac}$.
Чтобы проверить, что последняя дробь не меньше 2/3, достаточно проверить неравенство: $3a^2+3b^2+3c^2+6ab+6bc+6ac\ge 8ab+6ac+10bc$ или $3a^2+3b^2+3c^2\ge 2ab+4bc$. Последнее неравенство может быть проверено либо с использованием дискриминанта, либо преобразованием к неравенству $3\left(a-\frac{b}{3}\right)^2+3\left(c-\frac{2b}{3}\right)^2+\frac{4b^2}{3}\ge 0$.

Математический бой 3 (9 класс, высшая лига)

1. Пусть x_1 и x_2 – корни приведенного квадратного трехчлена $f(x)$. Вычислите $f(x_1+1)+f(x_2+1)$.

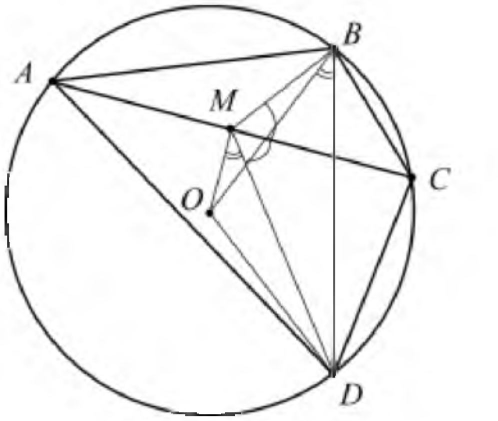
Ответ: 2. Из условия следует, что $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)$. Отсюда $f(x_1+1)+f(x_2+1)=1\cdot(x_1+1-x_2)+(x_2+1-x_1)\cdot 1=2$.

2. Найдите все иррациональные значения x, при которых значения выражений $\left(x^3+2x^2\right)$ и $\left(x^2+x\right)$ – целые числа.

Ответ: $\left(-1\pm\sqrt{5}\right)/2$. Заметим, что $(x^3+2x^2)-(x^2+x)=x\left(x^2+x-1\right)$. Далее, если x – иррациональное число, то $x^2+x-1=0$, и $x=\left(-1\pm\sqrt{5}\right)/2$. Так как, при $x=\left(-1\pm\sqrt{5}\right)/2$, $x^3+2x^2=(x+1)(x^2+x)-x=(x+1)\cdot 1-x=1$, то оба значения $x=\left(-1\pm\sqrt{5}\right)/2$ являются решениями задачи.

3. На диагонали AC вписанного четырёхугольника $ABCD$ нашлась такая точка M, что $\angle BMC=\angle DMC=\angle BAD$. Верно ли, что M обязательно середина диагонали AC?

Ответ: да, верно. Рассмотрим случай, когда AC не является диаметром. В этом случае $\angle BMD=\angle BOD$ и четырехугольник $OMBD$ вписанный. Следовательно, $\angle OMD=\angle OBD=90^\circ-\angle BAD$ и $\angle CMO=90^\circ$. В итоге M – середина AC. Случай, когда AC – диаметр, рассмотрите самостоятельно.



4. Решите систему: $\begin{cases}(x+y)(x+y+z)=18\\(y+z)(x+y+z)=30.\\(z+x)(x+y+z)=24\end{cases}$

Ответ: $(1,2,3)$; $(-1,-2,-3)$. Сложим все уравнения, получим $(x+y+z)^2=36,\ x+y+z=\pm 6$. Отсюда легко получаем все решения.

5. Какое количество последовательных автобусных билетов надо купить, чтобы гарантированно получить «счастливый» билет»? (Билет считается «счастливым», если сумма первых трех цифр равна сумме последних трех цифр).

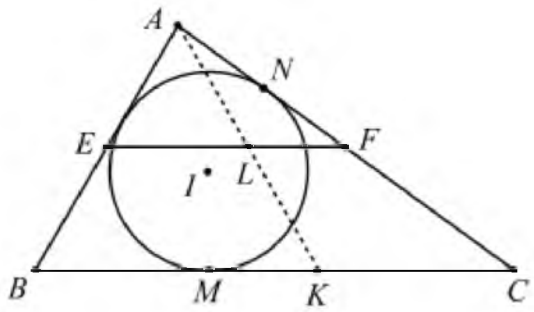
Ответ: 1001. Заметим, что если первый из купленных билетов имеет номер 000001, то первый счастливый билет будет 001001, поэтому есть, по крайней мере, один случай, когда купить меньше чем 1001 билетов недостаточно. Покажем теперь, что 1001 билета всегда достаточно. Обозначим шестизначный номер первого купленного билета как $\overline{AB}$, где A представляет собой число, образованное первыми тремя цифрами и $B-$ число, образованное последними тремя. Если $A > B$, мы можем купить $A - B \leq 1000$ билетов и получить счастливый билет $\overline{AA}$. Если $A < B$, то покупка $1001 - B$ билетов приводит нас к билету $A'B'$, с $A' = A + 1$ и $B' = 0$. Затем мы покупаем еще $A + 1$ билет, и получаем счастливый билет $\overline{A'A'}$. В этом случае мы получаем счастливый билет после покупки $1002 - (B - A)$ билетов. Так как $A < B$, то 1001 билета всегда будет достаточно.

6. На единичном отрезке расположено несколько непересекающихся отрезков красного цвета, общая длина которых больше 0,5. Обязательно ли найдутся две красные точки на расстоянии 1/99?

Ответ: нет, не обязательно. Приведем пример такого расположения отрезков, при котором не найдутся две красные точки на расстоянии 1/99. Разобьем весь единичный отрезок на 99 частей, нечетные из которых будут окрашены в красный цвет и иметь длину 2/199. Тогда общая длина красных отрезков 100/199. Остальные 49 частей (незакрашенные) будут равны между собой по длине. Длина каждой из них равна $99/(49 \cdot 199) > 1/99$. Таким образом, длина каждого красного отрезка меньше 1/99, а расстояние между различными красными отрезками больше 1/99 и, значит, двух красных точек на расстоянии 1/99 не найдется.

7. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC и AC в точках M и N соответственно, E и F – середины сторон AB и AC, соответственно. Прямые MN и EF пересекаются в точке D. Найдите площадь треугольника BED, если $AB = 20$ и $\angle ABC = 60°$.

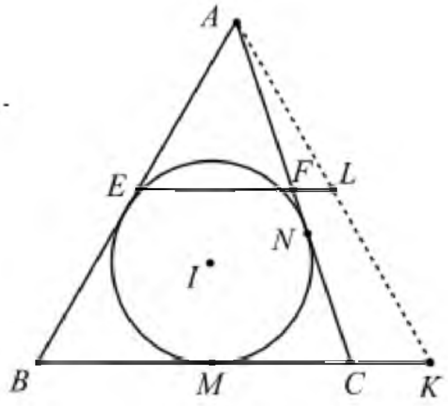
Ответ: $25\sqrt{3}$.



Построим равносторонний треугольник ABK. Пусть L – точка пересечения прямой AK с EF. Покажем, что L совпадает с D. Возможны два случая расположения точки K – на стороне BC либо на продолжении BC. Рассмотрим первый случай. Покажем, что L лежит на прямой MN. В самом деле, четырехугольник $IMKL$ вписанный. Поэтому

$$\angle MLA = 90^\circ + \angle ILM = 90^\circ + \angle IKM = 90^\circ + \angle IAB = 90^\circ +$$

. С другой стороны, четырехугольник $ILNA$ также вписанный. Поэтому $\angle ALN = \angle AIN = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$. В результате $\angle MLA + \angle ALN = 180^\circ$. Значит, площадь



треугольника BED составляет одну четвертую площади треугольника ABK и равна $25\sqrt{3}$. Второй случай рассматривается аналогично.

8. Дан некоторый квадратный трехчлен с целыми коэффициентами $P(x)$. Можно ли для некоторого $P(x)$, с ненулевым коэффициентом при x^2, покрыть ряд натуральных чисел множеством значений многочлена $P(x)$ в натуральных точках?

Ответ: нет, нельзя. Предположим, что такой квадратный трехчлен $P(x)$ существует. Пусть $P(x)=ax^2+bx+c$. Ясно, что для a < 0 значения $P(x)$ ограничены сверху и натуральный ряд этими значениями не закрыть, поэтому можно считать, что a > 0. Если для некоторых целых чисел m, n выполняются равенства $am^2+bm+c=k$ и $an^2+bn+c=k+1$, то вычитая одно из другого получаем, что $n-m=\pm 1$. Иными словами, соседние натуральные числа могут закрываться только значениями $P(x)$ в соседних натуральных точках. Поскольку, начиная с некоторого натурального n, функция $y=P(x)$ является возрастающей, то найдется m такое, что $P(m)=k, P(m+1)=k+1, P(m+2)=k+2$. Вычитая из второго равенства первое, а потом из третьего второе, получим $2am+a+b=1; 2am+3a+b=1$. Отсюда $a=0$, что неверно по условию.

9 класс, задачи первой лиги

7. Известно, что a, b и c – целые положительные числа и $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$. Докажите, что $a^2+b^2+c^2$ – точный квадрат. (Точный квадрат – это квадрат некоторого натурального числа).

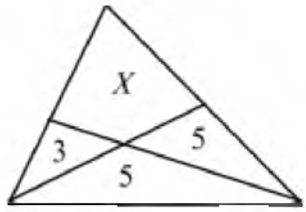
$$a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+\frac{(ab)^2}{(a+b)^2}=\frac{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+b^2+2ab\right)+(ab)^2}{(a+b)^2}=$$

$$=\frac{\left(a^2+b^2\right)^2+2\left(a^2+b^2\right)ab+(ab)^2}{(a+b)^2}=\left(\frac{(a+b)^2-ab}{a+b}\right)^2=(a+b-c)^2.$$

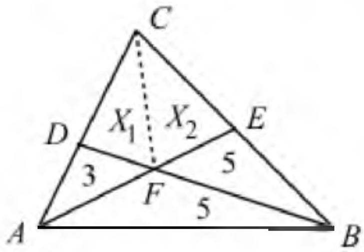
8. Бассейн наполняют водой две трубы. После наполнения половины бассейна, скорость заполнения одной трубой увеличилась на 10%, другой – на 20%. В результате, вторая половина бассейна была наполнена на 2 часа быстрее, чем первая. Может ли бассейн быть полностью заполнен не более, чем за 21 час?

Ответ: нет, не может. Обозначим через t – время, за которое была заполнена первая половина бассейна, T - время, за которое был заполнен весь бассейн, x и y – скорости заполнения бассейна первой и второй трубой. Тогда из условия задачи $(x + y)t = (1{,}1x + 1{,}2y)(t - 2)$. Выразим t: $t = \dfrac{2(1{,}1x + 1{,}2y)}{0{,}1x + 0{,}2y}$.

Разделим числитель и знаменатель этой дроби на y, и обозначим $z = x/y$, отсюда $t = \dfrac{2{,}2z + 2{,}4}{0{,}1z + 0{,}2}$ (очевидно, что $z > 0$). После тождественного преобразования дроби, получаем: $t = 22 - \dfrac{20}{z+2}$, отсюда $12 < t < 22$ (при $z > 0$). Так как $T = 2t - 2$, то $22 < T < 42$



9. Треугольник разделен на четыре части двумя отрезками. Известны площади трех треугольников (см. рисунок). Найти площадь четырехугольника X.

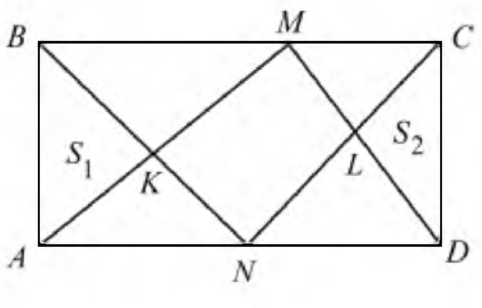


Ответ: 27. Проведем отрезок CF, который разбивает четырехугольник на два треугольника, CDF и CEF, площади которых соответственно равны X_1 и X_2 (очевидно, $X = X_1 + X_2$). Так как треугольники ABF и BEF имеют одинаковую площадь и их высоты равны, то основания также равны, то есть $AF = EF$. Треугольники ACF и CEF также имеют общую высоту, и одинаковые основания, поэтому их площади равны: $X_2 = X_1 + 3$. Треугольники ADF и ABF имеют общую высоту и площади 3 и 5, соответственно, поэтому $BF : DF = 5 : 3$. Треугольники CBF и CDF имеют равные высоты, поэтому их площади относятся как $5 : 3$, отсюда $(5 + X_2) : X_1 = 5 : 3$. Решая систему, получаем: $X_1 = 12$; $X_2 = 15$ и $X = 27$.

10. Для чисел x, y, z и k выполняются соотношения $\dfrac{7}{x+y} = \dfrac{k}{z+x} = \dfrac{11}{z-y}$.

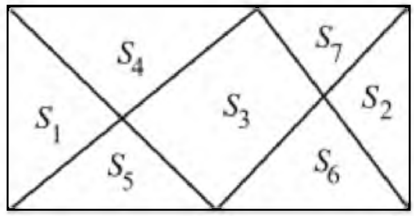
Найдите k.

Ответ: $k = 18$.



11. В прямоугольнике $ABCD$ площадь треугольника ABK равна S_1, площадь треугольника CDL равна S_2. Найдите площадь четырехугольника $KLMN$.

Ответ: $S_1 + S_2$. Обозначим площади треугольников *BKM*, *AKN*, *NLD* и *MLC*, через S_4, S_5, S_6 и S_7, а площадь прямоугольников *ABCD* и *KMLN* – через *S* и S_3. Тогда $S_3 + S_5 + S_6 = S/2$, $S_3 + S_4 + S_7 = S/2$ и $S_1 + S_2 + S_5 + S_6 = S/2$. Из двух последних равенств следует, что $S_3 = S_1 + S_2$.



12. В неравнобедренном треугольнике *ABC* с углами в вершинах *A*, *B*, *C* равными соответственно α, β, γ, серединный перпендикуляр к стороне *AC* и биссектриса угла *B* пересекаются в точке *P*. Найдите угол *APC*.

Ответ: $180° - \beta$. Серединный перпендикуляр к стороне *AC* и биссектриса угла *B* пересекаются в середине дуги описанной окружности треугольника *ABC*, не содержащей точки *A*.

Высшая лига, 10 – 11 класс

Математический бой № 1, Высшая лига 10 – 11 класс

1. Докажите неравенство $x^5 + y^5 \geq x^3y^2 + x^2y^3$ для положительных чисел. Ясно, что $\left(x^5 + y^5\right) - \left(x^3y^2 + x^2y^3\right) = \left(x^3 - y^3\right)\left(x^2 - y^2\right)$ – сомножители в правой части одного знака.

2. На плоскости требуется разместить *n* белых точек и наименьшее возможное число черных точек так, чтобы на любом отрезке, соединяющем две белые точки, находилась хотя бы одна черная точка. Какое минимальное количество черных точек необходимо для этого?

Ответ: $n - 1$. *Пример.* Расположим все белые точки на одной прямой, а черные последовательно между белыми. *Оценка.* Пусть на плоскости имеются точки, удовлетворяющие условию. Проведем прямую, которая не является перпендикулярной ни одному из отрезков, соединяющему две белые точки. Теперь ортогонально спроектируем все точки на построенную прямую. Никакие две белые точки не проектируются в одну точку.

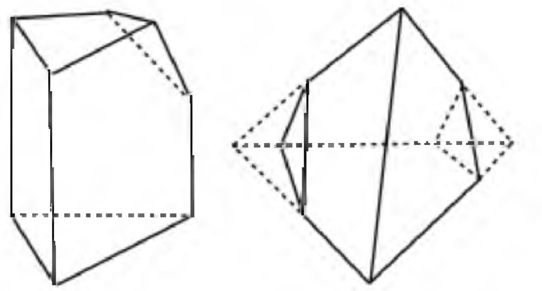
3. Прямоугольник, состоящий из клеток шахматной доски 8×8, называется *несбалансированным*, если он имеет различное число белых и черных клеток. Сколько несбалансированных прямоугольников на шахматной доске?

Ответ: 400. Если хотя бы одна сторона прямоугольника четная, то прямоугольник сбалансированный. Значит, у *несбалансированного* прямоугольника обе стороны – нечетные. Всего есть 8 способов выбрать прямоугольник высотой в одну клетку, 6 способов выбрать высотой в три, 4 способа выбрать высотой в пять и 2 способа, чтобы выбрать высотой в семь. Всего 8 + 6 + 4 + 2 = 20 возможных вариантов нечетной высотой. Аналогично, 20 возможных вариантов нечетной шириной, следовательно, на всего 20 · 20 = 400 прямоугольников со сторонами нечетной длины.

4. Для любой пары чисел определена некоторая операция *, удовлетворяющая следующим свойствам: $a*(b*c)=(a*b)\cdot c$ и $a*a=1$. Решите уравнение: $x*3=673$.

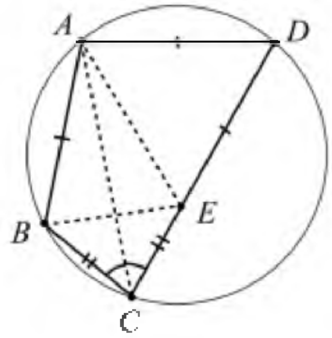
Ответ: 2019. Во-первых, $x*1=x*\left(x*x\right)=\left(x*x\right)\cdot x=1\cdot x=x$. Во-вторых, $\left(x*3\right)\cdot 3=673\cdot 3=2019$, $\left(x*3\right)\cdot 3=x*\left(3*3\right)=x*1=x$.

5. Существует ли выпуклый многогранник, у которого 6 граней, 8 вершин и 12 ребер, при этом имеются четыре грани, каждая пара из которых имеет общее ребро?



Ответ: да, существует. На рисунках два примера. В первом – от треугольной призмы плоскостью отсечена вершина, здесь боковые грани и нежнее основание образуют четыре грани, каждая пара из которых имеет общее ребро. На втором – от тетраэдра двумя плоскостями отсечены две вершины, здесь каждая пара граней исходного тетраэдра имеет общее ребро. Ясно, что оба многогранника имеют 6 граней, 8 вершин и 12 ребер. (China girls mathematical olimpiad).

6. Четырехугольник $ABCD$ вписанный, при этом $AB = AD$ и $AB + BC = CD$. Найдите величину угла $\angle CDA$.

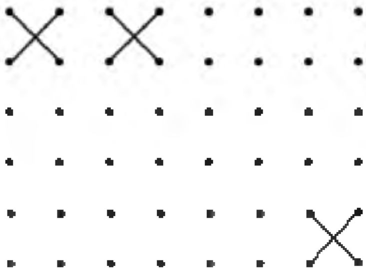


Ответ: 60°. Отложим на DC отрезок DE, равный AB. Из условия следует, что $CE = CB$. Кроме того, углы BCA и DCA равны, поскольку равны дуги AB и AD. Для угла C равнобедренного треугольника BCE отрезок CA содержит его биссектрису, значит, является серединным перпендикуляром к BE. Это, в свою очередь, означает, что $AB = AE$, треугольник ADE – равносторонний, а $\angle CDA$ = 60°. (Nordic Mathematical Contest).

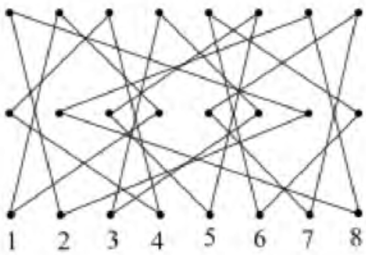
7. Имеются 48 камней. На первом шаге их раскладывают в 24 кучи по 2 камня, на втором – в 16 куч по 3 камня, на третьем в 12 куч по 4 камня и так далее. После каждого шага должно выполняться требование: никакие два камня не встретились в куче более одного раза. Какое максимальное количество шагов можно сделать?

Ответ: 5 шагов. *Оценка*. Допустим, что удалось разложить по 2, 3, 4, 6, 8, 12. Количество куч по 12 камней равно 4. Рассмотрим 6 камней ранее попавшие в одну кучу на 4 шаге. Ясно, что какие-то два камня попадут в одну из четырех куч по 12 камней. Значит, шагов не более чем 5.

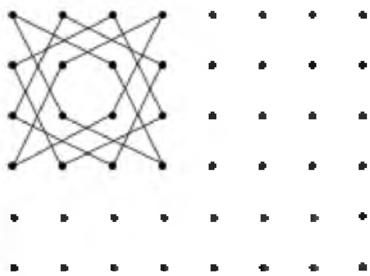
Пример. Расположим камни в виде прямоугольника 6×8. В каждой строке 8 камней, в столбце 6 камней. Будем считать, что строка куча из 8 камней, столбец – куча из 6 камней. Ясно, что эти два комплекта удовлетворяют требованиям. Дальнейшее формирование куч будет из разных линий. Сформируем 24 кучи по два камня как показано на рисунке. Отметим *свойство* 1. Если 2 камня находятся в одной куче из двух камней, то расстояние между ними равно $\sqrt{2}$.

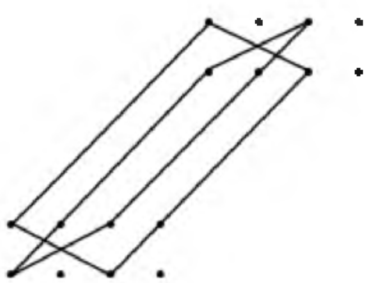


Покажем, как будем разбивать на кучи по три камня. Используем строки первую, третью и пятую сверху построим треугольники как показано на рисунке. Внизу указаны номера треугольников. Отметим, что по построению треугольники с номерами 1, 3, 4, 5, 6, 7 равны по трем сторонам, а их длины сторон равны $\sqrt{17}$, $\sqrt{13}$, $2\sqrt{2}$. Треугольники с номерами 2 и 8 также равны их длины сторон $\sqrt{17}$, $\sqrt{29}$, $\sqrt{53}$. Сделав параллельный перенос на клетку вниз получим второй комплект из 8 треугольников. *Свойство* 2. Если 2 камня находятся в одной куче из трех камней, то расстояние между ними равно $\sqrt{17}$, $\sqrt{13}$, $2\sqrt{2}$, $\sqrt{29}$ или $\sqrt{53}$.



Кучи по 4 камня. В левом углу 4×4 построим два ромба с длиной стороны $\sqrt{5}$, диагоналями $\sqrt{10}$ и $\sqrt{2}$ отметим, что точки, между которыми расстояния $\sqrt{2}$, не попадали в одну пару среди 24 куч и два – квадрата с длиной стороны $\sqrt{5}$, диагоналями $\sqrt{10}$. Такой же комплект построим в левом нижнем углу 4×4. Наконец, рассмотрим оставшиеся16 точек. Их нетрудно разбить по 4 так, чтобы они стали вершинами параллелограммов. *Свойство* 3. Если 2 камня находятся в одной куче из четырех камней, то расстояние между ними равно $\sqrt{5}$, $4\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$ и $\sqrt{2}$ при этом точки, между которыми расстояния $\sqrt{2}$, не попадали в одну пару





среди 24 куч. Итак, никакая пара точек не была в разных кучах.

8. Найдите многочлен $P(x)$ наименьшей степени такой, что 1) $P(x)$ имеет целые коэффициенты; 2) каждый корень многочлена $P(x)$ является целым числом; 3) $P(0) = -1$; 4) $P(3) = 128$.

Ответ: $P(x) = (x - 1)\cdot(x + 1)^3$. Обозначим $a_1, a_2, \ldots a_m$ – корни многочлена $P(x)$, n – степень $P(x)$. Тогда $P(x)=a(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_m)^{n_m}$, здесь a и $a_1, a_2, \ldots a_m$ – целые числа. По условию $P(0) = -1$, $a\cdot a_1^{n_1}\cdot a_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot a_m^{n_m}=-1$ и числа a и $a_1, a_2, \ldots a_m$ – равны ±1. В свою очередь, многочлен $P(x)$ имеет вид $P(x)=(x-1)^{2p+1}(x+1)^{n-(2p+1)}$. Рассмотрим $P(3)=2^{2p+1}4^{n-(2p+1)}=2^{2n-1-2p}$, $128=2^7$, $2n=8+2p$. Значит, $n \le 4$, при этом равенство достигается, если $n = 4$, $p = 0$, $P(x) = (x - 1)\cdot(x + 1)^3$. (Nordic mathematical contest).

Математический бой № 2

1. В 2019 коробках находится 1, 2, 3, …, 2019 конфет. За один раз Винни Пух может выбрать любую группу коробок и из каждой коробки этой группы извлечь одинаковое количество конфет. За какое минимальное количество раз Винни Пух сможет забрать все конфеты?

Ответ: за 11. *Оценка.* Коробки, в которых находится одинаковое количество конфет, объединим в одну группу коробок. Вначале имеем 2019 групп (по одной коробке). Пусть в некоторый момент имеется n групп с различным количеством конфет (некоторые из которых могут быть пустыми). Пусть Винни выбрал k групп, из которых забирал конфеты. Заметим, что после этого есть k групп с различным количеством конфет и $n - k$ групп с различным количеством конфет, а всего таких групп не меньше $\max\{k, n - k\} \ge n/2$ групп с разным числом конфет. Значит, после первого хода их не менее 1009, второго 505, затем 253, 127, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1.

2. Можно ли в любой бесконечной арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, отыскать три члена, которые являются длинами сторон прямоугольного треугольника?

Ответ: нет, нельзя. Рассмотрим арифметическую прогрессию 1, 3, 5, …. Для нечетных чисел a, b, c равенство $a^2 + b^2 = c^2$ невозможно, поскольку остаток от деления на 4 у правой части равенства 1, у левой 2.

3. С квадратным трехчленом $ax^2 + bx + c$ можно выполнять две операции: 1) поменять местами коэффициенты a и c; 2) заменить x на $x + d$, где d – любое число. Можно ли с помощью этих операций превратить $x^2 - x - 2$ в $x^2 - x - 1$?

Ответ: нет, нельзя. Обе операции сохраняют величину дискриминанта у квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$. Для операции 1) это совсем очевидно.

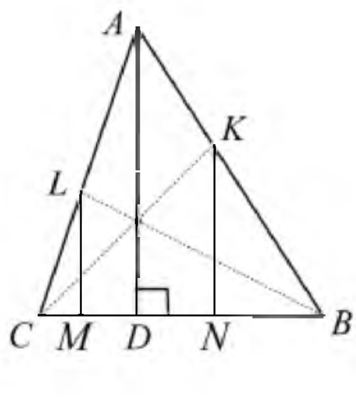
Рассмотрим дискриминант $a(x + d)^2 + b(x + d) + c = ax^2 + (2ad + b)x + (ad^2 + bd + c)$. Получим: $(2ad + b)^2 - 4a(ad^2 + bd + c) = 4a^2d^2 + 4abd + b^2 - 4a^2d^2 - 4abd - 4ac = b^2 - 4ac$. Осталось заметить, что у исходного трехчлена дискриминант равен 9, а у второго равен 5.

4. Пять отрезков таковы, что из любых трёх можно составить треугольник. Какое максимальное количество тупоугольных треугольников может оказаться?

Ответ: 9. *Оценка.* Заметим, что хотя бы один из этих треугольников – остроугольный. Пусть длины отрезков $a \geq b \geq c \geq d \geq e$. Предположив, что все треугольники не являются остроугольными, используя теорему косинусов и тот факт, что против большей стороны лежит больший угол можно записать три неравенства: $a^2 \geq b^2 + c^2$, $b^2 \geq c^2 + d^2$, $c^2 \geq d^2 + e^2$. Сложим эти неравенства $a^2 \geq c^2 + 2d^2 + e^2 \geq d^2 + 2de + e^2$ и получим $a \geq d + e$.

Пример пяти отрезков: 19, 20, 21, 30, 38. Обоснование. Во-первых, поскольку $19 + 20 > 38$ из любых трёх отрезков можно составить треугольник. Поскольку $1444 = 38^2 > 30^2 + 21^2 = 1341$, любой треугольник со стороной 38 будет тупоугольным. Пусть треугольник не имеет стороны длины 38, но имеет сторону длины 30. Поскольку $900 = 30^2 > 21^2 + 20^2 = 841$, треугольники с максимальной стороной 30 будет тупоугольными. Наконец остался единственный треугольник с длинами сторон 19, 20, 21, который остроугольный, поскольку $761 = 19^2 + 20^2 > 21^2 = 441$.

5. На высоте AD, лежащей внутри треугольника ABC, взята произвольная точка. Точки K и L выбраны на сторонах AB и AC так, что отрезки CK и BL проходят через выбранную точку. Докажите, что углы ADK и ADL равны между собой.

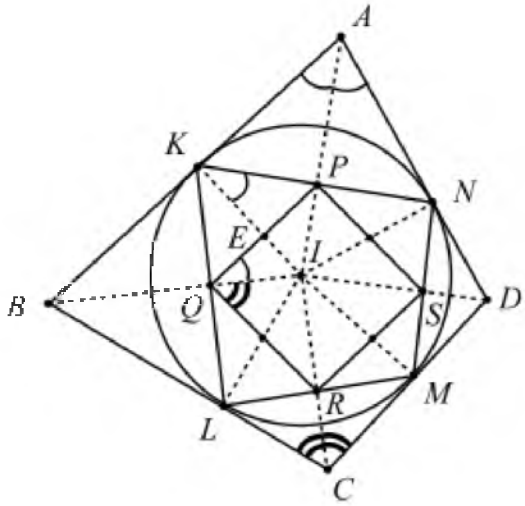


Из точек L и K опустим перпендикуляры LM и KN на сторону BC. Для решения задачи достаточно заметить соотношение $\frac{LM}{MD} = \frac{KN}{ND}$ или $\frac{LM \cdot ND}{MD \cdot KN} = 1$. Имеют место следующие соотношения: $LM = CL\sin\gamma$, $MD = LA\cos\gamma$, $KN = KB\sin\beta$, $ND = AK\cos\beta$ и $\frac{CL}{LA} \cdot \frac{AK}{KB} \cdot \frac{BD}{DC} = 1$ (теорема Чевы). Отсюда получаем

$$\frac{LM \cdot ND}{MD \cdot KN} = \frac{CL \cdot AK \sin\gamma \cos\beta}{LA \cdot KB \sin\beta \cos\gamma} = \frac{\frac{CD}{\cos\gamma}\sin\gamma}{\frac{BD}{\cos\beta}\sin\beta} = \frac{AD}{AD} = 1.$$

6. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность с центром I. Стороны AB, BC, CD и DA касаются окружности в точках K, L, M и N, соответственно. Точки P, Q, R и S середины сторон NK, KL, LM и MN. Докажите, что если четырехугольник $PQRS$ прямоугольник, то $ABCD$ вписанный четырехугольник.

Соединим вершины четырехугольника $ABCD$ с центром I. Ясно, что проведенные отрезки будут проходить через точки P, Q, R и S. В треугольнике AKI угол K – прямой, поскольку K точка касания, отрезок PK является высотой, поскольку AI серединный перпендикуляр к KN. Отсюда следует $\angle IAK = \angle IKP$.

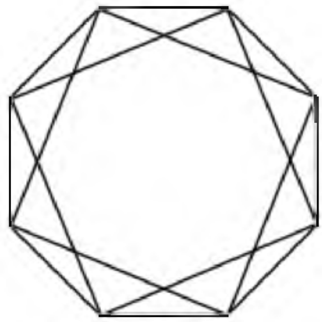


Четырехугольник $IPKQ$ вписанный, поскольку его углы P и Q – прямые. Отсюда следует $\angle IQP = \angle IKP$. Значит, $\angle IAK = \angle IQP$. Из соображений симметрии $\angle ICL = \angle IQR$. Из доказанного вытекает, что сумма половин углов A и C четырехугольника $ABCD$ равна 90°, значит, $ABCD$ – вписанный. China Western Mathematical Olympiad.

Замечание. Верно и обратное утверждение.

7. Про каких-то n человек известно, что: 1) среди любых трех человек есть двое, которые знают друг друга; 2) среди любых четырех человек есть двое, которые не знают друг друга (предполагается, что если A знает B, то и B знает A). Найдите наибольшее возможное значение n.

Ответ: 8. *Оценка.* Допустим, нашелся человек, который знаком с шестью. Тогда среди этих шести найдутся либо трое попарно незнакомых, что противоречит 1), либо трое попарно знакомых, что противоречит 2). Отсюда следует, что каждый знаком не более чем с пятью. Допустим, нашелся человек незнакомый с четырьмя. Тогда из 1) следует, что эти четверо должны быть попарно знакомы, но это противоречит 2). Отсюда следует, что каждый незнаком не более чем с тремя. В итоге получаем, что $n \leq 9$. Допустим, что $n = 9$. В этом случае каждый знаком ровно с пятью. В графе знакомств получаем 9 нечетных вершин. Итак, $n \leq 8$. Пример. Граф знакомств изображен на рисунке. China Western Mathematical Olympiad 2005.



8. Каждую субботу по письмам слушателей выбирают 20 популярнейших песен. Известно, что

1) в одном и том же порядке песни не могут звучать две недели подряд;

2) песня, однажды опустившаяся в выборке, в дальнейшем уже не поднимается.

Какое максимальное количество суббот, следуя этим правилам, могут держаться в выборке одни и те же песни?

Ответ: 191 субботу. *Оценка.* Из условия 1) следует, что каждую субботу какие-то песни поднимаются в выборке (какие-то опускаются, какие-то, быть может, остаются на месте). Присвоим номера песням такие, в каком порядке эти песни прозвучали в первую субботу. Рассмотрим песню k. Представим себе, что прозвучав на некоторой неделе под номером n, песня k на следующей неделе, поднялась в рейтинге на одну или несколько позиций. Если $n > k$, то это означает, что с первой по n-ную неделю песня опускалась в выборке, что невозможно в силу условия 2). Значит, она поднимается с позиции не меньше k. Отсюда следует, что песня k может подниматься в выборке не более, чем $k - 1$ раз. Общее количество подъемов не превосходит сумму $0 + 1 + 2 + \ldots + 19 = 190$. Поскольку нет дней без подъемов, то и общее количество суббот с подъемами не более 190, с учетом начальной недели 191.

Пример. Присвоим номера песням такие, в каком порядке эти песни прозвучали в первую субботу. Во вторую субботу поднимается песня 2, песни исполняются так: 2, 1, 3, 4, …, 20. Далее, две недели поднимается песня 3, песни исполняются так: 2, 3, 1, 4, …, 20, далее 3, 2, 1, 4, …, 20. В 191 субботу, песни исполняются так: 20, 19, 18, …, 2, 1.

Математический бой № 3

1. Найдите все положительные решения уравнения $x^{2019x} = (2019x)^x$.

Ответ: $x = \sqrt[2018]{2019}$. Пусть x – положительный корень уравнения. Возведем обе части уравнения в степень $1/x$. Получим $x^{2019} = 2019x$, можно сократить на x ($x > 0$ потери корней нет), $x^{2018} = 2019$, $x = \sqrt[2018]{2019}$.

2. Даны 2^{n-1} подмножества множества X, состоящего из n элементов такие, что пересечение любых трех из них – непустое. Докажите, что пересечение всех множеств не пусто.

Пусть S – данная совокупность подмножеств множества X. Ясно, что $\varnothing$ не принадлежит S. Далее, с одной стороны, для каждой пары множеств A и $X \setminus A$ не более одного множества принадлежит S, поскольку $A \cap X \setminus A = \varnothing$. С другой стороны, всего подмножеств множества X имеется 2^n, а в S находится 2^{n-1}

подмножества. Значит, из каждой такой пары ровно одно множество принадлежит S. Пусть A, $B \in S$, заметим, что $A \cap B \in S$. Действительно, если это не так, то $X \setminus (A \cap B) \in S$. Однако в этом случае получаем $A \cap B \cap (X \setminus (A \cap B)) = \varnothing$, что противоречит условию. Из доказанного вытекает, что пересечение всех множеств S является снова элементом множества S и не пусто.

1	6	5	8	2	3	7	4
5	4	1	6	3	7	2	8
2	7	6	3	1	8	4	5
8	5	2	7	6	4	1	3
4	2	3	5	8	1	6	7
6	3	7	2	4	5	8	1
7	1	8	4	5	2	3	6
3	8	4	1	7	6	5	2

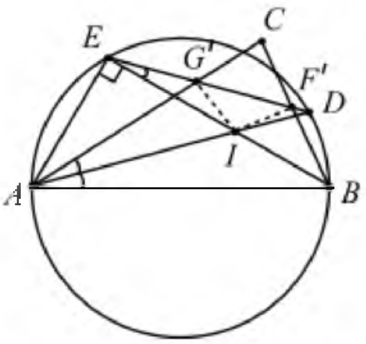
3. Можно ли клетки таблицы 8×8 заполнить числами от 1 до 8 так, чтобы в каждой строке, каждом столбце и на двух больших диагоналях были записаны различные числа?

Ответ: да. Пример на рисунке.

4. Решите уравнение $\sqrt{m} + \sqrt{n} = \sqrt{2019}$ в целых числах.

Ответ: (2019, 0), (0, 2019). После переноса $\sqrt{m}$ в правую часть и возведения в квадрат уравнение равносильно $2\sqrt{2019m} = m + 2019 - n$, здесь подкоренное выражение должно быть полным квадратом $2019 \cdot m = k^2$. В разложении $2019 = 3 \cdot 673$ простые множители в первой степени, значит, k делится на 2019, $k = 2019a$ и $m = 2019a^2$, где a неотрицательное целое число. Точно также замечаем $n = 2019b^2$. Уравнение принимает вид $\sqrt{2019a^2} + \sqrt{2019b^2} = \sqrt{2019}$, значит, $a + b = 1$.

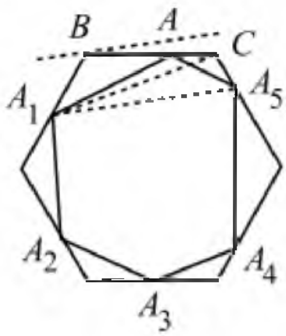
5. Пусть ABC треугольник, Γ – окружность с диаметром AB. Биссектрисы $\angle BAC$ и $\angle ABC$ пересекают окружность Γ в точках D и E соответственно. Вписанная в треугольник ABC окружность касается BC и AC в точках F и G соответственно. Докажите, что точки D, E, F и G лежат на одной прямой.



Обозначим точки пересечения ED с BC и AC как F' и G', I – точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Ясно, что углы ADB и AEB прямые. Достаточно заметить, что IF' и IG' перпендикулярны BC и AC. Ясно, $\angle G'EI = \angle DEB = \angle DAB = \angle DAG' = \angle G'AI$. Это означает, что четырехугольник $AEG'I$ – вписанный и $\angle AG'I = \angle AEI = \angle AEB = 90°$. Аналогично замечается, что $\angle BF'I = 90°$.(The 29th Nordic Mathematical Contest March)

6. *Перестройка* выпуклого m – угольника это замена двух последовательных сторон AB и BC на три стороны AM, MN и BN, где M и N – середины сторон AB и BC. Пусть имеется правильный шестиугольник P_6 площади 1, к нему применили перестройку и получили семиугольник P_7, затем получили P_8 (выбрав для перестройки любую из вершин P_7). После нескольких таких перестроек был получен некоторый n – угольник. Докажите, что его площадь не меньше 1/2.

Заметим, что у построенного n – угольника есть 6 вершин, которые лежат на сторонах P_6. Для этого раскрасим стороны P_6 в шесть разных цветов (считаем, что вершины окрашены в два цвета). В процессе перестроек будут появляться некрашеные стороны, а крашенные на каждом шаге или остаются неизменными или теряют половину, то есть не исчезают. Рассмотрим теперь многоугольники P со свойством: на каждой стороне P_6 есть вершина многоугольника P. Осталось заметить, площадь P не меньше 1/2. Пусть $P = A_1A_2A_3A_4A_5A$, при этом вершина A лежит внутри стороны BC шестиугольника P_6. Минимальное расстояние точек отрезка BC до A_1A_5 реализуется на конце отрезка (на рисунке в точке C). Значит, $S_{A_1A_2A_3A_4A_5A} \geq S_{A_1A_2A_3A_4A_5C}$. Отсюда следует, что вершины P должны лежать в вершинах P_6. Среди всех таких P минимум площади достигается на треугольнике, вершины которого идут через одну в P_6. (IMO Training Camp Buet Contest 2008)



7. Найдите все натуральные n, такие, что число $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)$ является произведением трех различных простых чисел в некоторых ненулевых степенях.

Ответ: $n = 2, 3, 6$. Пусть $N = n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)$. Ясно, что число N делится на 2 и 3. Обозначим третье простое число p. Из чисел n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ выделим три подряд идущих числа m, $m+1$, $m+2$, где m нечетное число. Нечетные числа m и $m+2$ не имеют общих делителей, значит, одно из них степень числа 3, другое – степень числа p, а $m+1$ является степенью числа 2. Решим два уравнения:

1) $2^k + 1 = 3^l$. Во-первых, пары $k = 1$, $l = 1$ и $k = 3$, $l = 2$ являются решениями этого уравнения. Заметим, что для $k > 3$ и $l > 2$ других решений уравнение не имеет. Из равенства $3^l - 1 = (3-1)\left(3^{l-1} + 3^{l-2} + \ldots + 3 + 1\right)$ вытекает, что если l – нечетное число, то во второй скобке имеется сумма нечетного количества нечетных чисел, то есть нечетное число, большее 1 и $2^k = 3^l - 1$ невозможно. Если $l = 2d$ – четное число, то получим соотношение $2^k = 3^{2d} - 1 = (3^d - 1)(3^d + 1)$, где числа $3^d - 1$ и $3^d + 1$ – два последовательных числа – степени двойки. Это возможно лишь, когда эти числа 2 и 4. Итак, для двух пар (2, 3) и (8, 9) получим 2, 3, 4, 5 и 6, 7, 8, 9

2) $2^k = 3^l + 1$. Во-первых, пара $k = 2$, $l = 1$ является решением этого уравнения. Заметим, что для $k > 2$ и $l > 1$ других решений уравнение не имеет. Ясно, 2^k делится на 8. Если $l = 2d$, то $3^{2d} + 1 = 9^d + 1$ имеет остаток 2 при

делении на 8. Если $l = 2d + 1$, то $3^{2d+1} + 1 = 3 \cdot 9^d + 1$ имеет остаток 4 при делении на 8. Пара (3, 4) дает еще решение 3, 4, 5, 6. (Mathematical Olympiad, Spain 1993).

8. Имеется куча из 1000 камней. Два игрока на каждом своем ходе могут взять от 1 до 5 камней. Кроме того, если игрок сказал: «Эгегей!», то он может взять 6 камней. За игру возглас «Эгегей!» может прозвучать не более 10 раз (например, 7 раз скажет первый игрок и 2 раза второй). Выигрывает тот, кто забирает последний камень. Определите, кто из игроков может выиграть независимо от ходов соперника.

Ответ: выигрывает второй игрок.

Во-первых, $1000 = 155 \cdot 6 + 10 \cdot 7$. Перед началом игры второй игрок мысленно создает 155 кучек камней по 6 и 10 кучек по 7 камней.

Рассмотрим обмен первыми ходами:

1). Если первый игрок берет 1, 2, 3, 4, 5 камней, то второй игрок берет 5, 4, 3, 2, 1 камень соответственно. После этого хода второй игрок мысленно создает 154 кучи камней по 6 и 10 кучек по 7 камней.

2) Если первый игрок берет 6 камней («Эгегей!»), то второй игрок берет 1 камень. После этого хода второй игрок мысленно создает 155 кучек камней по 6 и 9 кучек по 7 камней.

Таким образом, у второго игрока в его стратегии количество куч уменьшается на 1 в любом случае. При этом только «Эгегей!» уменьшает количество кучек по 7 камней на 1.

Второй игрок придерживается этой стратегии, пока не обнулится количество куч по 6 камней. Уточним это. Если первый игрок берет 6 камней («Эгегей!») 10 раз и после ответа второго игрока на десятый возглас (по правилу 2)) есть еще камни, то их количество кратно шести и, следуя правилу 1) второй игрок победит. Если же после хода второго игрока у него осталось несколько кучек по 7 камней, и нет кучек по 6 камней, то он меняет стратегию:

3) Если первый игрок берет 2, 3, 4, 5 камней, то второй игрок берет 5, 4, 3, 2 камень соответственно;

4) Если первый игрок берет 1 камень, то второй берет 6 камней («Эгегей!»);

5) Если первый игрок берет 6 камней («Эгегей!»), то второй игрок берет 1 камень.

Таким образом, последний камень берет второй игрок.

Первая лига, 10 – 11 класс

Математический бой №1

1. Найдите число x, являющееся корнем уравнения $\frac{x-a-b}{c}+\frac{x-b-c}{a}+\frac{x-c-a}{b}=3$, где a, b, c – положительные числа и $a + b + c = 2019$.

Ответ: $x = 2019$. Ясно, что данное уравнение является линейным с положительным коэффициентом при x. Поэтому это уравнение имеет ровно один корень. Легко заметить, что $x = a + b + c$ является корнем:

$$\frac{(a+b+c)-a-b}{c}+\frac{(a+b+c)-b-c}{a}+\frac{(a+b+c)-c-a}{b}=\frac{c}{c}+\frac{a}{a}+\frac{b}{b}=3.$$

2. Парабола $y = 5x^2 +ax + b$ ($a \neq b$) проходит через точки $A(a, b)$ и $B(b, a)$ найдите минимальное значение $5x^2 +ax + b$.

Ответ: – 1/5. Из условия прохождения параболы через точку $A(a, b)$ получаем соотношение $b = 5a^2 +a\cdot a + b$ или $a = 0$. Из условия прохождения параболы через точку $B(b, a)$ получаем соотношение $a = 5b^2 +a\cdot b + b$ или $b(5b + 1) = 0$. Из условия $a \neq b$ и равенства $a = 0$ получаем $b = – 1/5$. Таким образом, задача состоит в нахождении минимального значения функции $5x^2 – 1/5$. Ясно, что $5x^2 – 1/5 \geq – 1/5$ и равенство, если $x = 0$.

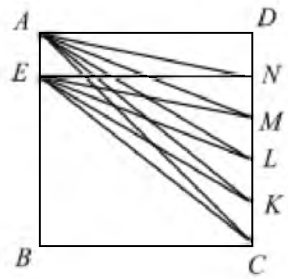
3. Пусть n – произвольное натуральное число. Для каждого n найдите, какая цифра стоит сразу после запятой в десятичной записи числа $\sqrt{n^2+n}$.

Ответ: 4. Легко показать, что для любых n выполняется неравенство $n+0{,}4\leq\sqrt{n^2+n}<n+0{,}5$.

4. Сумма 49 натуральных чисел равна 624. Докажите, что среди них найдутся три одинаковых числа.

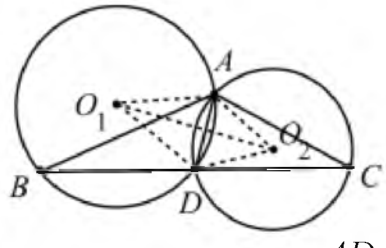
Предположим, что среди данных чисел нет трех одинаковых. Тогда имеем: $624 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{49} \geq 2\cdot(1 + 2 + \ldots + 24) + 25 = 625$. Противоречие.

5. На стороне AB квадрата $ABCD$ отметили точку E, на стороне CD отметили четыре точки K, L, M, N так, что выполняются равенства $AE = CK = KL = LM = MN = ND$. Найдите сумму углов: $\angle ACE+\angle AKE+\angle ALE+\angle AME+\angle ANE$.



Ответ: 45°. $ADNE$ – прямоугольник, AN его диагональ, поэтому $\angle ANE=\angle DAN$. Далее, поскольку отрезок AE равен и параллелен отрезкам NM, ML, LK, LC получаем равенства $\angle ACE+\angle AKE+\angle ALE+\angle AME+\angle ANE=$
$\angle CAK+\angle KAL+\angle LAM+\angle MAN+\angle NAD=\angle CAD=45^\circ$

6. Точка D лежит на стороне BC треугольника ABC. O_1 и O_2 – центры окружностей, описанных около треугольников ABD и ACD соответственно. Докажите, что треугольники ABC и AO_1O_2 подобные.



Вписанный в окружность с центром в точке O_1 угол ABD, равен половине центрального угла AO_1D. Точно также, угол ACD равен половине угла AO_2D. AD – общая хорда окружностей с центрами O_1 и O_2, отсюда следует отрезок O_1O_2 является серединным перпендикуляром к AD. Значит в равнобедренных треугольниках AO_1D и AO_2D отрезок O_1O_2 делит углы пополам и, получаем, ABC и AO_1O_2 подобные по трем углам.

7. Числа a_1, a_2, a_3, a_4 и a_5 образуют геометрическую прогрессию. При этом среди них есть как рациональные числа, так и иррациональные. Какое наибольшее количество членов этой прогрессии могут быть рациональными числами?

Ответ: 3. *Пример*: пусть $a_1 = 1$, $q = \sqrt{2}$, получим геометрическую прогрессию $1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4$. *Оценка*. Если среди них есть 4 рациональных числа, то найдутся два подряд идущих рациональных члена геометрической прогрессии. Это означает, что знаменатель прогрессии (отношение последующего члена к предыдущему) есть рациональное число. Но тогда при рациональном числе a_1 – все члены прогрессии есть рациональные числа, при иррациональном – все иррациональные.

8. Игра ведется на доске $n \times n$. В начале игры на каждой клетке квадрата 1×1 находится 99 камней. Два игрока A и B по очереди выбирают строку или столбец и удаляют по одному камню из каждого квадрата 1×1 в выбранной строке или столбце. Брать камни в строке или столбце можно, если есть хотя бы один камень на каждом квадрата 1×1 выбранной линии. Тот, кто не может сделать ход – проигрывает. Игрок A ходит первым. Определите все числа n, для которых игрок A имеет выигрышную стратегию.

Ответ: Игрок A выигрывает, если n нечетное число и проигрывает, если n четное число. Возьмем любую из главных диагоналей и заметим, на каждом ходе с одной из клеток снимается ровно один камень, а всего на такой диагонали $99n$ камней. Когда с диагонали уйдет последний камень, опустеет и доска. (Это игра-шутка, поскольку стратегия игры не важна).

Математический бой №2

1. Решите уравнение $x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{2018} = 0$.

Ответ: $x = 0$, $x = -1$. Ясно, $x = 0$ корень уравнения. Сократим на x. Теперь заметим, что положительных корней нет. Подставим в уравнение $-x$ вместо x.

Получим уравнение $1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2016} = x + x^3 + x^5 + \ldots + x^{2017}$. Ясно, $x = 1$ корень нового уравнения и, соответственно, $x = -1$ корень исходного уравнения. Осталось заметить, что если $0 < x < 1$, то левая часть $1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2016} = x + x^3 + x^5 + \ldots + x^{2017}$ больше правой, а если $x > 1$ наоборот. Других корней нет.

2. Сколько существует 2019-значных натуральных чисел, в которых каждая цифра, кроме крайних, равняется произведению двух соседних с ней цифр?

Ответ: 91 число. Рассмотрим первые пять цифр a, b, c, d, e числа $\overline{abcde\ldots z}$ $(a \neq 0)$, удовлетворяющего условию задачи.

Пусть среди них нет ни одного нуля. Тогда из $b = ac$, $c = bd$, $d = ce$ следует, что $bcd = ac^2bde$ и $1 = ace$. Следовательно, $a = c = e = 1$ и $b = d = 1$. Легко заметить, что и все последующие цифры числа – единицы.

Пусть теперь среди них есть хотя бы один ноль. Тогда, очевидно, все цифры числа, кроме первой и последней, должны быть нулями. В числах такого вида первая цифра может быть от 1 до 9, а последняя от 0 до 9, таких чисел $9 \cdot 10 = 90$

3. Квадратный трехчлен $p(x)$ имеет корни x_1 и x_2, при этом выполняется равенство $p(2x + 1) = 4x^2 - 30x + 12$. Найдите $x_1 + x_2$.

Ответ: 17. Сделаем подстановку $t = 2x + 1$, $x = \dfrac{t-1}{2}$. Находим $p(t) = 4\left(\dfrac{t-1}{2}\right)^2 - 30\left(\dfrac{t-1}{2}\right) + 12 = t^2 - 17t + 28$. По теореме Виета сумма корней трехчлена $p(x) = x^2 - 17x + 28$ равна 17.

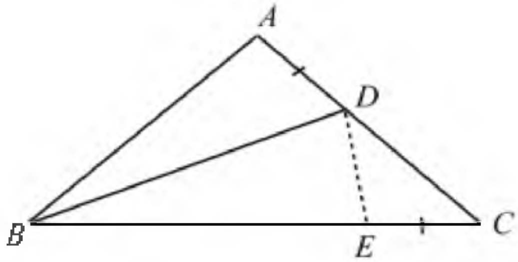
4. Пусть S – множество натуральных чисел содержит числа 1, 2, 3 и 4 и обладает свойством: если различные числа a, b, c и d принадлежат S, то и их сумма $a + b + c + d$ тоже принадлежит S. Докажите, что число 2018 принадлежит S.

Заметим сначала, что $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, $1 + 2 + 3 + 10 = 16$ это означает, что $10 \in S$, $16 \in S$. Далее, $1 + 2 + 4 + a = a + 7$ это означает, что если $a \in S$, то $a + 7 \in S$. Из равенства $2018 = 7 \cdot 286 + 16$ и доказанного выше следует, что $2018 \in S$.

5. В равнобедренном треугольнике ABC сторона BC является основанием, биссектриса угла B пересекает AC в точке D. Оказалось, что имеет место равенство $BD + DA = BC$. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ: $\angle A = 100°$, $\angle B = \angle C = 40°$.

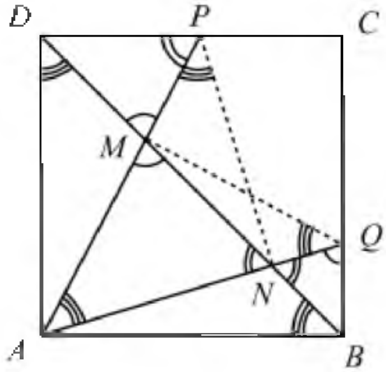
Обозначим $\angle B = \angle C = 2\beta$. Ясно, $AD < BC$. Отметим точку E на BC так, что $CE = AD$. Рассмотрим треугольники BAC и CED. Во-первых, углы B и C этих треугольников равны между собой. Заметим, что $CE/BA = AD/BA = CD/BC$ (последнее равенство следует из



свойства биссектрисы: делить противоположную сторону на части, пропорциональные прилегающим сторонам). Это означает, что рассмотренные треугольники подобны. Отсюда следует, что $\angle CDE = 2\beta$, $\angle DEB = 4\beta$. Рассмотрим треугольник BDE. Ясно, $BE = BC - CE = AD$ и $\angle BDE = 4\beta$. Получаем, что сумма углов треугольника BDE равна 9β, $\beta = 20°$.

6. В квадрате $ABCD$ на сторонах BC и CD выбраны точки Q и P так, что $\angle PAQ = 45^\circ$. Диагональ BD пересекает отрезки AP и AQ в точках M и N. Докажите, что четырехугольник $PMNQ$ вписанный.

Рассмотрим треугольники PDM и NAM. В этих треугольниках углы M равны, как вертикальные, углы D и A равны по 45°. Значит, $\angle AND = \angle APD$, а четырехугольник $ANPD$ вписанный. Отсюда следует равенство углов ADN и APN, кроме того это означает, что $\angle APN = 45^\circ = \angle MPN$. Рассматривая треугольники QNB и MAN точно также замечается, что $\angle MQN = 45^\circ$. Четырехугольник $PMNQ$ вписанный, поскольку углы MPN и MQN равны.



7. В выражении $*3^5 * 3^4 * 3^3 * 3^2 * 3 * 1$ вместо $*$ Дима и Саша ставят знаки арифметических действий «+» или «–» (один из двух). Может ли Дима, который ходит вторым, получить в конце выражение которое будет делиться на 7?

Ответ: Да, сможет. Ясно, что $\pm(3^3 + 1)$, $\pm(3^4 + 3)$, $\pm(3^5 + 3^2)$ делятся на 7. Отсюда стратегия Димы: разбить числа на пары $\{3^3, 1\}$, $\{3^4, 3\}$, $\{3^5, 3^2\}$ и ставить в паре тот же знак.

8. Двадцать различных натуральных чисел написали на десяти карточках, по одному на каждой стороне каждой карточки. Сумма двух чисел на каждой карточке является одинаковой для всех 10 карт. Карточки выложили на стол. Оказалось, что сумма десяти чисел, которые видны, совпадает с суммой чисел, которые не видны. Одну карточку убрали со стола. На столе видны девять чисел 2, 5, 17, 21, 24, 31, 35, 36 и 42. Карту, с какими числами на лицевой и обратной стороне удалили?

Ответ: 37 и 13. Обозначим x число на лицевой стороне, y – на обратной стороне у удаленной карты. Тогда из условия сумма чисел 2, 5, 17, 21, 24, 31, 35, 36, 42 и x – сумма десяти чисел, которые были видны, равна пятикратной сумме на десятой (удаленной) карте $5(x + y)$. Получаем соотношение $4x + 5y = 213$. Решим это уравнение в целых числах. Ясно, $x = \frac{213 - 5y}{4} = 54 - y - \frac{y-1}{4}$ и по соображениям делимости получаем $y = 4m + 1$, $x = 52 - 5m$. Поскольку x и y натуральные необходимо, чтобы $1 \le m \le 10$. Осталось выполнить условие: все двадцать чисел различные. Рассмотрим таблицу, в которой найдены возможные значения десятой карты для $1 \le m \le 10$.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	47	**42**	37	32	27	22	**17**	12	7	**2**
y	**5**	9	13	**17**	**21**	25	29	33	37	41

Для m = 1, 2, 4, 5, 7, 10 повторятся числа на лицевой стороне.

Рассмотрим $m = 6$, $x + y = 47$. С оборота у 5 будет **42**.

Рассмотрим $m = 8$, $x + y = 45$. С оборота у 21 будет **24**.

Рассмотрим $m = 9$, $x + y = 44$. С оборота у 42 будет **2**.

Рассмотрим $m = 3$, $x + y = 50$.

48	45	33	29	26	19	15	14	8	13
2	**5**	**17**	**21**	**24**	**31**	**35**	**36**	**42**	37

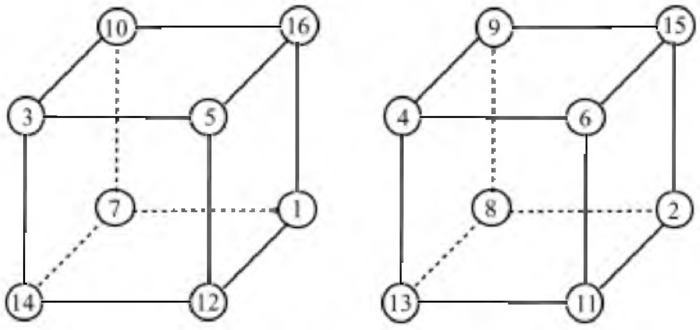
Получили все разные числа в ответ 37 и 13. Taiwan Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition 2000.

Математический бой №3

1. Числа a, b, c, d и e таковы, что выполнены неравенства: $a + b < c + d < e + a < b + c < d + e$. Найдите среди этих чисел наибольшее.

Ответ: наибольшее число e. Из условия следует, что $a + b < e + a$, значит, $b < e$. Из условия следует, что $c + d < d + e$, значит, $c < e$. Из $a + b < b + c$, получим $a < c$. Из $c + d < b + c$, получаем $d < b$. Поскольку $b < e$, получаем максимальность числа e.

2. Распределите натуральные числа от 1 до 16 в вершины двух кубов, по одному числу в каждую вершину так, чтобы числа в вершинах одной грани имели одну и ту же сумму.



(Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition)

3. Известно, что верно ровно одно из приведенных ниже утверждений:
(A) Все последующие утверждения верны;
(B) Никакое из последующих утверждений не верно;
(C) Верно хотя бы одно из последующих утверждений;
(D) Все предыдущие утверждения верны;
(E) Никакое из предыдущих утверждений не верно.

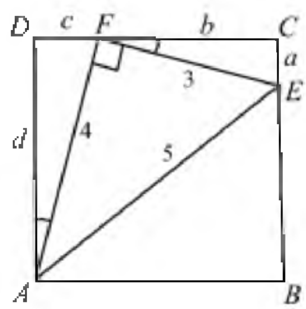
Определите это верное утверждение.

Ответ: (B). Если верно (A), то верно и (C), значит, (A) как единственно верное отпадает. Если верно (C), то (C) не может быть единственно верным утверждением. Если верно (D), то (C) тоже верно. Если верно (E), то опять же (C) верное. (Эстонская математическая олимпиада).

4. Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что каждое из уравнений $f(x)=x-1$ и $f(x)=2-2x$ имеет ровно по одному решению. Докажите, что трёхчлен $f(x)$ не имеет корней.

Пусть квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет вид ax^2+bx+c. Тогда уравнения имеют вид $ax^2+(b-1)x+(c+1)=0$ и $ax^2+(b+2)x+(c-2)=0$. Поскольку оба уравнения имеют по одному корню, их дискриминанты равны нулю. Таким образом, $(b-1)^2-4a(c+1)=0$ и $(b+2)^2-4a(c-2)=0$. Умножив первое уравнение на 2, сложив со вторым и поделив результат на 3, получим $b^2-4ac=-2$. Значит, трёхчлен $f(x)$ не имеет корней.

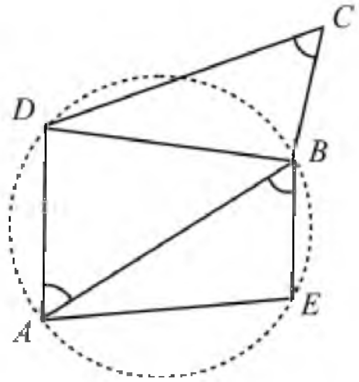
5. Дан квадрат $ABCD$ и треугольник AFE, у которого вершины E и F лежат на сторонах квадрата BC и CD соответственно. При этом угол AFE прямой, $AF = 4$, $FE = 3$. Найдите площадь квадрата $ABCD$.



Ответ: 256/17. Сумма углов AFD и EFC равна 90°, значит, $\angle FAD = 90° - \angle AFD = \angle EFC$ и треугольники AFD и FEC подобные. Обозначим $AD = d$, $DF = c$, $FC = b$, $CE = a$. Из замеченного подобия треугольников, получаем $a/3 = c/4$, $b/3 = d/4$. Далее, $c = 4/3 \cdot a$, $d = 4/3 \cdot b$, $c + b = d$, $4/3 \cdot a + b =$

$4/3 \cdot b$. Получаем, $b = 4a$, $c = 4/3 \cdot a$, $d = 16/3 \cdot a$, $EB = 13/3 \cdot a$, $EB = 13/16 \cdot AB$. Наконец, $AB^2 + BE^2 = 5^2$ и $AB^2 = \dfrac{16^2}{17}$.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$, $AB = CD$, $\angle BCD = 57°$, и $\angle ADB + \angle CBD = 180°$. Найдите величину $\angle BAD$.



Ответ: $57°$. Построим треугольник ABE: $\angle ABE = \angle DBC$, $BE = CB$. По построению треугольники DCB и ABE равны. Значит, $\angle CBD = \angle BEA$, $\angle ADB + \angle BEA = 180°$ и около четырехугольника $AEBD$ можно описать окружность. Хорды BD и AE равны, значит AD и BE параллельны, четырехугольник $AEBD$ – трапеция и $\angle BAD = \angle BCD = 57°$.

7. Квадрат разрезали на прямоугольники так, что ни одна из точек квадрата не является общей вершиной четырех прямоугольников. Затем пересчитали все точки квадрата, которые являются вершинами прямоугольников. Докажите, что в результате получили четное число.

Во-первых, 4 вершины исходного квадрата является вершиной ровно одного прямоугольника. Обозначим n количество остальных точек квадрата, которые являются вершинами прямоугольников. Теперь посчитаем количество всех прямых углов у всех прямоугольников. Поскольку ни одна из точек квадрата не является общей вершиной четырех прямоугольников, то получим 4 прямых угла в вершинах исходного квадрата и по два в n остальных точках. Всего $4 + 2n$. В каждом прямоугольнике 4 прямых угла, значит, $4 + 2n$ делится на 4 и n – четное.

8. Имеется классическая шахматная доска 8×8 с полями черного и белого цветов и шашка. Шашка начинает на белой клетке первой горизонтали и далее может делать ходы с белой клетки на соседнюю сверху белую клетку. Сколько можно построить разных маршрутов по белым полям для шашки от первой до восьмой горизонтали?

35		89		103		69	
	35		54		49		20
10		25		29		20	
	10		15		14		6
3		7		8		6	
	3		4		4		2
1		2		2		2	
	1		1		1		1

Ответ: 296 маршрутов. Подсчет числа маршрутов выполняется аналогично построению треугольника Паскаля. Попасть в белые клетки первой горизонтали можно одним способом, затем начинает работать правило сложения в комбинаторике. В результате количество маршрутов равно $35 + 89 + 103 + 69 = 296$. British Mathematical Olympiad 2008.

Вторая лига, 10 – 11 класс

Математический бой №1

1. Первую половину пути автомобиль проехал со средней скоростью 60 км/ч, а вторую – со средней скоростью 40 км/ч. Определить среднюю скорость автомобиля на всем пути.

Ответ: 48 км/ч.

2. Известно, что для чисел a и c выполняется неравенство $a\cdot c<0$. Рассмотрим неравенства: $a/c < 0$; $ac^2 < 0$; $a^2c < 0$; $ac^3 < 0$; $a^3c < 0$. Какое количество из них выполняется?

Ответ: 4. Будут выполнены $a/c < 0$; $ac^3 < 0$; $a^3c < 0$ и ровно одно из двух $ac^2 < 0$; $a^2c < 0$.

3. Пусть a минимальный корень уравнения $x^2 - 3|x| - 2 = 0$, найдите значение $-1/a$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{17}-3}{4}$. Во-первых, 0 не является корнем. Во-вторых, $-a$ тоже корень данного уравнения. Значит, $a < -a$ и $a < 0$. Будем искать максимальный положительный корень уравнения $x^2 - 3|x| - 2 = 0$. Он является корнем уравнения $x^2 - 3x - 2 = 0$ и равен $\dfrac{\sqrt{17}+3}{2}$. Ему соответствует минимальный корень $a=-\dfrac{\sqrt{17}+3}{2}$, наконец, $-\dfrac{1}{a}=\dfrac{2\cdot\left(\sqrt{17}-3\right)}{\left(\sqrt{17}+3\right)\cdot\left(\sqrt{17}-3\right)}=\dfrac{\sqrt{17}-3}{4}$.

4. На карточке в определенном порядке записаны числа (a,b). За один ход можно к любому из чисел добавлять другое или менять знак любого из чисел. Каким образом из карточки (a,b) можно получить карточку (b,a)?

Например, так:

$$(a,b)\to(a+b,b)\to(-a-b,b)\to(-a-b,-a)\to(-a-b,a)\to(-b,a)\to(b,a).$$

5. Сумма 49 натуральных чисел равна 624. Докажите, что среди них найдутся три одинаковых числа.

Предположим, что среди данных чисел нет трех одинаковых, составим минимально возможную сумму 49 натуральных чисел, среди которых нет трех одинаковых: $624 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{49} \geq 2\cdot(1 + 2 + \ldots + 24) + 25 = 625$. Противоречие.

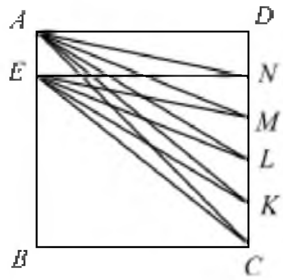
6. Девятизначное число состоит из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 в некотором порядке. Если в этом числе на любые две подряд идущие цифры посмотреть как на двузначное число, то окажется, что оно является произведением двух однозначных чисел. Найдите все такие девятизначные числа.

Ответ: 728163549. Цифра 9 может быть только последней, поскольку произведение двух однозначных чисел не больше 81. Более того, перед цифрой 9 может находиться только 4. Из доказанного выше, также следует, что за цифрой 8 может быть только 1. За цифрой 7 может быть только 2, поскольку это второе, после 81, по величине в таблице умножения и других вариантов просто нет. Кроме того, двузначное число 72 должно быть вначале искомого слова, поскольку в таблице умножения впереди 7 может быть только 2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Наконец отметим, что после цифры 6 может идти только 3. Итак, число начинается с 72, оканчивается на 49 и в числе должны быть двузначные числа 81 и 63, и где-то 5. Ясно, что сочетания 7263… и …6349 невозможны, значит, 63 между 81 и 5. Осталось рассмотреть два случая 728163549 и 725638149. Первое подходит, второе нет из-за 38.

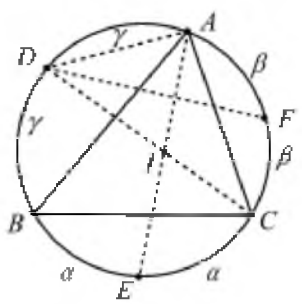
7. На стороне *AB* квадрата *ABCD* отметили точку *E*, на стороне *CD* отметили четыре точки *K*, *L*, *M*, *N* так, что выполняются равенства *AE* = *CK* = *KL* = *LM* = *MN* = *ND*. Найдите сумму углов: $\angle ACE + \angle AKE + \angle ALE + \angle AME + \angle ANE$.



Ответ: 45°. *ADNE* – прямоугольник, *AN* его диагональ, поэтому $\angle ANE = \angle DAN$. Далее, поскольку отрезок *AE* равен и параллелен отрезкам *NM*, *ML*, *LK*, *LC* получаем равенства $\angle ACE + \angle AKE + \angle ALE + \angle AME + \angle ANE =$

$\angle CAK + \angle KAL + \angle LAM + \angle MAN + \angle NAD = \angle CAD = 45^{\circ}$.

8. Треугольник *ABC* вписан в окружность ω. Точки *D*, *E*, *F* являются серединами дуг *AB*, *BC*, *CA* соответственно, а эти дуги не содержат внутри себя вершин треугольника. Докажите, что отрезки *DF* и *AE* перпендикулярны.



Первое решение. Во-первых, вписанные углы, опирающиеся на равные дуги – равны. Ясно, что *AE*, *BF* и *CD* биссектрисы соответствующих углов треугольника *ABC*, кроме того, *DF* биссектриса *ADC*, пусть *I* – точка пересечения биссектрис. Далее, треугольник *ADI* – равнобедренный: $\angle DIA = \angle A/2 + \angle C/2$, как внешний для *ACI*, $\angle DAI = \angle DAB + \angle BAE = \angle C/2 + \angle A/2$, биссектриса угла *D* перпендикулярна стороне *AI*.

Второе решение. Обозначим $AD = DB = \gamma$, $BE = EC = \alpha$, $CF = FA = \beta$. Ясно, $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2\pi$. Угол между хордами AE и DF равен полусумме $\frac{AD + EF}{2} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Математический бой №2

1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + xy + x = 10 \\ y^2 + xy + y = 20 \end{cases}$.

Ответ: (–2, –4) и $\left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right)$. Складываем первое и второе уравнение системы $x^2 + y^2 + 2xy + x + y = 30$ или $(x + y)^2 + (x + y) - 30 = 0$. Пусть $t = x + y$, уравнение $t^2 + t - 30 = 0$ имеет два корня $t_1 = 5$ и $t_2 = -6$. Вычитаем из первого уравнения второе, получим $x^2 - y^2 + x - y = -10$ или $(x - y)(x + y + 1) = -10$.

Для $t = 5$, решая систему $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -\frac{5}{3} \end{cases}$ получаем $\begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{10}{3} \end{cases}$.

Для $t = -6$, решая систему $\begin{cases} x + y = -6 \\ x - y = 2 \end{cases}$ получаем $\begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \end{cases}$.

2. Докажите неравенство $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \ge a + b$, где $a > 0$, $b > 0$.

Последовательно замечаем $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} - (a + b) = \frac{a^3 + b^3 - ab(a + b)}{ab} =$
$= \frac{(a + b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a + b)}{ab} = \frac{(a + b)(a - b)^2}{ab} \ge 0$, при $a > 0, b > 0$.

3. В лес пошли 11 девочек и n мальчиков. Вместе они собрали $n^2 + 9n - 2$ гриба, причём все собрали поровну грибов. Кого было больше: мальчиков или девочек?

Ответ: девочек было больше, чем мальчиков.

Пусть каждый собрал k грибов. Тогда $k(n + 11) = n^2 + 9n - 2$ и $k = \frac{n^2 + 9n - 2}{n + 11} = n - 2 + \frac{20}{n + 11}$. Так как k –целое число, то число 20 должно делится на $n + 11$. Поэтому $n = 9$.

4. Для нумерации страниц некоторой книги использовано 6969 цифры. Сколько страниц в этой книге?

Ответ: 2019 страниц. Для нумерации однозначных страниц необходимо 9 цифр, для двухзначных – 180, для трёхзначных – 2700, для четырёхзначных – 36000. По условию задачи использовано 6877 цифры, $9+180+2700=2889<6969<2889+36000$, следовательно, нумерация заканчивается четырёхзначным числом. Далее, было использовано $\frac{6969-2889}{4}=1020$ четырёхзначных чисел. Поскольку четырёхзначные числа начинаются с 1000, последним из них было 2019.

5. Сколько существует 2019-значных натуральных чисел, в которых каждая цифра, кроме крайних, равняется произведению двух соседних с ней цифр?

Ответ: 91 число. Рассмотрим первые пять цифр a, b, c, d, e числа $\overline{abcde\ldots z}$ $(a\neq 0)$, удовлетворяющего условию задачи.

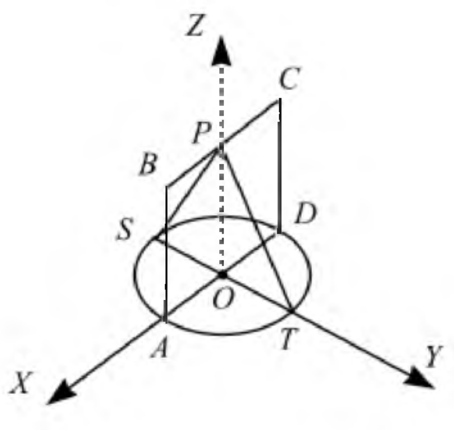
Пусть среди них нет ни одного нуля. Тогда из $b=ac$, $c=bd$, $d=ce$ следует, что $bcd=ac^2bde$ и $1=ace$. Следовательно, $a=c=e=1$ и $b=d=1$. Легко заметить, что и все последующие цифры числа – единицы.

Пусть теперь среди них есть хотя бы один ноль. Тогда, очевидно, все цифры числа, кроме первой и последней, должны быть нулями. В числах такого вида первая цифра может быть от 1 до 9, а последняя от 0 до 9, таких чисел $9\cdot 10=90$

6. В выражении $*3^5 * 3^4 * 3^3 * 3^2 * 3 * 1$ вместо $*$ Дима и Саша ставят знаки арифметических действий «+» или «–» (один из двух). Может ли Дима, который ходит вторым, получить в конце выражение которое будет делиться на 7?

Ответ: Да, сможет. Ясно, что $\pm(3^3 + 1)$, $\pm(3^4 + 3)$, $\pm(3^5 + 3^2)$ делятся на 7. Отсюда стратегия Димы: разбить числа на пары $\{3^3, 1\}$, $\{3^4, 3\}$, $\{3^5, 3^2\}$ и ставить в паре тот же знак.

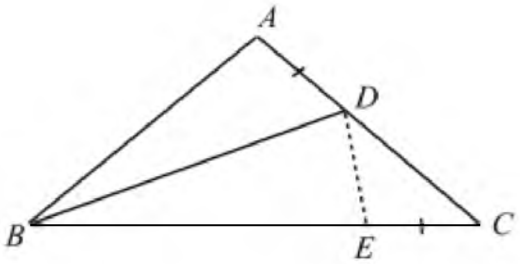
7. В трёхмерном пространстве придумайте такую фигуру, что её проекциями на координатные плоскости являются: на одну плоскость – квадрат, на другую – треугольник, а на третью – круг.



На рисунке представлена такая фигура. Можно считать, что центр круга точка O есть начало координат, радиусы OA и OD лежат на оси OX, радиусы OT и OS лежат на оси OY, квадрат $ABCD$ имеет общую точку P с осью OZ, SPT – треугольник. По построению имеем: проекцией на плоскость XOY будет круг, на плоскость XOZ – квадрат, на плоскость YOZ – треугольник.

8. В равнобедренном треугольнике ABC сторона BC является основанием, биссектриса угла B пересекает AC в точке D. Оказалось, что имеет место равенство $BD + DA = BC$. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ: $\angle A = 100°$, $\angle B = \angle C = 40°$.



Обозначим $\angle B = \angle C = 2\beta$. Ясно, $AD < BC$. Отметим точку E на BC так, что $CE = AD$. Рассмотрим треугольники BAC и CED. Во-первых, углы B и C этих треугольников равны между собой. Заметим, что $CE/BA = AD/BA = CD/BC$ (последнее равенство следует из свойства биссектрисы: делить противоположную сторону на части, пропорциональные прилегающим сторонам). Это означает, что рассмотренные треугольники подобны. Отсюда следует, что $\angle CDE = 2\beta$, $\angle DEB = 4\beta$. Рассмотрим треугольник BDE. Ясно, $BE = BC - CE = AD$ и $\angle BDE = 4\beta$. Получаем, что сумма углов треугольника BDE равна 9β, $\beta = 20°$.

Математический бой №3

1. Числа a, b, c, d и e таковы, что выполнены неравенства: $a + b < c + d < e + a < b + c < d + e$. Найдите среди этих чисел наибольшее.

Ответ: наибольшее число e. Из условия следует, что $a + b < e + a$, значит, $b < e$. Из условия следует, что $c + d < d + e$, значит, $c < e$. Из $a + b < b + c$, получим $a < c$. Из $c + d < b + c$, получаем $d < b$. Поскольку $b < e$, получаем максимальность числа e.

2. Путешественник вышел из дома в 3 часа дня, в дороге не останавливался и возвратился в 9 часов вечера по тому же маршруту. Известно, что по ровным участкам он шел со скоростью 4 км/ч, в гору – 3 км/ч, под гору – 6 км/ч. Найдите расстояние, которое прошел путешественник.

Ответ: 12 км. Пусть по дороге «туда» путешественник шёл a км по ровным участкам, b км в гору и c км под гору. Тогда он затратил на дорогу «туда» $\frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{6}$ часов. На дорогу обратно путешественник затратил $\frac{a}{4}+\frac{b}{6}+\frac{c}{3}$ часов. Отметим, что $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$. Складывая время движения, получим равенство $\frac{1}{2}(a+b+c)=6$.

3. Совпадает с задачей 2 первой лиги.

4. Если в произведении двух чисел первый множитель увеличить на 1, а второй уменьшить на 1, то произведение увеличится на 2017. Как изменится произведение исходных чисел, если, наоборот, первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1?

Ответ. Уменьшится на 2019.

Пусть изначально были числа x и y (с произведением xy). После того как первый множитель увеличили на 1, а второй уменьшили на 1, получилось $(x+1)(y-1) = xy + y - x - 1$. Произведение увеличилось на 2017, то есть $y - x - 1 = 2017$ или $y - x = 2018$. Если же первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1, получится $(x - 1)(y + 1) = xy - y + x - 1$. Заметим, что

$$xy - y + x - 1 = xy - (y - x) - 1 = xy - 2018 - 1 = xy - 2019.$$

То есть произведение уменьшилось на 2019.

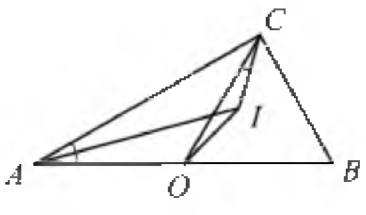
5. Учащиеся отправились на праздник. У каждого юноши было по 5 воздушных шаров, а у каждой девушки – по 4 шара. По дороге они стали шутить и прокалывать шары друг у друга. В итоге каждая девушка проколола по 1 шару, а каждый юноша – по 2 шара. Дима сосчитал все оставшиеся шары, и у него получилось 100. Докажите, что Дима ошибся.

Обозначим a – количество юношей, b – количество девушек. Тогда $5a+4b$ – первоначальное количество шариков, $2a+b$ – количество проколотых шариков, $3a+3b$ – количество оставшихся шариков. Поскольку количество шариков, с одной стороны есть число $3(a+b)$ кратное трем, с другой стороны, есть число 100 не кратное трем – Дима ошибся.

6. Совпадает с задачей 4 первой лиги.

7. Совпадает с задачей 5 первой лиги.

8. В прямоугольном треугольнике ABC угол A равен 30^0, O – середина гипотенузы AB, I – центр вписанной окружности. Найдите угол IOC.



Ответ: 15°. Поскольку O – центр окружности, описанной около треугольника ABC, угол OCA равен 30°. Поскольку I – точка пересечения биссектрис, угол ICO равен 15°. Это означает, что углы ICO и IAO равны, а около четырёхугольника $ICAO$ можно описать окружность. Следовательно, углы IOC и IAC равны.

***Второе решение*.** Треугольник BOC равносторонний, поэтому биссектриса BI угла CBO лежит на серединном перпендикуляре отрезка OC. Отсюда следует, что треугольник OIC – равнобедренный с основанием OC. Значит, $\angle IOC = \angle ICO = \angle ICA - \angle OCA = 15°$.

Турнирная таблица

XX турнир «Математические бои команд школ Алтайского края и городов Сибири» г. Барнаул, 8-10 января 2019 года

10-11 классы. Высшая лига

	Команда	**1**	**2**	**3**	**4**	**Очки**	**Место**
1	Бийский лицей 11		34:42	14:56	26:41	0	4
2	Лицей 124 10 - 11	42:34		7:54	19:30	2	3
3	Сборная Красноярска	56:14	54:7		52:34	6	1
4	42 гимназия 10 - 11	41:26	30:19	34:52		4	2

10-11 классы. Первая лига

	Команда	1	2	3	4	5	6	Очки	Место
1	Лицей 124 10		44:24	39:36		48:24		5	2
2	SM+ Лицей 129	24:44			24:72	20:34		0	5
3	Конусы Лицей 129	36:39			42:42		70:18	4	3
4	Квант Гимназия 22		72:24	42:42			49:27	5	1
5	Гимназия 123	24:48	34:20				60:19	4	4
6	Взлёт Лицей 121			18:70	27:49	19:60		0	6

10-11 классы. Вторая лига

	Команда	1	2	3	4	5	6	Очки	Место
1	Сороковая сборная			60:30	38:22	38:56		4	2
2	Сигма10 - 2				36:32	18:69	32:27	4	3
3	Сигма 10 - КПАФ	30:60				36:54	27:27	1	5
4	Взлёт - 2 лицей 121	22:38	32:36				30:38	0	6
5	Лицей 124	56:38	69:18	54:36				6	1
6	Плюс Тальменка 3		27:32	27:27	38:30			3	4

9 классы, высшая лига

	Команда	1	2	3	4	Очки	Место
1	123 Гимназия		12:65	45:2	24:35	2	3
2	42 - 9	65:12		57:0	44:26	6	1
3	Люди X Лицей 124	2:45	0:57		16:49	0	4
4	Горностай Новосибирск	35:24	26:44	49:16		4	2

9 классы, первая лига, подгруппа А

	Команда	1	2	3	4	Очки	Место
1	Лицей 129, 9		46:4	12:22	10:46	2	3
2	Гимназия 22	4:46		16:29	4:42	0	4
3	Сигма-3	22:12	29:16		26:31	4	2
4	Школа космонавтики, Железногорск	46:10	42:4	31:26		6	1

9 классы, первая лига, подгруппа Б

	Команда	1	2	3	4	Очки	Место
1	Сигма-4		0:36	27:12	12:12	3	2
2	Лицей №130 "РАЭПШ"	36:0		18:6	28:14	6	1
3	Гимназия 123	12:27	6:18		35:13	2	3
4	9@128	12:12	14:28	13:35		1	4

8 классы, высшая лига, подгруппа А

	Команда	1	2	3	4	Очки	Место
1	Метеоры Бийский лицей		18:75	42:40	3:48	1	3
2	Совенок Новосибирск	75:18		90:0	66:16	6	1
3	42-8	40:42	0:90		21:59	1	4
4	123-1	48:3	16:66	59:21		4	2

8 классы, высшая лига, подгруппа Б

	Команда	1	2	3	4	Очки	Место
1	Блендер Бийский лицей		25:17	24:18	0:66	4	2
2	123-2	17:25		58:10	9:51	2	3
3	42 - 8в	18:24	10:58		12:62	0	4
4	Лицей 124 А	66:0	51:9	62:12		6	1

8 классы, первая лига

	Команда	1	2	3	4	5	6	Очки	Место
1	Кадеты 8				34:37	17:-2	28:20	4	2
2	лицей 121				8:33	26:20	10:38	2	5
3	Гимназия № 40				18:50	40:14	26:30	2	4
4	Лицей 124 Г	37:34	33:8	50:18				6	1
5	8@128	-2:17	20:26	14:40				0	6
6	123 - 3	20:28	38:10	30:26				4	3

Сборные 7-8 классов, первая лига

	Команда	1	2	3	4	5	6	Очки	Место
1	Сигма - 1			61:0	26:40		12:18	2	5
2	Сигма - 2			28:21	16:38	42:25		4	3
3	Сборная	0:61	21:28				38:38	1	6
4	Гимназия 22	40:26	38:16			30:34		4	1
5	Заринск СОШ 15		25:42		34:30		42:8	4	2
6	7 - 8@ 128	18:12		38:38		8:42		3	4

7 классы, высшая лига

	Команда	1	2	3	4	Очки	Место
1	Лицей 124 7 - 1		20:44	8:46	12:36	0	4
2	Центр Грани 1	44:20		15:33	52:36	4	2
3	Горностай - 1 Новосибирск	46:8	33:15		54:24	6	1
4	Горностай - 2 Новосибирск	36:12	36:52	24:54		2	3

7 классы, первая лига

	Команда	1	2	3	4	Очки	Место
1	Лицей 124 7-2		40:8	62:20	72:12	6	1
2	Лицей 129	8:40		52:24	30:18	4	2
3	Фортуна Лицей 121	20:62	24:52		4:24	0	4
4	Центр Грани 2	12:72	18:30	24:4		2	3

7 классы, вторая лига

	Команда	1	2	3	4	Очки	Место
1	Википедия (БКШ)		40:24	12:32	36:42	2	3
2	Пифагор СОШ 81	24:40		24:36	8:42	0	4
3	Пионеры СОШ 53	32:12	36:24		4:24	4	2
4	Эрудиты Гимназия 22	42:36	42:8	24:4		6	1

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Агаханов, Н.Х. Математические олимпиады Московской области 1993-2002./ Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский. – М., 2003.
2. Агаханов, Н.Х. Всероссийские олимпиады школьников по математике./ Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский, Д.А. Терешин. – М.: МЦНМО, 2010.
3. Башмаков, М.И. Задачи по математике: алгебра и анализ./ М.И. Башмаков, Б.М. Беккер, В.М. Гольховой. – М., 1982.
4. Васильев, Н.Б. Задачи Всесоюзных математических олимпиад./ Н.Б. Васильев, А.А. Егоров. – М., 1988.
5. Генкин, С.А. Ленинградские математические кружки./ С.А. Генкин, И.В. Итенберг, Д.В. Фомин. – М., 1994.
6. Каннель-Белов, А.Я. Как решают нестандартные задачи./ А.Я. Каннель-Белов, А.К. Ковальджи. – М., 1997.
7. Лашкеева, В.Д. Математика для физико-математических классов./ В.Д. Лашкеева, А.Н. Саженков. – Барнаул, 1998.
8. Оскорбин, Д.Н. Математические олимпиады города Барнаула 1997-2006 годов./ Д.Н. Оскорбин, А.Н. Саженков. – Барнаул: Азбука, 2007.
9. Оскорбин, Д.Н. Комбинаторная геометрия. Практикум./ Д.Н. Оскорбин. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2018.
10. Рукшин, С.Е. Математические соревнования в Ленинграде – Санкт-Петербурге./ С.Е. Рукшин. – Ростов-на-Дону, 2000.
11. Саженков, А.Н. Математический анализ в задачах студенческих олимпиад. Часть 1. Практикум./ А.Н. Саженков, Т.В. Саженкова, Е.А. Плотникова. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2011.
12. Саженков, А.Н. Классические олимпиадные темы. Часть 1. Практикум./ А.Н. Саженков, Т.В. Саженкова. – Барнаул: Концепт, 2005.
13. Саженков, А.Н. Классические олимпиадные темы. Часть 2. Практикум./ А.Н. Саженков. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2006.
14. Саженков, А.Н. IV турнир математических боёв памяти Е.В. Напалковой./ А.Н. Саженков, И.М. Исаев, О.В. Никитенко, Д.Н. Оскорбин. – Барнаул, 2003.
15. Саженков, А.Н. Математическое творчество: классические олимпиадные темы и задачи высокого уровня сложности. Практикум. Часть 1./ А.Н. Саженков, Т.В. Саженкова, Е.А. Плотникова. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2013.
16. Саженков, А.Н. Теория и практика решения олимпиадных задач по математике. Учебное пособие. / А.Н. Саженков, Т.В. Саженкова. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2016.
17. Шень А. Игры и стратегии с точки зрения математики / 2-е изд., стереотипное /М.: МЦНМО, 2008.
18. Интернет-ресурс: http://www.problems.ru/

Учебное издание

Саженков Александр Николаевич
Оскорбин Дмитрий Николаевич
Саженкова Татьяна Владимировна

**КЛАССИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДНЫЕ ТЕМЫ
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ВЫСОКОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ**

Учебное пособие

Оригинал-макет в авторской редакции
Оформление обложки: Ю.В. Плетнева

ЛР 020261 от 14.01.1997
Подписано в печать 24.05.2019 г. Формат 60x84/8
Бумага офсетная. Усл. печ. л.8,83.
Тираж 100 экз. Заказ № 270

Издательство Алтайского государственного университета

Типография Алтайского государственного университета:
656049, Барнаул, ул. Димитрова, 66