Секция 1. АЛГЕБРА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

УДК 512.545

Решетка многообразий m-групп

Н.В. Баянова
АлтГУ, г. Барнаул

Напомним [1], что m-группой называется алгебраическая система G сигнатуры $\mathrm{m} = \left\langle \cdot, e, {}^{-1}, \vee, \wedge, * \right\rangle$, где $\left\langle G, \cdot, e, {}^{-1}, \vee, \wedge \right\rangle$ является решеточно упорядоченной группой (ℓ-группой) и одноместная операция $*$ – автоморфизм второго порядка группы $\left\langle G, \cdot, e, {}^{-1} \right\rangle$ и антиизоморфизм решетки $\left\langle G, \vee, \wedge \right\rangle$, т.е. для любых $x, y \in G$ выполнены соотношения:

$$(xy)_* = x_* y_*, \quad (x_*)_* = x, \quad (x \wedge y)_* = x_* \vee y_*, \quad (x \vee y)_* = x_* \wedge y_*.$$

Основные свойства реверсивных автоморфизмов второго порядка были изучены в [2].

Класс m-групп X называется многообразием m-групп, если существует множество Φ тождеств сигнатуры m такое, что X состоит из всех m-групп, на которых истинны все тождества из Φ. Множество всех многообразий m-групп M является частично упорядоченным множеством относительно теоретико-множественного включения. Более того, множество M является решеткой относительно естественно определенных операций пересечения и объединения многообразий.

Многообразие m-групп Y накрывает многообразие m-групп X в решетке M если $X \subset Y$ и для всякого многообразия m-групп Z, $X \subseteq Z \subseteq Y$, выполнено $Z = X$ или $Z = Y$.

Многообразие m-групп Y называется о-аппроксимируемым, если $Y \subseteq R_m$, где R_m −многообразие всех о-аппроксимируемых m-групп, определяемое тождеством $\left(x \wedge y^{-1} x^{-1} y\right) \vee e = e.$

Основные свойства решетки многообразий m-групп были изучены М. Жироде и Й. Рахунеком в [3]. В частности, указано, что решетка M дистрибутивна, дуально браурова, но не является брауровой. В отличие от решетки многообразий ℓ-групп, многообразие всех абелевых m-групп A_m не является наименьшим нетривиальным многообразием в решетке M В [3] было определено наименьшее собственное многообразие m-групп $I\ (x_* = x^{-1})$ и показано, что оно не является идемпотентом. Описание накрытий многообразия m-групп I дано в работе [4] А.В. Зенковым.

Исследование свойств решетки многообразий m-групп продолжили В.М. Копытов и Й. Рахунек [5], которые определили наибольший элемент в решетке многообразий m-групп.

Накрытия многообразия всех абелевых m-групп A_m изучались О.В. Исаевой [6]. Полное описание разрешимых о-аппроксимируемых накрытий многообразия A_m получено Н.В. Баяновой и А.В. Зенковым в [7].

Н.В. Баянова и А.В. Зенков [8], построили пример, показывающий, что в решетке M не всегда выполняется равенство $V(\vee_i U_i) = \vee_i (VU_i)$ для бесконечного множества индексов, что дало отрицательный ответ на вопрос, поставленный в [3].

А.В. Зенковым в [9] показано, что существует несчетное множество о-аппроксимируемых многообразий m-групп, каждое из которых имеет континуум о-аппроксимируемых накрытий. В этой же работе было найдено о-аппроксимируемое многообразие m-групп, которое не имеет накрытий в решетке о-аппроксимируемых многообразий m-групп. Вопрос о полном описании о-аппроксимируемых многообразий m-групп, не имеющих накрытий в подрешетке о-аппроксимируемых многообразий m-групп остается открытым.

Библиографический список

1. Giraudet M., Lucas F. Groupes a moitie ordonnes // Fudam. Math. – 1991. – № 2(139) – P. 75–89.

2. Баянова Н.В., Никонова О.В. Реверсивные автоморфизмы решеточно упорядоченных групп // Сиб. мат. ж. – 1995. – № 4(36) – С. 765–768.

3. Giraudet M., Rachunek J. Varieties of half lattice-ordered groups of monotonic permutations of chains // Czech. Math. J.– 1999. – № 124(49) – P. 743–766.

4. Зенков А.В. О минимальных многообразиях m-групп // Сиб. мат. ж. – 2009. – № 6(50) – С. 1328–1332.

5. Копытов В.М., Рахунек Й. Наибольшее собственное многообразие m-групп // Алгебра и логика. – 2003. – № 5(42) – С. 624–635.

6. Исаева О.В. Накрытия в решетке многообразий m-групп // Алгебра и теория моделей-4. Новосибирск, НГТУ. – 2003. – С. 35–43.

7. Баянова Н.В., Зенков А.В. Об о-аппроксимируемых накрытиях в решетке многообразий m-групп // Сиб. электр. мат. известия. – 2018. URL:http://semr.math.nsc.ru/v15/p1818-1822.pdf

8. Баянова Н.В., Зенков А.В. О бесконечной дистрибутивности в решетке многообразий m-групп // Алгебра и логика. – 2015. – № 1(54) – С. 3–15.

9. Зенков А.В. Накрытия в решетке многообразий m-групп // Сиб. мат. ж. – 2006. – № 1(47) – С. 73–80.

УДК 512.57

W-независимая аксиоматизируемость квазимногообразий групп

А.И. Будкин

АлтГУ, г. Барнаул

Квазимногообразие групп – это класс групп, определимый специальными формулами, называемыми квазитождествами. В этой работе изучается вопрос о существовании независимых и w-независимых базисов квазитождеств, интерес к которому возрос в последнее время.

Множество квазитождеств называется независимым, если оно не эквивалентно никакому своему собственному подмножеству.

Множество квазитождеств называется w-независимым, если его можно разбить на счетное множество подмножеств таких, что удаление любого из этих подмножеств приводит нас к множеству квазитождеств, не эквивалентному исходному.

Примером w-независимого множества квазитождеств является любое бесконечное независимое множество квазитождеств.

Существует тесная связь между независимыми, w-независимыми базисами квазитождеств и определенными свойствами решеток квазимногообразий групп.

Отметим, что из существования бесконечного независимого базиса у данного квазимногообразия следует наличие бесконечного множества покрытий этого квазимногообразия в решетке квазимногообразий групп.

Аналогично, из существования w-независимого базиса квазитождеств у данного квазимногообразия следует существование бесконечного множества квазимногообразий, пересечение любых двух из которых совпадает с рассматриваемым квазимногообразием.

Вопрос о независимой аксиоматизируемости квазимногообразий изучался в [1-11]. В [10] построен пример квазимногообразия с двумя