Таким образом возникает задача об изучении (псевдо)римановых многообразий с метрической связностью с векторным кручением, тензор кривизны которых равен нулю. Данная работа посвящена получению классификации таких многообразий в случае трехмерных метрических групп Ли, векторное кручение которых порождено некоторым инвариантным векторным полем.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-31-00033 мол_а).

Библиографический список

1. Cartan E. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie) // Ann. Ecole Norm. Sup. – 1925. – Vol.42. – P. 17–88.

2. Yano K. On semi-symmetric metric connection // Revue Roumame de Math. Pure et Appliquees. – 1970. – Vol. 15. – P. 1579–1586.

УДК 513.8

Некоторые критерии центральной симметричности выпуклых и звёздных плоских тел

И.В. Поликанова
АлтГПУ, г. Барнаул

Некоторые критерии центральной симметричности множеств суммированы Б. Грюнбаумом в [1]. Интерес к этой проблематике не угасает до сих пор [2–5]. Однако приведённые критерии сформулированы для выпуклых тел. Наш результат относится к более широкому классу звёздных множеств, с другой стороны ограничен размерностью 2. Метод доказательства позволяет получить и уже известные утверждения для плоских выпуклых тел менее затратным способом.

Рассматриваем множества на евклидовой плоскости. Под *телом* понимаем компактное множество с непустой внутренностью.

Тело K *звёздно относительно своей внутренней точки* O, если всякий исходящий из точки O луч пересекает тело K по отрезку. Из определения следует, что всякая проходящая через точку O прямая пересекается с K по отрезку, который будем называть *хордой*.

Множество K *центрально-симметрично относительно точки* O (центра), если образ его $Z_o(K)$ при центральной симметрии Z_o с центром O совпадает с K. Заметим, что всякое центрально-симметричное относительно центра O тело является звёздным относительно точки O.

k-м геометрическим моментом относительно точки О плоского тела К называется число $M_k(K) = \int_K \rho^k \, d\sigma$, где ρ = |OX| – расстояние между точками О и X, $d\sigma$ – элемент площади плоского множества. При $k = 0$ это площадь тела K (от точки О не зависит), при $k = 1$ – статический момент, при $k = 2$ – момент инерции (относительно О).

Теорема 1. *Пусть k – фиксированное натуральное число. Для того, чтобы плоское тело К, звёздное относительно своей внутренней точки О, было центрально-симметричным относительно центра О необходимо и достаточно, чтобы всякая проходящая через точку О хорда делила тело К на 2 подмножества с равными -ми геометрическими моментами относительно точки О.*

Поскольку выпуклое тело звёздно относительно любой своей точки, то имеем

Следствие 1. *Пусть k – фиксированное натуральное число. Плоское выпуклое тело К является центрально-симметричным относительно центра О тогда и только тогда, когда всякая проходящая через точку О хорда делит тело К на 2 подмножества с равными -ми геометрическими моментами относительно точки О.*

Известно, что точка, через которую проходят все хорды плоского выпуклого тела, делящие пополам его площадь, совпадает с точкой, обладающей тем свойством, что всякая проходящая через неё хорда делит площадь этого тела пополам [6]. Поэтому следствие 1 влечёт уже известный результат [6–8]:

Следствие 2. *Плоское выпуклое тело К центрально-симметрично тогда и только тогда, когда все хорды, делящие его площадь пополам, проходят через одну точку.*

На самом деле относительно площадей установлен более сильный результат [6–8]:

Теорема. *Плоское выпуклое тело К центрально-симметрично тогда и только тогда, когда существует единственная точка, через которую проходят не менее 3 хорды, делящие пополам его площадь.*

Необходимость условия в теореме 1 непосредственно усматривается из формулы k-ого геометрического момента относительно точки О плоского тела К в полярной системе координат с полюсом в точке О и полярными координатами (ρ, φ):

$$M_k(K) = \int_K \rho^{k+1} \, d\rho \, d\varphi = \frac{1}{k+2} \int_{-\pi}^{\pi} \rho^{k+2}(\varphi) \, d\varphi,$$

где $\rho = \rho(\varphi)$ уравнение границы тела K в полярных координатах.

Доказательство достаточности может быть осуществлено аналогично тому, как установлен результат для площадей в [7]. Однако методом от противного помимо теоремы 1 нам удалось доказать и другой факт:

Теорема 2. *Плоское выпуклое тело K центрально-симметрично тогда и только тогда, когда все хорды, делящие пополам периметр, проходят через одну точку.*

Б. Грюнбаум ввёл в [9] понятие непрерывного семейства кривых, для которого установил: если точка О, через которую проходят не менее трёх кривых семейства, единственна, то через неё проходят и все кривые данного семейства. Утверждая, что хорды, делящие пополам площадь, равно как и хорды, делящие пополам периметр выпуклого тела, являются непрерывными семействами кривых [9, с. 532], он заявил, что отсюда легко выводится, что точка О является центром симметрии в обоих случаях. Однако в указанных им ссылках [6–8] обоснования приводятся только для хорд, делящих пополам площадь, а для хорд, делящих периметр пополам, доказательств я не видела. Из его результатов и теоремы 2 имеем

Следствие 3. *Плоское выпуклое тело K центрально-симметрично тогда и только тогда, когда существует единственная точка, через которую проходят не менее 3 хорды, делящие периметр пополам.*

Как показали Циндлер и Ауербах [1, с.53], существуют примеры плоских выпуклых тел, не имеющих центра симметрии, у которых все делящие пополам площадь хорды делят пополам и периметры.

К данной теме примыкают исследования А. Канете и С. Сегура Гомес о минимизации функционала, определённого как максимум диаметров двух множеств, получающихся при разбиении плоского компактного центрально-симметричного множества хордой на 2 части. Ими показана множественность решений, однако минимизация всегда достигается на разбиениях хордами, проходящими через центр симметрии [10]. В [11] эта задача рассматривалась с дополнительным условием, чтобы хорды делили площадь компактного центрально-симметричного множества пополам.

Библиографический список

1. Грюнбаум Б. Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел. – М.: Наука, 1971. – 95 с.

2. Montejano L. Orthogonal projections of convex bodies and central symmetry // Bol. Soc. Mat. Mex. II –Ser. 28. – 1993 – P. 265–279.
3. Groemer H. On the determination of convex bodies by translates of their projections // Geom. Dedicate. – V. 66 – 1997. –P. 265–279.
4. Chakerian G.D., Klamkin M.S. A three point characterization of central symmety // Amer. Matsh. Monthly. – V. 111 – 2004. – P. 903–905.
5. Boltyanski V.G., Jeronimo Castro J. Centrally symmetric convex sets // Journal of Convex Analysis. – V.14 – 2007. – № 2. – P. 345–351.
6. Menon V.V. A theorem on partitions of mass-distribution // Pacific J. Math. – V.16 – 1966. – P. 133–137.
7. Zarankiewicz K. O prostych połowiących pola wypukłe //Wiadom. Mat. – V.2 –1959. – № 2. – S. 228–234.
8. Piegat E. O srednicach wypukłych płaskich // Rozsh. Polsk. Towarz. Math. – Ser. 2, 7. – 1963. – S. 51–56.
9. Grunbaum B. Continuous families of curves // Canadian J. of Math. – V. 18. – 1966. – № 3. – P. 529–537.
10. Canete A., Segure Gomis S. Bisections of centrally symmetric planar convex bodies minimizing the maximum relative diameter. // Math. MG. – ArHive: 1803.00321v1. – 2018.
11. Miori C., Peri C., Segura Gomis S. On fencing problems // J. Math. Anal. Appl. – V. 300. –2004. – № 2. – P. 464–476.

УДК 515.123

О сильной и слабой неатомарности внешних мер

***А.Н. Саженков*[1]*, Е.А. Плотникова*[2]**
[1]АлтГУ, г. Барнаул, [2]НГТУ, г. Новосибирск

В работе дается сравнительный анализ понятий неатомарности и слабой неатомарности для абстрактных внешних мер, определённых на булевом кольце и принимающих значения в произвольном множестве. Для скалярных функций множеств, то есть для функций, определённых на кольце множеств и принимающих значения в числовой прямой, неатомарность множества A означает, что его можно представить в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся множеств A_1, A_2, …, A_n таких, что для любого номера k и любого подмножества $B \subset A_k$ из кольца модуль значения функции на этом множестве будет меньше заранее заданного положительного числа ε. Для слабой неатомарности достаточно выполнения условия быть меньше ε значениям функции на самих множествах A_1, A_2, …, A_n.