Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Алтайский государственный университет

Глушкова А. А., Папин А. А.

ФИЛЬТРАЦИЯ ДВУХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЕ

Учебное пособие

Барнаул, 2020

Об издании – 1, 2

сведения об издании

УДК 517.95:616-006.6
ББК 22.161.627я73+55.6я73
Г 555

Авторы:

Глушкова Анна Алексеевна, Папин Александр Алексеевич

Рецензент:

д-р физ.-мат. наук, проф. ***Гончарова О. Н.***

Г 555 Глушкова, А. А. Фильтрация двух несмешивающихся жидкостей в пороупругой среде : учебное пособие / Глушкова А. А., Папин А. А. ; АлтГУ. – Барнаул : АлтГУ, 2020. – 1 DVD-R (0,5 Мб). – Систем. требования: Intel Pentium 1,6 GHz и более ; 512 Мб (RAM) ; Microsoft Windows 7 и выше ; Adobe Reader. – Загл. с титул. экрана. – Текст : электронный.

Учебное электронное издание

В учебном пособии рассмотрена задача об устойчивости стационарного решения для нелинейной системы уравнений. Также построено точное решение задачи о фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в деформируемой пористой среде. Учебное пособие предназначено для студентов, магистрантов и аспирантов математических факультетов.

производственно-технические сведения

Публикуется в авторской редакции

Верстка: Котова О. В.

Дата подписания к использованию: 27.07.2020 г.

Объем издания: 0, 5 Мб

Комплектация издания: 1 электрон. опт. диск (DVD-R)

Тираж 15 дисков

ФГБОУ ВО «Алтайский государственный университет»
656049, Барнаул, пр. Ленина, 61

Содержание

Введение

Актуальность теоретического исследования моделей механики многофазных сред основывается на их широком применении к решению важных практических задач. К числу многофазных моделей, интересных как с математической точки зрения, так и с точки зрения приложений, относится модель, описывающая движение смеси, состоящей из двух вязких жидкостей[1]. Рассматривается математическая модель совместного движения двух несмешивающихся жидкостей в пороупругой среде. Данная модель является обобщением классической модели Маскета-Леверетта, в которой пористость считается заданной функцией пространственной координаты. Учет сжимаемости пористой среды является принципиальным моментом. В основе предлагаемой модели лежат уравнения сохранения массы жидкостей и пористого скелета, закон Дарси для жидкостей, учитывающий движение пористого скелета, формула Лапласа для капиллярного давления, реологическое уравнение для пористости и условие равновесия "системы в целом"[3]. Всякая математическая модель физического явления дает лишь приближенное описание и ее решения требует проверки, т.е. сравнения с реальными данными. В то же время в природе реализуются, в основном, процессы, устойчивые к наличию малых случайных возмущений. В связи с этим всякое решение, получаемое с помощью математической модели, требует анализа на устойчивость. В работе рассмотрена задача об устойчивости решений системы уравнений одномерного движения двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пороупругой среде[2].

Первая глава носит вспомогательный характер. В пунктах 1.1 и 1.2 дается постановка одномерной задачи и приводится преобразование системы уравнений, записанной в переменных Эйлера.

Во 2 главе рассмотрена задача об устойчивости стационарного решения. В пункте 2.1 было найдено стационарное решение для системы уравнений одномерного движения двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пороупругой среде. В пункте 2.2 полученное стационарное решение было исследовано на устойчивость. В пунктах 2.3 и 2.4 было так же получено и исследовано стационарное решение на устойчивость в случае отсутствия силы тяжести и капиллярного скачка.

В 3 главе была рассмотрена задача о поршневом вытеснении нефти водой в упругой пористой среде. В пункте 3.1 описывается переход к переменным Лагранжа. В пункте 3.2 было построено точное решение задачи поршневого вытеснения жидкостей.

1. Постановка задачи

1.1 Вспомогательные сведения

Следующие сведения изложены в работе [3]. Рассматривается движение двухфазной несжимаемой жидкости в неоднородном анизотропном грунте с пористостью ϕ (доля объема среды, приходящаяся на пустоты).

$$\frac{\partial \phi \rho_i^0 s_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i^0 \phi s_i \vec{u}_i) = 0, \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

где $\vec{u}_i$, s_i – скорость и насыщенность фаз (доля пор, занятых i–й фазой). Вместо уравнений сохранения импульса в теории двухфазной фильтрации используется обобщенный закон Дарси:

$$s_i \phi (\vec{u}_i - \vec{u}_3) = -K_0 \frac{\overline{k_{0i}}}{\mu_i} (\nabla p_i + \rho_i^0 \vec{g}), \quad i = 1, 2, \tag{2}$$

где $\vec{u}_3$ – скорость твердого скелета, K_0 – тензор фильтрации (функция пористости), $\overline{k_{0i}}$ – относительные фазовые проницаемости, μ_i – коэффициенты динамической вязкости, p_i – давления фаз, $\vec{g}$ – вектор ускорения силы тяжести. При этом $\overline{k_{0i}}$ должны зависеть от насыщенности s_i, поскольку часть порового пространства занята другой жидкостью.

По определению, насыщенности s_i меняются в пределах $0 < s_i^0 \leq s_i \leq 1 - s_j^0 < 1, \quad i \neq j$, $s_1 + s_2 = 1$, и при достижении значений $s_i = s_i^0$ движение i -й компоненты прекращается, что обеспечивается выполнением условий $\overline{k_{0i}}(s_i^0) = 0$, $i = 1, 2$.

Учет капиллярных сил означает, что фазовые давления p_i различаются на величину капиллярного скачка:

$$p_2 - p_1 = p_c(x, s), \quad s = \frac{s_1 - s_1^0}{1 - s_1^0 - s_2^0}, \quad 0 \leq s \leq 1. \tag{3}$$

Капиллярное давление p_c определяется кривизной границы раздела двух несмешивающихся жидкостей, насыщенностью смачивающей жидкости, характеристиками пористой среды и жидкостей и выражается формулой Лапласа:

$$p_c(x, s) = \overline{p_c}(x) j(s), \tag{4}$$

где $\overline{p_c}(x)$ – заданная функция точки $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $j(s)$ – функция Леверетта ($\frac{dj(s)}{ds} \leq 0$, $j(0) = \infty$, $j(1) = 0$).

Система уравнений (1) – (4) относительно характеристик $\vec{u}_i$, p_i и $s = (s_1 - s_1^0)/(1 - s_1^0 - s_2^0)$ несмешивающихся жидкостей, движущихся в недеформируемой пористой среде, в изотермическом случае (температура в потоке постоянная) замыкается либо предположением о несжимаемости жидкостей, т.е. $\rho_i^0 = const$, либо условием $\rho_i^0 = \rho_i^0(p_i)$.

Полученную математическую модель в случае неподвижной пористой среды ($\vec{u}_3 = 0$) называют моделью Маскета-Леверетта.

Принципиальным моментом является учет сжимаемости пористой среды. Дополним систему (1) – (4) уравнением сохранения массы твердого скелета, реологическим уравнением для пористости и условием равновесия "системы в целом":

$$\frac{\partial(1-\phi)\rho_3^0}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_3^0(1-\phi)\vec{u}_3) = 0, \tag{5}$$

$$\nabla \cdot \vec{u}_3 = -\frac{1}{\xi(\phi)}p_e - \beta_t(\phi)(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{u}_3 \cdot \nabla p_e), \tag{6}$$

$$\nabla p_{tot} = \rho_{tot}\vec{g}, \tag{7}$$

где ρ_3^0 – истинная плотность твердой фазы, $p_e = p_{tot} - p_f$ – эффективное давление, $p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi)p_s$ – общее давление, $p_f = s_1 p_1 + s_2 p_2$, p_s – соответственно давления жидкой и твердой фаз, $\rho_{tot} = (1-\phi)\rho_3^0 + \phi(s_1\rho_1^0 + s_2\rho_2^0)$ – общая плотность; $\xi(\phi)$ и $\beta_t(\phi)$ – коэффициенты объемной вязкости и объемной сжимаемости горной породы есть заданные функции (модельные зависимости: $\frac{1}{\xi(\phi)} = \phi^m/\nu, \beta_t(\phi) = \phi^b\beta_\phi$, где $b = 1/2$, $m \in [0,2]$, $n = 3$, μ, ν, β_ϕ – положительные параметры пороупругой среды). Система (1) – (7) записана в эйлеровых координатах $\vec{x} \in R^3$, $t \in [0,T]$. Истинные плотности ρ_i^0 принимаются постоянными. Поскольку $s_2 = 1 - s_1$, то неизвестными являются 14 скалярных величин: s_1, ϕ, p_1, p_2, p_s, $3\vec{u_1}$, $3\vec{u_2}$, $3\vec{u_3}$. Для их определения служат также 14 скалярных уравнений: два уравнения неразрывности (1), шесть уравнений закона Дарси (2), уравнение для капиллярного скачка (3), уравнение неразрывности твердой фазы (5), реологическое соотношение (6), три уравнения равновесия (7).

1.2 Преобразование уравнений

Преобразуем систему (1) – (7). Сложив уравнения (1) и (5), получим равенство

$$\nabla\cdot(\phi(s_1\vec{u}_1+s_2\vec{u}_2)+(1-\phi)\vec{u}_3)=0,$$

которое приводится к виду

$$\nabla\cdot(\phi s_1(\vec{u}_1-\vec{u}_3)+\phi s_2(\vec{u}_2-\vec{u}_3)+\vec{u}_3)=0.$$

Положим

$$\vec{v}=\phi s_1(\vec{u}_1-\vec{u}_3)+\phi s_2(\vec{u}_2-\vec{u}_3),\quad k_{0i}=\frac{\overline{k_{0i}}}{\mu_i}.$$

Используя (2) и (3), получим следующее представление для $\vec{v}$

$$-\vec{v}=K_0(\phi)(k_{01}(\bigtriangledown p_1+\rho_1^0\vec{g})+k_{02}(\bigtriangledown(p_1+p_c)+\rho_2^0\vec{g}))=K_0(\phi)k(s)\bigtriangledown p+\vec{f},$$

где "приведенное"давление p определяется равенством

$$p=p_1-\int\limits_s^1\frac{k_{02}(\xi)}{k(\xi)}\frac{\partial p_c}{\partial\xi}d\xi.$$

Здесь так же введены обозначения:

$$k(s)=k_{01}+k_{02},$$

$$\vec{f}=K_0(k_{02}\bigtriangledown_x p_c+k\int\limits_s^1\frac{k_{02}(\xi)}{k(\xi)}\bigtriangledown_x\frac{\partial p_c(\xi,x)}{\partial\xi}d\xi+(k_{01}\rho_1^0+k_{02}\rho_2^0)\vec{g}),$$

а символ $\bigtriangledown_x$ применяется только по переменной $\vec{x}$, входящей явно, например

$$\bigtriangledown_x p_c(s,x)=\left(\frac{\partial p_c(s,x)}{\partial x_1},\frac{\partial p_c(s,x)}{\partial x_2},\frac{\partial p_c(s,x)}{\partial x_3}\right).$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\nabla\cdot\vec{u}_3=-\nabla\cdot\vec{v}=\nabla\cdot(K_0(\phi)k(s)\bigtriangledown p+\vec{f}).\tag{8}$$

С учетом введенного давления p для $\vec{v}_1\equiv s_1\phi\vec{u}_1$ имеем

$$\vec{v}_1=s_1\phi(\vec{u}_1-\vec{u}_3)+s_1\phi\vec{u}_3=-K_0a\bigtriangledown s-K_0k_{01}\bigtriangledown p-\vec{f}_0+s_1\phi\vec{u}_3,$$

где

$$a = -\frac{k_{01}k_{02}}{k}\frac{\partial p_c}{\partial s}, \quad \frac{\partial p_c}{\partial s} \le 0,$$

$$\vec{f_0} = K_0 k_{01}(\int\limits_s^1 \frac{k_{02}(\xi)}{k(\xi)} \bigtriangledown_x \frac{\partial p_c(\xi, x)}{\partial \xi} d\xi + \rho_1^0 \vec{g}).$$

Тем самым, уравнение неразрывности для первой фазы можно представить в виде

$$\frac{\partial \phi s_1}{\partial t} - \nabla \cdot (K_0 a \bigtriangledown s + K_0 k_{01} \bigtriangledown p + \vec{f_0}) + \nabla \cdot (\phi s_1 \vec{u}_3) = 0. \tag{9}$$

Система (8), (9) служит для определения s, p (при заданных ϕ, $div\vec{u}_3$). Давления p_e, p_{tot}, p_f и p связаны равенствами:

$$p_f \equiv s_1 p_1 + s_2 p_2 = p + G_c + s_2 p_e,$$

$$G_c = \int\limits_s^1 \frac{k_{02}(\xi)}{k(\xi)} \frac{\partial p_c}{\partial \xi} d\xi, \tag{10}$$

$$p_e \equiv p_{tot} - p_f = p_{tot} - p - (G_c + s_2 p_c), \tag{11}$$

$$p_{tot} \equiv \phi p_f + (1-\phi) p_s = \phi(p + G_c + s_2 p_c) + (1-\phi) p_s, \tag{12}$$

С учетом p_{tot} для p_e получим

$$p_e = (1-\phi)(p_s - p - G_c - s_2 p_c). \tag{13}$$

Формулы (10) – (13) дают представление p_e, p_{tot}, p_f через p. Обратная связь:

$$p = p_{tot} - p_e - (G_c + s_2 p_c), \tag{14}$$

или

$$-p = \frac{1}{1-\phi} p_e - p_s + (G_c + s_2 p_c). \tag{15}$$

В силу (7) и (14) имеем

$$\nabla p = \rho_{tot} \vec{g} - \nabla p_e - \nabla (G_c + s_2 p_c).$$

Тогда для $\vec{v}$ и $\vec{v}_1$ получим

$$-\vec{v} = K_0(\phi)k(s)(\rho_{tot}\vec{g} - \bigtriangledown p_e - \nabla(G_c + s_2 p_c)) + \vec{f},$$

$$\vec{v}_1 = -K_0 a \bigtriangledown s - \vec{f}_0 + s_1\phi\vec{u}_3 - K_0 k_{01} \bigtriangledown (\rho_{tot}\vec{g} - \nabla p_e - \nabla(G_c + s_2 p_c)).$$

Наконец, p_{tot} через p_e выражается следующим образом

$$p_{tot} = p_c - \frac{\phi}{1-\phi} p_e. \tag{16}$$

Опишем схему решения системы (1) – (7). Уравнение (5) представим в виде

$$\frac{\partial \ln(1-\phi)}{\partial t} + \vec{u}_3 \cdot \nabla \ln(1-\phi) = -\nabla \cdot \vec{u}_3,\ \phi|_{t=0} = \phi^0(\vec{x})$$

и будем рассматривать относительно $(1-\phi)$ при заданном поле скоростей $\vec{u}_3$. Характеристики этого уравнения определяются задачей Коши

$$\frac{\partial \vec{y}(\tau, t, \vec{x})}{\partial \tau} = \vec{u}_3(\vec{y}(\tau, t, \vec{x}), \tau), \quad \vec{y}|_{\tau=t} = \vec{x}.$$

Если $\vec{u}_3$ – достаточно гладкая функция (например, $\vec{u}_3(\vec{x}, t) \in W_q^{2,1}(Q_T)$, $q > n$, $\phi^0 \in [m_0, M_0]$, $m_0 > 0$, $M_0 < 1$, $\nabla\phi^0(\vec{x}) \in L_q(\Omega)$), то справедливо следующее представление:

$$(1 - \phi(\vec{x}, t)) = (1 - \phi^0(\vec{y}(0, t, \vec{x})))\cdot$$

$$\exp(\int_0^t \nabla_y \cdot \vec{u}_3(\vec{y}(\tau, t, \vec{x}), \tau) d\tau).$$

Подставляя найденное ϕ в уравнение (6), найдем эффективное давление как функцию $\vec{u}_3$.

Систему (8), (9) рассмотрим относительно насыщенности s и приведенного давления p при заданных значениях $\vec{u}_3$.

Учитывая связь p и p_e из (15) получим, что p_s определяется через p, p_e, s, т.е. через $\vec{u}_3$. Следовательно p_{tot}, ρ_{tot} также определяется через $\vec{u}_3$, т.е. уравнения системы (7) с учетом (16) или (12) служат для определения $\vec{u}_3$.

2. Задача об устойчивости стационарного решения

2.1 Стационарное решение системы уравнений

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial \rho_i^0 \phi s_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i^0 \phi s_i u_i) = 0, \tag{17}$$

$$s_i \phi (u_i - u_3) = -K_0 \frac{\overline{k_{0i}}}{\mu_i}(\frac{\partial p_i}{\partial x} - \rho_i^0 g), \quad i = 1, 2, \tag{18}$$

$$\frac{\partial (1-\phi)\rho_3^0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_3^0 (1-\phi) u_3) = 0, \tag{19}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x} = -a_1(\phi) p_e - a_2(\phi)(\frac{\partial p_e}{\partial t} + u_3 \frac{\partial p_e}{\partial x}), \tag{20}$$

$$\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = -\rho_{tot} g. \tag{21}$$

Система (2.1)-(2.5) близка по структуре к системе уравнений двухфазной фильтрации в упругой пористой среде [4], но отличается уравнениями движения твердого скелета. При известной пористости уравнения движения третьей фазы игнорируются и система (2.1)-(2.5) совпадает с классической системой Маскета-Леверетта [5, 6] и ее аналогами [7, 8]. Однофазные задачи для системы (2.1)-(2.3) ($s_1 = 1, s_2 = 0$) рассмотрены в [9]. В [10, 11, 12] для (2.1)-(2.3) рассмотрена задача поршневого вытеснения Н.Н.Веригина в случае отсутствия капиллярного скачка.

Получим аналитическое решение системы (2.1)-(2.5). Будем использовать следующие гипотезы:

(i) жидкости и твердый скелет несжимаемы, т.е., $\rho_i^0 = const, i = 1, 2, 3$;

(ii) ускорения силы тяжести и капиллярный скачок не равны нулю: $g \neq 0, p_c \neq 0$. Положим $u_i = 0$ из этого следует, что уравнения (2.1) и (2.3) выполняется автоматически при ($i = 1, 2, 3$). Из (2.2) следует, $p_i = A_i x + B_i$, где $A_i = \rho_i^0 g$. Из того, что $p_2 = p_1 + p_c$ получим $p_2 - p_1 = p_c(s_1^0, x)$. Положим $s_i = s_i^0 = const, \phi = \phi^0 = const$.Тогда из (2.4) следует, что $p_e = 0$. Из (2.5) уравнения получим $p_{tot} = Cx + D$, где $C = -\rho_{tot} g$. Следовательно, $\rho_{tot} = \phi p_f + (1-\phi) p_s = \phi(s_1 p_1 + s_2 p_2) + (1-\phi) p_s$. Так как из (2.4) уравнения $p_e = 0$, то $p_{tot} = p_f$. Тогда $p_s = p_{tot} = p_f = Cx + D$. Таким образом, стационарное решение системы (2.1)-(2.5) имеет вид

$$s_i = s_i^0, \phi = \phi^0, u_i = 0 (i = 1, 2, 3), p_s = p_{tot} = p_f = Cx + D, p_i = A_i x + B_i.$$

2.2 Возмущенное решение

Решение системы (2.1)-(2.5) ищется в окрестности стационарного решения в виде

$$s_i = s_i^0 + \overline{s_i}, \phi = \phi^0 + \overline{\phi}, u_i = \overline{u_i}, p_i = A_i x + B_i + \overline{p_i},$$

причем $s_1^0 + s_2^0 = 1, \overline{s_1} + \overline{s_2} = 0$. $\overline{u_i}, \overline{s_i}, \overline{p_i}, \overline{\phi}$ малы и имеют непрерывные производные. Функциональные параметры $K_0(\phi), k_{0i}(s_i), a_1(\phi), a_2(\phi)$ представимы в виде

$$K_0(\phi) = K_0(\phi^0) + K_0'(\phi^0)\overline{\phi},$$

$$\overline{k_{0i}}(s_i) = \overline{k_{oi}}(s_i^0) + \overline{k_{oi}'}(s_i^0)\overline{s_i},$$

$$a_1(\phi) = a_1(\phi^0) + a_1'(\phi^0)\overline{\phi},$$

$$a_2(\phi) = a_2(\phi^0) + a_2'(\phi^0)\overline{\phi}.$$

Подставляя возмущенное решение в исходную систему уравнений и отбросив все нелинейные члены, получим

$$s_1^0 \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial t} + \phi^0 \frac{\partial \overline{s_1}}{\partial t} + \phi^0 s_1^0 \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x} = 0, \tag{22}$$

$$s_2^0 \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial t} + \phi^0 \frac{\partial \overline{s_2}}{\partial t} + \phi^0 s_2^0 \frac{\partial \overline{u_2}}{\partial x} = 0, \tag{23}$$

$$\frac{\partial (1 - \overline{\phi})}{\partial t} + (1 - \phi^0) \frac{\partial \overline{u_3}}{\partial x} = 0, \tag{24}$$

$$\phi^0 s_1^0 (\overline{u_1} - \overline{u_3}) = -\frac{K_0(\phi^0)\overline{k_{01}}(s_1^0)}{\mu_1} \frac{\partial p_1}{\partial x} + (\frac{K_0(\phi^0)\overline{k_{01}'}\overline{s_1}}{\mu_1} + \frac{K_0'(\phi^0)\overline{k_{01}}(s_1^0)\overline{\phi}}{\mu_1})\rho_1^0 g, \tag{25}$$

$$\phi^0 s_2^0(\overline{u_2}-\overline{u_3}) = -\frac{K_0(\phi^0)\overline{k_{02}}(s_2^0)}{\mu_2}\frac{\partial p_2}{\partial x} + (\frac{K_0(\phi^0)\overline{k'_{02}}\overline{s_2}}{\mu_2} + \frac{K'_0(\phi^0)\overline{k_{02}}(s_2^0)\overline{\phi}}{\mu_2})\rho_2^0 g, \tag{26}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x} = -(a_1(\phi^0) + a'_1(\phi^0)\overline{\phi})p_e - a_2(\phi^0)\frac{\partial p_e}{\partial t}, \tag{27}$$

$$\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = -\rho_{tot} g. \tag{28}$$

Складывая уравнения (2.6)-(2.8), получим

$$\frac{\partial}{\partial x}((1-\phi^0)\overline{u_3} + \phi^0(s_1^0\overline{u_1} + s_2^0\overline{u_2})) = 0,$$

откуда $\overline{u_3} = \frac{c(t)}{1-\phi^0} - \frac{\phi^0}{1-\phi^0}(s_1^0\overline{u_1} + s_2^0\overline{u_2})$. Подставим полученное представление для $\overline{u_3}$ в уравнения (2.9) и (2.10) и получим

$$\phi^0 s_1^0(\overline{u_1} - (\frac{c(t)}{1-\phi^0} - \frac{\phi^0}{1-\phi^0}(s_1^0\overline{u_1} + s_2^0\overline{u_2}))) = \check{A}_1\frac{\partial p_1}{\partial x} + \check{B}_1\overline{s_1} + \check{C}_1\overline{\phi},$$

$$\phi^0 s_2^0(\overline{u_2} - (\frac{c(t)}{1-\phi^0} - \frac{\phi^0}{1-\phi^0}(s_2^0\overline{u_1} + s_2^0\overline{u_2}))) = \check{A}_2\frac{\partial p_2}{\partial x} + \check{B}_2\overline{s_2} + \check{C}_2\overline{\phi}.$$

Выразим $\overline{u_1}$

$$\overline{u_1} + \frac{\phi^0 s_2^0\overline{u_2} - \widetilde{c}}{(1-\phi^0)(1+s_1^0\frac{\phi^0}{1-\phi^0})} = \frac{1}{(\phi^0 s_1^0)(1+s_1^0\frac{\phi^0}{1-\phi^0})}(\widetilde{A_1}\frac{\partial p_1}{\partial x} + \widetilde{B_1}\overline{s_1} + \widetilde{C_1}\overline{\phi}), \tag{29}$$

где

$$\widetilde{A_1} = -\frac{K_0(\phi^0)\overline{k_{01}(s_1^0)}}{\mu_1}, \widetilde{B_1} = \frac{K_0(\phi^0)\overline{k'_{01}(s_1^0)}}{\mu_1}\rho_1^0 g,$$

$$\widetilde{C_1} = \frac{K'_0(\phi^0)\overline{k_{01}}}{\mu_1}\rho_1^0 g.$$

Пусть

$$F_1 = -\frac{\phi^0 s_2^0}{(1-\phi^0)(1+s_1^0\frac{\phi^0}{1-\phi^0})}, F_2 = \frac{\phi^0 s_2^0}{(1-\phi^0)(1+s_1^0\frac{\phi^0}{1-\phi^0})}\widetilde{A_1},$$

$$F_3 = \frac{\phi^0 s_2^0}{(1-\phi^0)(1+s_1^0\frac{\phi^0}{1-\phi^0})}\widetilde{B_1}, F_4 = \frac{\phi^0 s_2^0}{(1-\phi^0)(1+s_1^0\frac{\phi^0}{1-\phi^0})}\widetilde{C_1},$$

$$F_5 = \frac{\phi^0 s_2^0}{(1-\phi^0)(1+s_1^0\frac{\phi^0}{1-\phi^0})}\widetilde{c}.$$

Тогда перепишем уравнение (2.13) с введенными обозначениями

$$\overline{u_1} = F_1 u_2 + F_2\frac{\partial p_1}{\partial x} + F_3\overline{s_1} + F_4\overline{\phi} + F_5. \tag{30}$$

Выразим $\overline{u_2}$

$$\overline{u_2} + \frac{\phi^0 s_1^0 \overline{u_1} - \widetilde{c}}{(1-\phi^0)(1+s_2^0\frac{\phi^0}{1-\phi^0})} = \frac{1}{(\phi^0 s_2^0)(1+s_2^0\frac{\phi^0}{1-\phi^0})}(\widetilde{A_2}\frac{\partial p_2}{\partial x} + \widetilde{B_2}\overline{s_2} + \widetilde{C_2}\overline{\phi}), \tag{31}$$

где

$$\widetilde{A_2} = -\frac{K_0(\phi^0)\overline{k_{02}(s_2^0)}}{\mu_2}, \widetilde{B_2} = \frac{K_0(\phi^0)\overline{k_{02}'(s_2^0)}}{\mu_2}\rho_2^0 g,$$

$$\widetilde{C_2} = \frac{K_0'(\phi^0)\overline{k_{02}}}{\mu_2}\rho_2^0 g.$$

Пусть

$$G_1 = -\frac{\phi^0 s_1^0}{(1-\phi^0)(1+s_2^0\frac{\phi^0}{1-\phi^0})}, G_2 = \frac{\phi^0 s_1^0}{(1-\phi^0)(1+s_2^0\frac{\phi^0}{1-\phi^0})}\widetilde{A_2},$$

$$G_3 = \frac{\phi^0 s_1^0}{(1-\phi^0)(1+s_2^0\frac{\phi^0}{1-\phi^0})}\widetilde{B_2}, G_4 = \frac{\phi^0 s_1^0}{(1-\phi^0)(1+s_2^0\frac{\phi^0}{1-\phi^0})}\widetilde{C_2},$$

$$G_5 = \frac{\phi^0 s_1^0}{(1-\phi^0)(1+s_2^0\frac{\phi^0}{1-\phi^0})}\widetilde{c}.$$

Тогда перепишем уравнение (2.15) с введенными обозначениями

$$\overline{u_2} = G_1\overline{u_1} + G_2\frac{\partial p_2}{\partial x} + G_3\overline{s_2} + G_4\overline{\phi} + G_5.$$

Используя представление для $\overline{u_1}$, имеем

$$\overline{u_2} = L_1\frac{\partial p_1}{\partial x} + L_2\frac{\partial p_2}{\partial x} + L_3\overline{s_1} + L_4\overline{s_2} + L_5\overline{\phi} + L_6, \tag{32}$$

где

$$L_1 = \frac{-G_1F_2}{1+G_1F_1}, L_2 = \frac{G_2}{1+G_1F_1}, L_3 = \frac{-G_1F_3}{1+G_1F_1}, L_4 = \frac{G_3}{1+G_1F_1},$$

$$L_5 = \frac{-G_1F_4 + G_4}{1 + G_1F_1}, L_6 = \frac{-G_1F_5 - G_5}{1 + G_1F_1}.$$

Тогда из (2.14) получим

$$\overline{u_1} = W_1\frac{\partial p_1}{\partial x} + W_2\frac{\partial p_2}{\partial x} + W_3\overline{s_1} + W_4\overline{s_2} + W_5\overline{\phi} + W_6, \tag{33}$$

где

$$W_1 = \frac{-G_1F_2F_1}{1 + G_1F_1}, W_2 = \frac{G_2F_2}{1 + G_1F_1}, W_3 = \frac{-G_1F_3^2}{1 + G_1F_1}, W_4 = \frac{G_3F_4}{1 + G_1F_1},$$

$$W_5 = \frac{F_5(-G_1F_4 + G_4)}{1 + G_1F_1}, W_6 = \frac{F_6(-G_1F_5 - G_5)}{1 + G_1F_1}.$$

Получим представление для $\overline{u_3}$ используя (2.16),(2.17)

$$\overline{u_3} = I_1\frac{\partial p_1}{\partial x} + I_2\frac{\partial p_2}{\partial x} + I_3\overline{s_1} + I_4\overline{s_2} + I_5\overline{\phi} + I_6, \tag{34}$$

где

$$I_1 = -\frac{\phi^0}{1-\phi^0}(s_1^0W_1 + s_2^0L_1), I_2 = -\frac{\phi^0}{1-\phi^0}(s_1^0W_2 + s_2^0L_2), I_3 = -\frac{\phi^0}{1-\phi^0}(s_1^0W_3 + s_2^0L_3)$$

$$I_4 = -\frac{\phi^0}{1-\phi^0}(s_1^0W_4 + s_2^0L_4), I_5 = -\frac{\phi^0}{1-\phi^0}(s_1^0W_5 + s_2^0L_5), I_6 = \frac{c-\phi^0}{1-\phi^0}(s_1^0W_6 + s_2^0L_6).$$

Складывая уравнения (2.6) и (2.7) имеем

$$\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial t} + \phi^0\frac{\partial(\overline{u_1} + \overline{u_2})}{\partial x} = 0.$$

Используя (2.16) и (2.17) получим

$$\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial t} + \alpha_1\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \alpha_2\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} + \alpha_3\frac{\partial\overline{s_1}}{\partial x} + \alpha_4\frac{\partial\overline{s_2}}{\partial x} + \alpha_5\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x} = 0.$$

В уравнении (2.11) положим $a_2(\phi^0) = 0$. Тогда уравнение будет иметь вид

$$\frac{\partial u_3}{\partial x} = -(a_1(\phi^0) + a_1'(\phi^0)\overline{\phi})\overline{p_e}. \tag{35}$$

Т.к. $p_e = p_{tot} - p_f$, тогда из (2.12) $p_{tot} = (-\rho_{tot}g - C)x + \alpha$. Следовательно, $p_e = (-\rho_{tot}g - C)x + \alpha - p_f$. По определению

$$p_f = (\overline{s_1} + s_1^0)(\overline{p_1} + C_1x + D_1) + (\overline{s_2} + s_2^0)(\overline{p_2} + C_2x + D_2).$$

Отбросив нелинейные члены, получим

$p_f = C_1\overline{s_1}x + D_1\overline{s_1} + s_1^0\overline{p_1} + s_1^0 C_1 x + s_1^0 D_1 + C_2\overline{s_2}x + D_2\overline{s_2} + s_2^0\overline{p_2} + s_2^0 C_2 x + s_2^0 D_2.$

Тогда

$$p_e = C_1\overline{s_1}x + C_2\overline{s_2}x + D_1\overline{s_1} + D_2\overline{s_2} + s_1^0\overline{p_1} + s_2^0\overline{p_2} + \alpha_0 x + \widetilde{\alpha}.$$

Подставив в (2.19) представление для p_e имеем

$$\alpha_{11}\frac{\partial^2\overline{p_1}}{\partial x^2} + \alpha_{12}\frac{\partial^2\overline{p_2}}{\partial x^2} + \alpha_{13}\frac{\partial\overline{s_1}}{\partial x} + \alpha_{14}\frac{\partial\overline{s_2}}{\partial x} + \alpha_{15}\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x} = (C_1\overline{s_1}x + C_2\overline{s_2}x + D_1\overline{s_1} +$$

$$D_2\overline{s_2} + s_1^0\overline{p_1} + s_2^0\overline{p_2} + \alpha_0 x + \widetilde{\alpha})(a_1(\phi^0) + a_1'(\phi^0)\overline{\phi}).$$

Перепишем уравнение (2.9) используя (2.17) и (2.18)

$$\beta_1\frac{\partial\overline{p_1}}{\partial x} + \beta_2\frac{\partial\overline{p_2}}{\partial x} + \beta_3\overline{s_1} + \beta_4\overline{s_2} + \beta_5\overline{\phi} + \beta_6 = 0.$$

Рассмотрим следующую систему уравнений

$$\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial t} + \alpha_1\frac{\partial^2\overline{p_1}}{\partial x^2} + \alpha_2\frac{\partial^2\overline{p_2}}{\partial x^2} + \alpha_3\frac{\partial\overline{s_1}}{\partial x} + \alpha_4\frac{\partial\overline{s_2}}{\partial x} + \alpha_5\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x} = 0, \tag{36}$$

$$\alpha_{11}\frac{\partial^2\overline{p_1}}{\partial x^2} + \alpha_{12}\frac{\partial^2\overline{p_2}}{\partial x^2} + \alpha_{13}\frac{\partial\overline{s_1}}{\partial x} + \alpha_{14}\frac{\partial\overline{s_2}}{\partial x} + \alpha_{15}\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x} = (C_1\overline{s_1}x + C_2\overline{s_2}x + D_1\overline{s_1} +$$

$$D_2\overline{s_2} + s_1^0\overline{p_1} + s_2^0\overline{p_2} + \alpha_0 x + \widetilde{\alpha})(a_1(\phi^0) + a_1'(\phi^0)\overline{\phi}), \tag{37}$$

$$s_1^0\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial t} + \phi^0\frac{\partial\overline{s_1}}{\partial t} + \overline{W_1}\frac{\partial^2\overline{p_1}}{\partial x^2} + \overline{W_2}\frac{\partial^2\overline{p_2}}{\partial x^2} + \overline{W_3}\frac{\partial\overline{s_1}}{\partial x} + \overline{W_4}\frac{\partial\overline{s_2}}{\partial x} + \overline{W_5}\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x} = 0. \tag{38}$$

$$\beta_1\frac{\partial\overline{p_1}}{\partial x} + \beta_2\frac{\partial\overline{p_2}}{\partial x} + \beta_3\overline{s_1} + \beta_4\overline{s_2} + \beta_5\overline{\phi} + \beta_6 = 0. \tag{39}$$

Будем использовать представления для $\overline{p_2}, \overline{s_1}$ вида: $\overline{p_2} = \overline{p_1} + \alpha^*\overline{s_1} + A_1 x + B_1, \quad \overline{s_2} = 1 - \overline{s_1}$. Тогда система (2.20)-(2.23) будет иметь вид

$$\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial t} + \widetilde{\alpha_1}\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \widetilde{\alpha_2}\frac{\partial^2\overline{s_1}}{\partial x^2} + \widetilde{\alpha_3}\frac{\partial\overline{s_1}}{\partial x} + \widetilde{\alpha_4}\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x} + \widetilde{\alpha_5} = 0, \tag{40}$$

$$\widetilde{\alpha_{11}}\frac{\partial^2\overline{p_1}}{\partial x^2}+\widetilde{\alpha_{12}}\frac{\partial^2\overline{s_1}}{\partial x^2}+\widetilde{\alpha_{13}}\frac{\partial\overline{s_1}}{\partial x}+\widetilde{\alpha_{14}}\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x}+\widetilde{\alpha_{15}}=(\widetilde{C_1}\overline{s_1}x+\widetilde{D_1}\overline{s_1}+\widetilde{C_2}\overline{p_1}+ \tag{41}$$

$$\widetilde{\alpha_0}x+\widetilde{\alpha})(a_1(\phi^0)+a_1'(\phi^0)\overline{\phi}),$$

$$\beta_7\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial t}+\beta_8\frac{\partial\overline{s_1}}{\partial t}+\beta_9\frac{\partial^2\overline{p_1}}{\partial x^2}+\beta_{10}\frac{\partial^2\overline{s_1}}{\partial x^2}+\beta_{11}\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x}=0, \tag{42}$$

$$\gamma_1\frac{\partial\overline{p_1}}{\partial x}+\gamma_2\frac{\partial\overline{s_1}}{\partial x}+\gamma_3\overline{s_1}+\gamma_4\overline{\phi}+\gamma_6=0. \tag{43}$$

Продифференцировав (2.27) по x получим

$$\gamma_1\frac{\partial^2\overline{p_1}}{\partial x^2}+\gamma_2\frac{\partial^2\overline{s_1}}{\partial x^2}+\gamma_3\frac{\partial\overline{s_1}}{\partial x}+\gamma_4\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x}=0,$$

откуда

$$\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x}=\gamma_7\frac{\partial^2\overline{p_1}}{\partial x^2}+\gamma_8\frac{\partial^2\overline{s_1}}{\partial x^2}+\gamma_9\frac{\partial\overline{s_1}}{\partial x}. \tag{44}$$

В (2.24) уравнение подставим (2.28)

$$\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial t}+\alpha_7\frac{\partial^2\overline{p_1}}{\partial x^2}+\alpha_8\frac{\partial^2\overline{s_1}}{\partial x^2}+\alpha_9\frac{\partial\overline{s_1}}{\partial x}+\alpha_{10}=0,$$

откуда

$$\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial t}=\widetilde{\alpha_7}\frac{\partial^2\overline{p_1}}{\partial x^2}+\widetilde{\alpha_8}\frac{\partial^2\overline{s_1}}{\partial x^2}+\widetilde{\alpha_9}\frac{\partial\overline{s_1}}{\partial x}+\widetilde{\alpha_{10}}. \tag{45}$$

В уравнение (2.26) подставим (2.28) и (2.29)

$$\beta_6\frac{\partial^2\overline{p_1}}{\partial x^2}+\beta_7\frac{\partial^2\overline{s_1}}{\partial x^2}+\beta_8\frac{\partial\overline{s_1}}{\partial x}+\beta_9\frac{\partial\overline{s_1}}{\partial t}+\beta_{10}=0,$$

откуда

$$\frac{\partial^2\overline{p_1}}{\partial x^2}=\widetilde{\beta_7}\frac{\partial^2\overline{s_1}}{\partial x^2}+\widetilde{\beta_8}\frac{\partial\overline{s_1}}{\partial x}+\widetilde{\beta_9}\frac{\partial\overline{s_1}}{\partial t}+\widetilde{\beta_{10}}. \tag{46}$$

Подставим (2.28)-(2.30) в (2.25) уравнение и получим

$$\omega_1\frac{\partial^2\overline{s_1}}{\partial x^2}+\omega_2\frac{\partial\overline{s_1}}{\partial x}+\omega_3\frac{\partial\overline{s_1}}{\partial t}+\omega_4=\omega_5\overline{s_1}x+\omega_6x+\omega_7\overline{s_1}+\widetilde{a_1}\overline{p_1}+a_1B_1+\omega_8\overline{\phi}x+\omega_9\overline{\phi}.$$

Продифференцировав данное уравнение по x имеем

$$\omega_1\frac{\partial^3\overline{s_1}}{\partial x^3}+\omega_2\frac{\partial^2\overline{s_1}}{\partial x^2}+\omega_3\frac{\partial^2\overline{s_1}}{\partial x\partial t}=\omega_5\overline{s_1}+\omega_5x\frac{\partial\overline{s_1}}{\partial x}+\omega_6+\omega_7\frac{\partial\overline{s_1}}{\partial x}+\widetilde{a_1}\frac{\partial\overline{p_1}}{\partial x}+\omega_8\overline{\phi}+\omega_8x\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x}+\omega_9\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x}.$$

В полученном уравнении воспользуемся (2.30) представлением и еще раз продифференцируем по x

$$\omega_1\frac{\partial^4\overline{s_1}}{\partial x^4}+\widetilde{\omega_2}\frac{\partial^3\overline{s_1}}{\partial x^3}+\omega_3\frac{\partial^3\overline{s_1}}{\partial x^2\partial t}=\widetilde{\omega_5}x\frac{\partial^2\overline{s_1}}{\partial x^2}+\widetilde{\omega_7}\frac{\partial\overline{s_1}}{\partial x}+\omega_{11}\frac{\partial^2\overline{s_1}}{\partial x^2}+a_1\frac{\partial^2\overline{p_1}}{\partial x^2}+$$

$$\omega_8\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x}+\omega_9x\frac{\partial^3\overline{s_1}}{\partial x^3}+\omega_{10}\frac{\partial\overline{s_1}}{\partial t}+\omega_{10}\frac{\partial^2\overline{s_1}}{\partial t\partial x}.$$

Используя (2.28)-(2.30) получим уравнение вида:

$$\widetilde{\omega_1}\frac{\partial^4\overline{s_1}}{\partial x^4}+\widetilde{\omega_2}x\frac{\partial^3\overline{s_1}}{\partial x^3}+\widetilde{\omega_3}\frac{\partial^3\overline{s_1}}{\partial x^2\partial t}+\widetilde{\omega_4}x\frac{\partial^4\overline{s_1}}{\partial x^3\partial t}+\widetilde{\omega_5}x\frac{\partial^3\overline{s_1}}{\partial x^3}+\widetilde{\omega_6}\frac{\partial^2\overline{s_1}}{\partial x^2}+\widetilde{\omega_7}x\frac{\partial^2\overline{s_1}}{\partial x\partial t}+$$

$$\widetilde{\omega_8}x\frac{\partial^2\overline{s_1}}{\partial x^2}+\widetilde{\omega_9}\frac{\partial\overline{s_1}}{\partial t}+\widetilde{\omega_{10}}=0.$$

Будем считать, что $\widetilde{\omega_{10}}=0$. Решение уравнения будем искать в виде $s_1=\Theta(t)P(x)$. Разделив переменные, получим

$$\frac{\widetilde{\omega_3}P''+\widetilde{\omega_6}xP'+\widetilde{\omega_9}P}{\widetilde{\omega_1}P''''+P'''(\widetilde{\omega_2}+\widetilde{\omega_4}x)+P''(\widetilde{\omega_5}+\widetilde{\omega_7}x)+\widetilde{\omega_8}P'}=\frac{\Theta'}{\Theta}=-\lambda,$$

где $\lambda-const$. Уравнение для $\Theta(t)$ есть элементарное уравнение 1-го порядка. Очевидно, что для устойчивости решения по времени необходимо, чтобы $\lambda<0$. Для функции $P(x)$ имеем линейное уравнение 4-го порядка. Это уравнение может быть исследовано сведением к системе уравнений 1-го порядка. Таким образом, для нелинейной системы уравнений была исследована задача об устойчивости стационарного решения.

2.3 Стационарное решение системы уравнений без учета силы тяжести капиллярного скачка

Рассмотрим аналитическое решение системы (2.1)-(2.5) в случае ускорения силы тяжести и капиллярного скачка равных нулю: $g=0, p_c=0$[13]. При этих предположениях из уравнения (2.4) следует $p_{tot}=p_{tot}^0=const$. Поскольку $p_c=0$, то $p_1=p_2=p_f\equiv p$ и, следовательно,

$$\phi p+(1-\phi)p_s=p_{tot}^0.$$

В установившемся движении скорости равны нулю ($u_i=0, i=1,2,3$), пористости и насыщенности являются постоянными

$$\phi=\phi^0,\quad s_i=s_i^0,\quad (\phi^0,s_i^0)\in(0,1).$$

При сделанных предположениях уравнения (2.1)-(2.3) выполняются автоматически. Из уравнения (2.5) следует, что $p_e = 0$, т.е. $p_{tot} = p_f = p^0_{tot}$. Итак, стационарное решение (2.1)-(2.5) с учетом (2.6) есть

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0, \quad \phi = \phi^0, \quad s_i = s_i^0, \quad p_1 = p_2 = p_s = p^0_{tot}.$$

2.4 Возмущенное решение системы уравнений без учета силы тяжести капиллярного скачка

Решение системы (2.1)-(2.5) ищется в окрестности стационарного решения в виде

$$u_i = \overline{u_i}, \quad p_i = p_i^0 + \overline{p_i}, \quad s_1 = s_1^0 + \overline{s_1}, \quad s_2 = s_2^0 + \overline{s_2},$$

$$s_1^0 + s_2^0 = 1, \quad \overline{s_1} + \overline{s_2} = 0, \quad \phi = \phi^0 + \overline{\phi}, (0 \le \phi^0 + \overline{\phi} \le 1),$$

где функции $\overline{u_i}, \overline{s_i}, \overline{p_i}, \overline{\phi}$ малы и имеют непрерывные производные. Подставляя возмущенное решение в (2.1)-(2.5) и отбрасывая нелинейные члены, приходим к следующей линейной системе (черта сверху в дальнейшем опускается)

$$\phi^0 \frac{\partial s_1}{\partial t} + s_1^0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi^0 s_1^0 \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \tag{47}$$

$$\phi^0 \frac{\partial s_2}{\partial t} + s_2^0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi^0 s_2^0 \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \tag{48}$$

$$\frac{\partial (1-\phi)}{\partial t} + (1-\phi^0) \frac{\partial u_3}{\partial x} = 0, \tag{49}$$

$$s_1^0 \phi^0 (u_1 - u_3) = -(K_0(\phi^0) \frac{\overline{k_{01}}}{\mu_1} + K_0(\phi^0) \overline{k'_{01}} (s_1^0) s_1^0) \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{50}$$

$$s_2^0 \phi^0 (u_2 - u_3) = -(K_0(\phi^0) \frac{\overline{k_{02}}}{\mu_2} + K_0(\phi^0) \overline{k'_{02}} (s_2^0) s_2^0) \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{51}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x} = -a_1(\phi^0)(h(t) - p^0_{tot} - p) - a'_1(\phi^0) \phi p^0_{tot} + a_2(\phi^0) \frac{\partial (h(t) - p^0_{tot} - p)}{\partial t}, \tag{52}$$

$$p_{tot} = h(t), \quad p_e = h(t) - p^0_{tot} - p, \quad p_s = \frac{h(t) - \phi p^0_{tot} + \phi^0 p}{1 - \phi - \phi^0}. \tag{53}$$

Преобразуем систему (2.31)-(2.37). Складывая уравнения (2.31)-(2.33), получим

$$\frac{\partial}{\partial x}((1-\phi^0)u_3 + \phi^0(u_1+u_2)) = 0.$$

Откуда

$$u_3 = \frac{\check{c}(t)}{1-\phi^0} - \frac{\phi^0}{1-\phi^0}(s_1^0 u_1 + s_2^0 u_2), \tag{54}$$

где $\check{c}(t)$ - некоторая функция времени. Положим

$$A_1 = -K_0(\phi^0)\frac{\overline{k_{01}}(s_1^0)}{\mu_1} - K_0(\phi^0)\frac{\overline{k'_{01}}(s_1^0)}{\phi^0}, \quad A_2 = -K_0(\phi^0)\frac{\overline{k_{02}}(s_2^0)}{\mu_2} - K_0(\phi^0)\frac{\overline{k'_{02}}(s_2^0)}{\phi^0}.$$

С учетом (2.37) уравнения (2.34), (2.35) можно представить в виде

$$u_1(1+\phi^0+\phi^0 s_1^0) - u_2 s_2 \phi^0 = (1+\phi^0)A_1\frac{\partial p}{\partial x} - \check{c},$$

$$u_1 s_1^0 \phi^0 - u_2(1+\phi^0+\phi^0 s_2^0) = (1+\phi^0)A_2\frac{\partial p}{\partial x} - \check{c}.$$

Поскольку определитель этой системы всегда не равен нулю, то получим

$$u_1 = B_1\frac{\partial p}{\partial x} - \check{c}_1, \quad u_2 = B_2\frac{\partial p}{\partial x} - \check{c}_2, \tag{55}$$

где

$$B_1 = (1+\phi^0)A_1 - \frac{\phi^0 s_2^0}{1+\phi^0+\phi^0 s_1^0}\frac{1+\phi^0}{1+\phi^0+(\phi^0)^2 s_1^0 + (\phi^0)^2 s_1^0 s_2^0}A_2,$$

$$B_2 = -A_2\frac{1+\phi^0}{1+\phi^0+(\phi^0)^2 s_1^0 + \phi^{02} s_1^0 s_2^0},$$

$$B_3 = \frac{-\phi^0}{1-\phi^0}(s_1 B_1 + s_2 B_2),$$

$$\check{c}_1 = \frac{\check{c}}{1+\phi^0+(\phi^0)^2 s_1^0 + (\phi^0)^2 s_1^0 s_2^0} - \check{c},$$

$$\check{c}_2 = \frac{\check{c}}{1+\phi^0+(\phi^0)^2 s_1^0 + \phi^{02} s_1^0 s_2^0},$$

$$\check{c}_3 = \frac{\check{c}}{1-\phi^0} + \frac{\phi^0}{1-\phi^0}(s_1^0 \check{c}_1 + s_2^0 \check{c}_2).$$

Получим уравнения для ϕ, p, s. Складывая уравнения (2.31) и (2.32), выводим
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi^0 \frac{\partial (u_1 + u_2)}{\partial x} = 0.$$
С учетом (2.38), имеем
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = C_1 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \tag{56}$$
где $C_1 = -\phi^0(s_1^0 B_1 + s_2^0 B_2)$. Будем считать $h(t)$ константой. Из (2.35) и (2.38) выводим
$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\frac{a_1(\phi^0)}{B_3}(p^0_{tot} - p) - \frac{a_1'(\phi^0)}{B_3}\phi p^0_{tot} - \frac{a_2(\phi^0)}{B_3}\frac{\partial p}{\partial t},$$
где
$$D_1 = -\frac{a_1(\phi^0) p^0_{tot}}{B_3} - \frac{a_1'(\phi^0)\phi p^0_{tot}}{B_3}, \quad \alpha = -\frac{a_1(\phi^0)}{B_3}, \quad \beta = -\frac{a_2(\phi^0)}{B_3}.$$
Дифференцируя уравнение (2.39) по t и используя (2.38) приходим к уравнению для p
$$\frac{\partial^3 p}{\partial t \partial x^2} = \alpha \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \tag{57}$$
Будем искать решение в виде $p = \Psi(t)\Theta(x)$. Перепишем уравнение (2.41)
$$\Theta''(x)(\alpha \Psi'(t) + \beta \Psi(t)) = \Psi''(t)\Theta(x).$$
Разделив переменные, получим
$$\frac{\Theta''(x)}{\Theta(x)} = \frac{\Psi''(t)}{\alpha \Psi'(t) + \beta \Psi(t)} = -\lambda.$$
Отсюда,
$$\Theta = c_1 cos(\lambda x) + c_2 sin(\lambda x), \quad \Psi = c_3 e^{k_1 t} + c_4 e^{k_2 t},$$
где
$$k_1 = \frac{\lambda \alpha - \sqrt{\lambda^2 \alpha^2 + 4\lambda\beta}}{2}, \quad k_2 = \frac{\lambda \alpha + \sqrt{\lambda^2 \alpha^2 + 4\lambda\beta}}{2}.$$
Тогда решение для p имеет вид
$$p = (c_1 cos(\lambda x) + c_2 sin(\lambda x))(c_3 e^{k_1 t} + c_4 e^{k_2 t}). \tag{58}$$

Из уравнения (2.40) находим ϕ

$$\phi = C_1\lambda^2(\frac{c_3}{k_1}e^{k_1t} + \frac{c_4}{k_2}e^{k_2t})(-c_1cos(\lambda x) - c_2sin(\lambda x)).$$

Уравнение для s_1 получим из (2.32)

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} = -(\frac{s_1^0}{\phi^0} + s_1^0B_1)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \check{c}_1''(x).$$

Отсюда имеем решение для s_1

$$s_1 = -(\frac{s_1^0}{\phi^0} + s_1^0B_1)\lambda^2(\frac{c_3}{k_1}e^{k_1t} + \frac{c_4}{k_2}e^{k_2t})(-c_1cos(\lambda x) - c_2sin(\lambda x)) - \check{c}_1''(x).$$

Представление (2.42) является ключевым при исследовании решений системы (2.1) - (2.5). Условие $Re\ k_i < 0, i = 1, 2$ является необходимым для сходимости к стационарному решению.

3. Автомодельное решение задачи поршневого вытеснения

3.1 Переменные Лагранжа

Система (1.1)-(1.3) записана в переменных Эйлера. Перейдем к переменным Лагранжа. Пусть $y = y(\zeta, x, t)$ – решение задачи Коши

$$\frac{\partial y}{\partial \zeta} = u_3(y, \zeta), \quad y|_{\zeta=t} = x.$$

Положим $\xi = y(\zeta, x, t)|_{\zeta=0}$ и возьмем за новые переменные ξ и t. Тогда $1 - \phi(\xi, t) = (1 - \phi^0(\xi))J(\xi, t)$, где $J(\xi, t) = \frac{\partial \xi}{\partial x}$ – якобиан перехода.

Тогда $(1 - \phi(\xi, t)) = (1 - \phi^0(\xi))\frac{\partial \xi}{\partial x}$. Система уравнений (1.1) - (1.3) в новых переменных имеет вид:

$$\frac{\partial \phi s_i}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi}(\phi s_i u_i) - u_3\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi}(\phi s_i) = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$s_i\phi(u_i - u_3) = -K_0\frac{\overline{k_{0i}}}{\mu_i}(\frac{(1-\phi)}{(1-\phi^0)}\frac{\partial p_i}{\partial \xi} - \rho_i^0 g), \quad i = 1, 2,$$

$$s_1 + s_2 = 1, \quad p_2 - p_1 = p_c(x, s) = \overline{p_c}(x)j(s),$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + \frac{(1-\phi)^2}{(1-\phi^0)}\frac{\partial u_3}{\partial \xi} = 0,$$

$$\frac{(1-\phi)}{(1-\phi^0)}\frac{\partial u_3}{\partial \xi} = -a_1(\phi)p_e - a_2(\phi)\frac{\partial p_e}{\partial t},$$

$$p_e = p_{tot} - p_f, \quad p_f = s_1 p_1 + s_2 p_2,$$

$$\frac{(1-\phi)}{(1-\phi^0)}\frac{\partial p_{tot}}{\partial \xi} = -\rho_{tot} g.$$

Положим $\overline{k_{0i}}/\mu_i = k_{0i}$ и будем считать $p_e = p_c(s)$. Складывая уравнения неразрывности, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\phi}{1-\phi}) + \frac{\partial}{\partial x}(s\phi(u_1 - u_3) + (1-s)\phi(u_2 - u_3)) = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\phi}{1-\phi}) + \frac{\partial}{\partial x}(\phi_i(u_i - u_3)) = 0,$$

$$\phi(u_i - u_3) = -k_0 k_{0i}(1-\phi)\frac{\partial \phi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t}+(1-\phi)^2\frac{\partial u_3}{\partial x}=0,$$

$$(1-\phi)\frac{\partial u_3}{\partial x}=-a_1(\phi)p_e-a_2(\phi)\frac{\partial p_e}{\partial t}.$$

3.2 Поршневое вытеснение

Пусть имеется прямолинейная цепочка близко расположенных относительно друг друга скважин, нагнетающих в бесконечный пласт с заданными постоянными давлениями p_1^0 жидкость(например воду) с вязкостью μ_1. Горизонтальный пласт содержит другую жидкость, например нефть с вязкостью μ_2, находящуюся под постоянным давлением p_2^0. Выберем ось x направленной перепендикулярно по отношению к линии скважин в ввиду симметрии процесса рассмотрим полубесконечный интервал $x\in(0,\infty)$. Процесс вытеснения нефти водой описывается поршневой моделью. Ключевым моментом является переменная пористость грунта. В области $x\in[0,l)=\Omega_1$ концентрация воды $s_1=1$, а концентрация нефти $s_2=0$. В области $x\in(l,\infty)=\Omega_2$ концентрация воды $s_1=0$, а концентрация нефти $s_2=1$. Граница раздела воды и нефти $x=l(t)$ определяется в ходе решения задачи. В массовых лагранжевых переменных система (1.1)-(1.3) может быть приведена к виду [10]

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi_i}{1-\phi_i}\right)+\frac{\partial}{\partial x}(\phi_i(u_i-u_{3i}))=0,\quad i=1,2, \tag{59}$$

$$\phi_i(u_i-u_{3i})=-K_0k_{0i}(1-\phi_i)\frac{\partial p_i}{\partial x},k_{0i}=\overline{k}_{0i}/\mu_i \tag{60}$$

$$\frac{\partial(1-\phi_i)}{\partial t}+(1-\phi_i)^2\frac{\partial u_{3i}}{\partial x}=0, \tag{61}$$

$$(1-\phi_i)\frac{\partial u_{3i}}{\partial x}=-a_2(\phi_i)\frac{\partial p_e}{\partial t}, \tag{62}$$

$$\frac{1}{(1-\phi)^2}\frac{\partial(1-\phi_i)}{\partial t}+\frac{\partial u_{3i}}{\partial x}=0. \tag{63}$$

$$p_{tot}=p_{tot}^0(t),\quad p_1=p_2,$$

Из (3.3) при делении на $(1-\phi)^2$ получаем

$$\frac{1}{(1-\phi_i)^2}\frac{\partial(1-\phi_i)}{\partial t}+\frac{\partial u_{3i}}{\partial x}=0.$$

Из уравнений (3.3), (3.4) можем получить первый интеграл

$$ln|\frac{\phi_i}{1-\phi_i}|+\beta_\phi p_{ei}=c_i(x),$$

тогда

$$p_{ei}=-c_i(x)-ln|\frac{\phi_i}{1-\phi_i}|.$$

С другой стороны $p_{ei}=(p_{tot}(t))^i-p_i$. Следовательно,

$$c_i(x)=ln|\frac{\phi_i}{1-\phi_i}|+\beta_\phi((p_{tot}(t))^i-p_i),$$

тогда

$$\widetilde{c_i}(x)=\frac{\phi_i}{1-\phi_i}e^{\beta_\phi((p_{tot}(t))^i-p_i)}.$$

Из (3.3) получим

$$\frac{\partial u_{3i}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}(\phi_i(u_i-u_{3i}))=0.$$

Преобразовав уравнение, имеем

$$u_{3i}=D_i(t)-\frac{(1-\phi_i)^2}{\phi_i}K_0k_{0i}\frac{\partial p_i}{\partial x}.$$

Из этого следует,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\phi_i}{1-\phi_i})=\frac{\partial}{\partial x}(K_0k_{0i}(1-\phi_i)\frac{\partial}{\partial x}(ln|\frac{\phi_i}{1-\phi_i}|+h_i(t)-\widetilde{c_i})).$$

В дальнейшем считаем, что $\partial c_i/\partial x=0$. Тогда из уравнений (3.1), (3.2) получим

$$\frac{\partial c_i}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(ln|\frac{\phi_i}{1-\phi_i}|+\beta_\phi p_{ei})=0.$$

Отсюда,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\phi_i}{1-\phi_i})=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{\phi_i}k_0(\phi_i)k_{0i}\frac{\partial\phi_i}{\partial x}),$$

$k_0 = \widetilde{k}\phi/(1-\phi)^2$ –коэффициент фильтрации, где $\widetilde{k} = const$ –размерный коэффициент. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\phi_i}{1-\phi_i}) = k_i \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\phi_i}{1-\phi_i})).$$

Обезразмерим данное уравнение. Для этого перейдем к безразмерным переменным $t' = \frac{t}{T}$, $x' = \frac{x}{L}$, $k_i' = \frac{k_i}{K_i}$. Область изменения x' и t' есть одиночный отрезок [0, 1]. Следовательно, получим уравнение вида

$$\frac{\partial}{\partial t'}(\frac{\phi_i}{1-\phi_i}) = \frac{T}{L^2}k'\overline{k}\frac{\partial^2}{\partial x'^2}(\frac{\phi_i}{1-\phi_i}),$$

где $\frac{T}{L^2}k'$-есть безразмерный коэффициент, который обозначим M(штрихи можно опустить)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\phi_i}{1-\phi_i}) = M\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{\phi_i}{1-\phi_i}).$$

Пусть $\varphi_i = \phi_i/(1-\phi_i), \partial\varphi_i/\partial t = M\partial^2\varphi_i/\partial x$. Предполагается, что в начальный момент времени $\varphi_i(x,0) = \varphi_i^0 e^{\delta}$. При $x = l(t)$ требуем

$$1) p_2 = p_1 + p_c, p_c = const,$$

$$2) \frac{v_1}{\phi_1} = \frac{v_2}{\phi_2},$$

$$3) \frac{dl}{dt} = \frac{v_1}{\phi_1} = \frac{v_2}{\phi_2}.$$

Тогда на подвижной свободной границе $x = l(t)$ должны быть обеспечены условия непрерывности давлений и расходов (скоростей фильтрации Дарси)

$$\varphi_1(l,t) = \varphi_2(l,t)e^{\delta}, \tag{64}$$

$$k_1\frac{1+\varphi_1}{\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(l,t) = k_2\frac{1+\varphi_2}{\varphi_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(l,t), \tag{65}$$

$$\frac{dl}{dt} = -k_1\frac{1+\varphi_1}{\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(l,t). \tag{66}$$

Введем в каждой из областей Ω_1, Ω_2 автомодельные переменные

$$y_1 = \frac{x}{2\sqrt{\kappa_1 t}}, \quad y_2 = \frac{x}{2\sqrt{\kappa_2 t}}.$$

Будем искать функции $\varphi_1(x,t)$, $\varphi_2(x,t)$, $x = l(t)$ в виде $\varphi_1(y_1)$, $\varphi_1(y_2)$ и $l = c\sqrt{t}$, где c – пока произвольная константа. Легко видеть, что

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{4}\frac{d^2\varphi}{dy_i^2} + \frac{x}{2\sqrt{kt}}\frac{d\varphi}{dy}.$$

Сделав замену $z = d\varphi/dy$, получим уравнение вида:

$$2ydy + \frac{dz}{z} = 0,$$

Легко заметить, что решение данного уравнения имеет вид:

$$\varphi_i = A_i \mathtt{erf} y_i + B_i,$$

где функция

$$\mathtt{erf} y = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^y e^{-\zeta^2} d\zeta$$

есть интеграл вероятности, причем $\mathtt{erf}(0) = 0$, $\mathtt{erf}(\infty) = 1$. Заметим, что подвижная граница $l = c\sqrt{t}$ в автомодельных переменных y_i переходит в фиксированные границы $y_{1*} = c/(2\sqrt{\kappa_1})$ и $y_{2*} = c/(2\sqrt{\kappa_2})$, а фиксированные граничные точки $x = 0$, $x = \infty$ переходят соответственно в точки $y_1 = 0$, $y_2 = \infty$. Для определения пяти искомых постоянных A_i, B_i (i=1,2) и константы c имеется пять условий: в точках $y_1 = 0$, $y_2 = \infty$ выполнены условия (64), два условия непрерывности (65), (66). В результате приходим к следующим соотношениям: $B_1 = \varphi_1^0$, $B_2 = \varphi_2^0 - A_2$,

$$A_1 erf(\frac{c}{2\sqrt{k_1}}) + \varphi_1^0 = e^\delta(A_2 erf(\frac{c}{2\sqrt{k_2}}) + \varphi_2 - A_2), \tag{67}$$

$$A_1\sqrt{k_1}\frac{1+\varphi_2 e^\delta}{\varphi_2 e^\delta} e^{\frac{\pm c^2}{4k_1}} = A_2\sqrt{k_2}\frac{1+\varphi_2}{\varphi_2} e^{\frac{-c^2}{4k_2}},$$

$$c = -\frac{1 + A_1 erf(\frac{c}{2\sqrt{k_1}}) + \varphi_1^0}{A_1 erf(\frac{c}{2\sqrt{k_1}}) + \varphi_1^0} A_1\sqrt{k_1} e^{\frac{-c^2}{4k_2}}. \tag{68}$$

Из (67) соотношения получим

$$\frac{A_1 erf(\frac{c}{2\sqrt{k_1}}) + \varphi_2 e^\delta}{\varphi_2 e^\delta} = A_2 erf(\frac{c}{2\sqrt{k_2}}) + \varphi_2 - A_2,$$

Отсюда можно выразить A_1, следующим образом

$$A_1 = \frac{A_2 e^{-\delta}(erf(\frac{c}{2\sqrt{k_2}}) - 1 + \frac{\varphi_2}{A_2}) - \varphi_1}{erf(\frac{c}{2\sqrt{k_1}})}.$$

Введем следующие обозначения

$$\beta = \frac{-\varphi_1}{erf(\frac{c}{2\sqrt{k_1}})}, \alpha = \frac{e^{-\delta}(erf(\frac{c}{2\sqrt{k_2}}) - 1 + \frac{\varphi_2}{A_2})}{erf(\frac{c}{2\sqrt{k_1}})},$$

тогда

$$A_1 = \alpha A_2 + \beta,$$

$$\varphi_2 = A_2 erf(\frac{c}{2\sqrt{k_2}}) + \varphi_2^0 - A_2,$$

$$A_1\sqrt{k_1}\frac{1 + e^{\delta}(A_2 erf(\frac{c}{2\sqrt{k_2}}) + \varphi_2^0 - A_2)}{e^{\delta}(A_2 erf(\frac{c}{2\sqrt{k_2}}) + \varphi_2^0 - A_2)} e^{\frac{-c^2}{4k_1}} = A_2\sqrt{k_2}\frac{1 + e^{\frac{-c^2}{4k_2}}(A_2 erf(\frac{c}{2\sqrt{2}}) + \varphi_2^0 - A_2)}{A_2 erf(\frac{c}{2\sqrt{k_2}}) + \varphi_2^0 - A_2}.$$

Обозначим

$$\alpha_1 = e^{\delta}(erf(\frac{c}{2\sqrt{k_2}} - 1) + \varphi_2)e^{\frac{-c^2}{4k_1}}, \beta_1 = e^{\frac{-c^2}{4k_1}}\sqrt{k_1},$$

$$\alpha_2 = \frac{\sqrt{k_2}e^{\frac{-c^2}{4k^2}}}{(erf(\frac{c}{2\sqrt{k_2}} - 1)) + \varphi_2}, \beta_2 = \sqrt{k_2}e^{\frac{-c^2}{4k^2}}.$$

Получим $\alpha\alpha_1 A_2^2 + A_2(\beta_2\alpha + \alpha_1\beta) + \beta\beta_1 - \beta_2 = 0$ - квадратное уравнение относительно A_2.

$$D = \alpha(\beta_1^2\alpha + 4\alpha_1\beta_2 - 4\alpha_2\beta_1) + \beta(\alpha_1^2\beta - 4\alpha_1\alpha_2) + \alpha_2^2 \neq 0.$$

При $\alpha\alpha_1 \neq 0$, оно решается.

$$A_2^1 = \frac{-\beta_1\alpha - \alpha_1\beta + \alpha_2 - (\alpha(\beta_1^2\alpha + 4\alpha_1\beta_2 - 4\alpha_1\beta_2)) + \beta(\alpha_1^0\beta - 4\alpha_1\alpha_2) + \alpha_2^2}{2\alpha\alpha_1},$$

$$A_2^1 = \frac{1}{2}(\frac{-\beta_1}{\alpha_1} - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha_1}{\alpha\alpha_1} - (\frac{\beta_1^2\alpha}{\alpha_1} + 4\beta_2 - \frac{4\beta_1\alpha_2}{\alpha_1}) + \frac{\beta^2\alpha_1}{\alpha} - \frac{4\beta\alpha_2}{\alpha}) + \frac{\alpha^2}{2\alpha\alpha_1},$$

$$A_2^2 = \frac{-\beta_1\alpha - \alpha_1\beta + \alpha_2 + (\alpha(\beta_1^2\alpha + 4\alpha_1\beta_2 - 4\alpha_1\beta_2)) + \beta(\alpha_1^0\beta - 4\alpha_1\alpha_2) + \alpha_2^2}{2\alpha\alpha_1},$$

$$A_2^2 = \frac{1}{2}(\frac{-\beta_1}{\alpha_1} - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha_1}{\alpha\alpha_1} + (\frac{\beta_1^2\alpha}{\alpha_1} + 4\beta_2 - \frac{4\beta_1\alpha_2}{\alpha_1}) + \frac{\beta^2\alpha_1}{\alpha} - \frac{4\beta\alpha_2}{\alpha}) + \frac{\alpha^2}{2\alpha\alpha_1}.$$

Следовательно, выстраивается функция F(c). Получим

$$A_1 = A_2 \frac{\sqrt{k_2}}{\sqrt{k_1}} \frac{1+\varphi_2}{e^{\delta}+\varphi_2} e^{\frac{c^2(k_2-k_1)}{4k_2-k_1}}.$$

Тогда

$$A_2 = \frac{\varphi_2^0 e^{\delta} - \varphi_1^0}{\frac{\sqrt{k_2}}{\sqrt{k_1}} \frac{1+\varphi_2}{e^{\delta}+\varphi_2} e^{\frac{c^2(k_2-k_1)}{4k_2-k_1}} erf(\frac{c}{2\sqrt{k_1}}) - e^{\delta} erf(\frac{c}{2\sqrt{k_2}}) + e^{\delta}},$$

$$A_1 = \frac{\varphi_2^0 e^{\delta} - \varphi_1^0}{\frac{\sqrt{k_2}}{\sqrt{k_1}} \frac{1+\varphi_2}{e^{\delta}+\varphi_2} e^{\frac{c^2(k_2-k_1)}{4k_2-k_1}} erf(\frac{c}{2\sqrt{k_1}}) - e^{\delta} erf(\frac{c}{2\sqrt{k_2}}) + e^{\delta}} \frac{\sqrt{k_2}}{\sqrt{k_1}} \frac{1+\varphi_2}{e^{\delta}+\varphi_2} e^{\frac{c^2(k_2-k_1)}{4k_2-k_1}}.$$

Рассмотрим уравнение (3.10) для нахождения параметра c. Положим

$$F(c) = c e^{\frac{c^2}{4k_1}} + \frac{1 + A_1 erf(\frac{c}{2\sqrt{k_1}}) + \varphi_1^0}{A_1 erf(\frac{c}{2\sqrt{k_1}+\varphi_1^0})} A_1 \sqrt{k_1} = 0. \qquad (69)$$

Рассмотрим знаки функции F(c) на концах отрезка $[0;\infty)$. В дальнейшем считаем, что $e^{\delta}\varphi_2^0 - \varphi_1^0 < 0$. При c=0 имеем,

$$\varphi_1^0 = e^{\delta}\varphi_2^0 - e^{\delta} A_2,$$

$$A_2 = \frac{e^{\delta}\varphi_2^0 - \varphi_1^0}{e^{\delta}},$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{k_2}(1+\varphi_2)(e^{\delta}\varphi_2^0 - \varphi_1^0)}{\sqrt{k_1} e^{\delta}(e^{\delta}+\varphi_2)}.$$

Тогда получим:

$$F(0) = \sqrt{k_2} \frac{1 + \varphi_1^0 (e^{\delta}\varphi_2^0 - \varphi_1^0)(1+\varphi_2)}{\varphi_1^0 e^{\delta}(e^{\delta}+\varphi_2)} < 0.$$

Рассмотрим при $c \to +\infty$. Тогда

$$F(+\infty) = \sqrt{k_1} \frac{\varphi_1^0 + \varphi_2^0 e^{\delta} + \varphi_1^{02}}{\varphi_2^0 e^{\delta} + \varphi_1^0} \frac{\varphi_2^0 e^{\delta}}{\varphi_1^0} > 0,$$

т.е. функция F(c) меняет знак. Поэтому на интервале $[0;\infty)$ имеется хотя бы один корень уравнения (3.11).

Замечание. Рассмотрим случай, когда $p_c = 0, \delta = 0$. На внешних границах областей заданы условия: $\varphi_1(0,t) = \varphi_1^0 = const, \varphi_2(\infty,t) = \varphi_2^0$, которые согласуются с начальными данными. На подвижной свободной границе $x = l(t)$, должны быть обеспечены условия непрерывности пористости и расходов (скоростей Дарси)

$$\varphi_1(l,t) = \varphi_2(l,t),$$

$$\kappa_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(l,t) = \kappa_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(l,t),$$

$$\frac{dl}{dt} = -\kappa_1 \frac{1+\varphi_1}{\varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(l,t).$$

Тогда

$$B_1 = \varphi_1^0, A_2 + B_2 = \varphi_2^0,$$

$$A_1 \mathtt{erf}(\frac{c}{2\sqrt{\kappa_1}}) + \varphi_1^0 = A_2 \mathtt{erf}(\frac{c}{2\sqrt{\kappa_2}}) + \varphi_2^0 - A_2,$$

$$A_1 \sqrt{\kappa_1} e^{-\frac{c^2}{4\kappa_1}} = A_2 \sqrt{\kappa_2} e^{-\frac{c^2}{4\kappa_2}},$$

$$c = -\frac{1 + A_1 \mathtt{erf}(\frac{c}{2\sqrt{\kappa_1}}) + \varphi_1^0}{A_1 \mathtt{erf}(\frac{c}{2\sqrt{\kappa_1}}) + \varphi_1^0} A_1 \sqrt{\kappa_1} e^{-\frac{c^2}{4\kappa_1}}.$$

Отсюда следует, что

$$A_1 = \frac{(\varphi_2^0 - \varphi_1^0)\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}} e^{\frac{c^2(\kappa_2-\kappa_1)}{4\kappa_1\kappa_2}}}{1 + \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}} e^{\frac{c^2(\kappa_2-\kappa_1)}{4\kappa_1\kappa_2}} \mathtt{erf}(\frac{c}{2\sqrt{\kappa_1}}) - \mathtt{erf}(\frac{c}{2\sqrt{\kappa_2}})},$$

$$A_2 = \frac{\varphi_2^0 - \varphi_1^0}{1 + \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}} e^{\frac{c^2(\kappa_2-\kappa_1)}{4\kappa_1\kappa_2}} \mathtt{erf}(\frac{c}{2\sqrt{\kappa_1}}) - \mathtt{erf}(\frac{c}{2\sqrt{\kappa_2}})}.$$

Заметим, что коэффициенты A_1, A_2 отрицательны и функции φ_i монотонно убывают. Так как $\varphi_1^0 > \varphi_2^0$, то

$$\varphi_1^0 \geq \varphi_1(y_1) \geq \varphi_1(l) = \varphi_2(l) \geq \varphi_2(y_2) \geq \varphi_2^0.$$

Из предыдущего неравенства получим оценку для пористости

$$0 < m_0 = \frac{\varphi_1^0}{1+\varphi_1^0} \leq \phi_i \leq \frac{\varphi_2^0}{1+\varphi_2^0} = M_0 < 1.$$

Положим

$$F(c) \equiv c e^{-\frac{c^2}{4\kappa_1}} + \frac{1 + A_1 \mathtt{erf}(\frac{c}{2\sqrt{\kappa_1}}) + \varphi_1^0}{A_1 \mathtt{erf}(\frac{c}{2\sqrt{\kappa_1}}) + \varphi_1^0} A_1 \sqrt{\kappa_1}.$$

Заметим, что при $1 > \varphi_1^0 > \varphi_2^0 > 0$

$$F(0) = \frac{1 + \varphi_1^0}{\varphi_1^0} (\varphi_2^0 - \varphi_1^0) \sqrt{\kappa_2} < 0, \quad F(+\infty) > 0,$$

т. е. функция $F(c)$ меняет знак. Поэтому на интервале $(0, \infty)$ имеется хотя бы один корень.

Заключение

В учебном пособии для задачи о фильтрации двух несмешивающихся жидкостей было найдено стационарное решение. Полученное стационарное решение было исследовано на устойчивость.Для задачи поршневого вытеснения было построено точное решение.

Библиографический список

1. Ахмерова И.Г., Папин А.А., Токарева М.А.Математические модели механики неоднородных сред: учеб. пособие : [в 2 ч.] // АлтГУ. - Барнаул : Изд-во АлтГУ. - Ч. 1. - 2012. - 128 с.

2. Бочаров О.Б., Пеньковский В.И. Введение в теорию фильтрации жидкостей и газов в пористых средах.//Новосибирск: 2015. - 128 с.

3. Папин А.А., Подладчиков Ю.Ю. Изотермическое движение двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пороупругой среде // Известия Алтайского государственного университета. 2015. № 1-2 (85). С. 131-140.

4. Ведерников В.В.,Николаевский В.Н. Уравнения механики пористых сред, насыщенных двухфазной жидкостью // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1978. – Т.5. с 165-169.

5. Антонцев С.Н., Кажихов А.Н., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей // Новосибирск: Наука, 1983. – 316 с.

6. Антонцев С.Н., Папин А.А. Приближенные методы решения задач двухфазной фильтрации // Доклады Академии наук СССР. 1979. Т. 247. № 3. С. 521-525.

7. Папин А.А. Существование решения "в целом"уравнений одномерного неизотермического движения двухфазной смеси. II. Результаты о разрешимости // Сибирский журнал индустриальной математики. 2006. Т. 9. № 3 (27). С. 111-123.

8. Папин А.А. Существование решения "в целом"уравнений одномерного неизотермического движения двухфазной смеси. I. Постановка задачи и вспомогательные утверждения // Сибирский журнал индустриальной математики. 2006. Т. 9. № 2 (26). С. 116-136.

9. Papin A.A., Tokareva M.A. On local solvability of the system of the equations of one dimensional motion of magma // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика. 2017. Т. 10. № 3. С. 385-395.

10. Папин А.А., СибинА.Н. Автомодельное решение задачи поршневого вытеснения жидкостей в пороупругой среде // Известия Алтайского государственного университета. 2016. № 1 (89). С. 152-156.

11. Sibin A. Numerical study of a mathematical model of internal erosion of soil // Journal of Physics: Conference Series (см. в книгах). 2017. Т. 894. № 1. С. 012085.

12. Папин А.А., Сибин А.Н. Моделирование движения смеси твердых частиц и жидкости в пористых средах с учетом внутренней суффозии // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2019. № 4. С. 82-94.

13. Глушкова А.А., Папин А.А. Устойчивость двухфазных течений в пороупругой среде // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию, 2019. № 5. С. 55-59.