Токарева Маргарита Андреевна

КОРРЕКТНОСТЬ НАЧАЛЬНО - КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ПОРОУПРУГИХ СРЕДАХ

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Барнаул

2018

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования "Алтайский государственный университет".

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент Папин Александр Алексеевич.

Официальные оппоненты:

Кучер Николай Алексеевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Кемеровский государственный университет», кафедра фундаментальной математики, профессор.

Бочаров Олег Борисович, кандидат физико-математических наук, доцент, Новосибирский Технологический центр «АО Бейкер Хьюз», заместитель директора по научной работе.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное научное учреждение "Федеральный исследовательский центр "Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук".

Защита диссертации состоится “____” _________ 2018 г. в _____ на заседании диссертационного совета Д 003.054.04 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН) по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект академика Лаврентьева, 15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН) и на сайте www.hydro.nsc.ru.

Автореферат разослан “____” ________ 2018 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
Д 003.054.04, д-р физ.-мат. наук Рудой Евгений Михайлович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования

Актуальность теоретического исследования задач фильтрации в пористых средах связана с их широким применением в решении важных практических задач. Примерами являются: фильтрация вблизи речных плотин, водохранилищ и других гидротехнических сооружений; ирригация и дренаж сельскохозяйственных полей; нефтегазодобыча, в частности, динамика трещины гидроразрыва пласта, проблемы дегазации угольных и сланцевых месторождений с целью извлечения метана; движение магмы в земной коре, геотектоника при исследовании проседания земной коры, процессы, происходящие в осадочных бассейнах, и т.д. Построение математических моделей таких процессов затруднено тем, что течение жидкости часто рассматривается в подвижной неоднородной среде, которая характеризуется наличием переменной пористости. Особенностью рассматриваемой в данной работе модели фильтрации жидкости в пористой среде является учет подвижности твердого скелета и его пороупругих свойств.

Степень разработанности темы исследования

Процессам фильтрации жидкости в пористых средах посвящена обширная литература (см. [1], [2] и приведенные там ссылки). При этом в рассматриваемых задачах, как правило, возникают отличительные характеристики, которые делают невозможным единый подход к моделированию этих процессов. Параметры, входящие в эти уравнения, существенным образом зависят от свойств, как флюидов, так и вмещающей среды. Поэтому в настоящее время существует множество различных моделей пористых сред. Однако в большинстве из них принимается, что твердый пористый скелет неподвижен, т.е. пористость является заданной функцией. Тем самым они могут быть отнесены к теории фильтрации Маскета-Леверетта. В случае двухфазного движения несмешивающихся несжимаемых жидкостей в недеформируемой пористой среде математическая теория процесса построена в работах С.Н. Антонцева, В.Н. Монахова [3], численным исследованиям посвящено большое

---

[1] Poromechanics IV: Proceedings of the Fourth Biot Conference on Poromechanics, Including the Second Frank L. DiMaggio Symposium/ Edited by: Hoe I. Ling, Andrew Smyth, and Raimondo Betti. – Columbia University, New York, June 8-10, 2009. – 1179 p.

[2] Poromechanics VI : proceedings of the sixth Biot Conference on Poromechanics / Edited by Matthieu Vandamme; Patrick Dangla; Jean-Michel Pereira; and Siavash Ghabezloo. – Reston, Virginia : American Society of Civil Engineers, 2017.

[3] Антонцев, С.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей / С.Н. Антонцев, А.В. Кажихов, В.Н. Монахов. – Новосибирск: Наука, 1983. – 316 с.

число работ (см. например [4]). Вопросам обоснования начально-краевых задач двухфазной фильтрации в недеформируемой пористой среде также посвящены работы [5], [6], [7].

Концепция Терцаги эффективного напряжения для одномерной модели деформации пористой среды является одним из первых инструментов построения моделей пороупругих сред, в которых учитывается подвижность скелета и его пороупругие свойства. В данном подходе эффективное напряжение определяется как разница между общим напряжением и давлением жидкой фазы [8], [9]. Это положение отражает тот факт, что жидкость несет на себе часть нагрузки. В этом подходе основополагающей является связь между деформацией скелета твердой матрицы и процессами течения жидкости. В дальнейшем теория Терцаги была развита Био [10], который представил совместную модель деформирования насыщенной флюидом пористой среды и явился основоположником теории пороупругости. Практически одновременно и независимо близкая теория была развита Френкелем [11]. Позднее аналогичные модели были предложены в работах В.Н. Николаевского [12], П.П. Золотарева [13], и Х.А. Рахматуллина [14].

В работе [15] пористость зависела от давления (но деформация пористо-

[4]Коновалов, А. Н. О некоторых вопросах, возникающих при численном решении задач фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости / А. Н. Коновалов // Тр. МИАН СССР. — 1973. — Том 122. – С. 3–23.

[5]Алексеев, Г.В. О разрешимости первой краевой задачи для уравнений одномерной фильтрации двухфазной жидкости / Г.В. Алексеев, Н.В. Хуснутдинова // Докл. АН СССР. – 1972. – Т.203. – N. 2. – С. 310 - 312.

[6]Доманский, А. В. О некоторых краевых задачах фильтрации несмешивающихся жидкостей / А.В. Доманский // Математические модели фильтрации и их приложения: Сб. науч. тр. / СО РАН. Ин-т гидродинамики.— 1999. – С. 78-88.

[7]Кружков, С. Н. Краевые задачи для систем уравнений типа двухфазной фильтрации; постановка задач, вопросы разрешимости, обоснование приближенных методов / С. Н. Кружков, С. М. Сукорянский // Матем. сб. — 1977. — Том 104(146), номер 1(9). – С. 69–88.

[8]Terzaghi, K. Die Berechnung der DurchlaËssigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der hydrodynamischen Spannungserscheinungen / K. Terzaghi // Sitzungsber. Akad. Wis. Wien, Math. Nat. Klasse, Abt. IIa. – 1923. — Vol. 132. – P. 125–138.

[9]Terzaghi, K. Theoretical Soil Mechanics / K. Terzaghi. – New York: Jhon Wiley, 1943. – 528 p.

[10]Biot, M. A. General theory of three-dimensional consolidation / M. A. Biot // J. Appl. Phys. — 1941. — Vol.12, no. 2. – P. 155-164.

[11]Френкель, Я.И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве / Я. И. Френкель // Изв. Акад. Наук СССР. — 1944. — Т. VIII, №. 4. – С. 133—146.

[12]Николаевский, В.Н. О распространении продольных волн в насыщенных жидкостью упругих пористых средах / В.Н. Николаевский // Инженерный журнал. — 1963. — Т. III, вып. 2.

[13]Золотарев, П.П. Распространение звуковых волн в насыщенной газом пористой среде с жестким скелетом / П.П. Золотарев // Инженерный журнал. — 1964. — Т. IV. – С. 111-120.

[14]Рахматулин, Х. А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред / Х. А. Рахматулин // ПММ. — 1956. — Т. XX, вып. 2. – С. 184-195.

[15]Бочаров, О.Б. О фильтрации двух несмешивающихся жидкостей в сжимаемом пласте / О.Б. Бочаров

го скелета не рассматривалась). В работе [16] предложена модель двухфазной фильтрации в деформируемой пористой среде, в которой движение твердого скелета описывалось на основе аналога принципа Терцаги и модифицированного линейного закона Гука. Вопросы обоснования в этой работе не рассматривались. Это было сделано в работах [17], [18], где были построены частные решения.

Все эти модели являются весьма сложными как с теоретической точки зрения, так и в отношении их использования для решения конкретных прикладных задач. На сегодняшний день существуют единичные работы, посвященные обоснованию моделей фильтрации в деформируемых пористых средах. Выполненные в этом направлении математические работы основаны, как правило, на классической теории фильтрации, а вопросы обоснования исследованы только в отдельных модельных случаях. Строгие математические результаты в области фильтрации в деформируемых пористых средах представлены только в нескольких работах, посвященных проблемам существования и единственности решений таких задач. Так, например, в работах [19], [20], [21] на основе ряда упрощающих предположений исходные системы сводились к одному уравнению высокого порядка. В [19] установлена локальная разрешимость задачи Коши в пространствах С.Л.Соболева. В работах [20],[21] исследованы решения типа "простой волны". Численные исследования такого рода задач проведены, например, в работе [22].

// Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. — 1981. — Вып. 50. – С. 15-36.

[16] Vedernikov, V. V. Mechanics equations for porous medium saturated by a two-phase liquid / V. V. Vedernikov, V. N. Nikolaevskii // Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Mekhanika Zhidkosti i Gaza. — 1978. — No. 5. – P. 769–773.

[17] Бочаров, О.Б. Простейшие модели деформирования пороупругой среды, насыщенной флюидами / О.Б. Бочаров, В.Я. Рудяк, А.В. Серяков // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 2014. — № 2. – С. 54–68.

[18] Rudyak, V.Ya. Hierarchical sequence of models and deformation peculiarities of porous media saturated with fluids / V.Ya. Rudyak, O.B. Bocharov, A. V. Seryakov // Proceedings of the XLI Summer School-Conference Advanced Problems in Mechanics (APM-2013), 1-6 July , St-Petersburg. – 2013. – P. 183-190.

[19] Simpson, M. Degenerate dispersive equations arising in the study of magma dynamics / M. Simpson, M. Spiegelman, M.I. Weinstein // Nonlinearity. — 2007 — V.20.

[20] Abourabia, A.M. Analytical solutions of the magma equations for rocks in a grnular matrix / A. M. Abourabia, K. M. Hassan, A. M. Morad // Chaos Solutions Fract. — 2009. — Vol. 42.

[21] Geng, Y. Bifurcations of traveling wave solutions for the magma equation / Y. Geng, L. Zhang // Applied Mathematics and computation. — 2010. — Vol.217. – P. 1741-1748.

[22] Saad, A. S. Numerical study of compositional compressible degenerate two-phase flow in saturated–unsaturated heterogeneous porous media / A. S. Saad, B. Saad, M. Saad // Computers and Mathematics with Applications – 2016. – Vol. 71, Issue 2. – P. 565-584.

Цели и задачи исследования

Целью работы является математическое исследование проблемы разрешимости начально-краевых задач для систем уравнений фильтрации жидкости в пороупругих средах и исследование свойств существующего решения.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются новыми, подтверждены полными доказательствами, представляют научный интерес.

Теоретическая и практическая значимость

Полученные результаты носят теоретический характер и представляют интерес для специалистов в области дифференциальных уравнений. Они могут служить обоснованием численных методов решения начально-краевых задач для уравнений движения жидкостей в пороупругих средах.

Методология и методы исследования

Для реализации задач, поставленных в диссертации, были использованы методы функционального анализа, а именно теоремы о неподвижной точке, методы дифференциальных уравнений и уравнений математической физики, а также теория вырождающихся на решении параболических уравнений, в частности, метод интегральных энергетических оценок, для доказательства свойства конечной скорости распространения возмущений и конечного времени стабилизации решения, аппарат механики сплошных сред для формулирования математической постановки задачи.

Положения, выносимые на защиту

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Алтайский государственный университет». На защиту выносятся следующие результаты:

– доказательство локальной по времени однозначной разрешимости в гладких классах задачи о нестационарном изотермическом одномерном движении вязкой сжимаемой жидкости в вязкой пористой среде;

– доказательство глобальной разрешимости в гладких классах задачи о нестационарном изотермическом одномерном движении вязкой несжимаемой жидкости в вязкой пористой среде;

– свойство конечного времени стабилизации решения задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости в упругой пористой среде, а также свойство конечной скорости распространения возмущений;

– доказательство существования автомодельного решения задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости в вязкоупругой пористой среде;

– решение в квадратурах для двумерной линеаризованной задачи о движении несжимаемой вязкой жидкости в вязкоупругой пористой среде.

Степень достоверности и апробация результатов

Обоснованность и достоверность научных положений, выводов и рекомендаций достигается: использованием общих методов решения эволюционных краевых задач, изложенных, например, в монографиях О. А. Ладыженской, Ж. - Л. Лионса, С. Н. Антонцева, А. В. Кажихова, В. Н. Монахова; при доказательстве теорем существования основные усилия сосредоточены на получении априорных оценок, на основе которых, с помощью известных теорем из анализа, показывается разрешимость задач, а также методом локальных энергетических оценок доказана конечная скорость распространения возмущений, локализация решений задач; формулировка результатов работы в виде математических теорем, которые сопровождаются строгими доказательствами.

Основные результаты работы докладывались

– на семинарах кафедры дифференциальных уравнений Алтайского государственного университета (руководитель семинара: доктор физ.-мат. наук, заведующий кафедрой А. А. Папин);

– на семинаре Алтайского государственного университета "Задачи индустриальной и прикладной математики"(руководитель семинара: доктор физ.-мат. наук, заведующий кафедрой А. А. Папин);

– на семинаре института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН "Прикладная гидродинамика"(руководитель семинара: чл.-корр. РАН, профессор В.В. Пухначев);

– на семинаре "Обратные задачи"кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Института математики и фундаментальной информатики СФУ (руководитель семинара: доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой Ю.Я. Белов);

– на семинаре "Математические модели механики сплошных сред"института гидродинамики им. М. А. Лавреньтьева СО РАН (руководители семинара: чл.-корр. РАН, профессор П. И. Плотников и доктор физ.-мат. наук В. Н. Старовойтов);

– на семинаре "Теоретические и вычислительные проблемы задач математической физики"института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (руководитель семинара: доктор физ.-мат. наук, профессор А. М. Блохин); а также на следующих научных конференциях:

– международная научная студенческая конференция "Студент и научно-технический прогресс"(Новосибирск, 2010,2011);

– международная школа-семинар "Ломоносовские чтения на Алтае"(Барнаул, 2010, 2011, 2012, 2014, 2015, 2016);

– всероссийская конференция с участием зарубежных ученых "Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения"(Бийск, 2011, 2014, Барнаул 2017);

– всероссийская конференция "Полярная механика-2012" (Новосибирск, 2012)

– 4th Spring School "Analytical and Numerical Aspects of Evolution Equations"(Bielefeld, 2012);

– VIII международная конференция, посвященная 115-летию со дня рождения академика Михаила Алексеевича Лаврентьева "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике"(Новосибирск, 2015);

– всероссийская конференция "Нелинейные волны: теория и новые приложения" , посвященная 70-летию со дня рождения чл.-корр. РАН В.М. Тешукова, (Новосибирск, 2016);

– международная школа-конференция "Соболевские чтения"(Новосибирск, 2016).

Основные результаты диссертации опубликованы в 24 печатных изданиях, 12 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [1-12], 12 - в сборниках материалов и тезисах докладов работы, индексируемых РИНЦ.

Личный вклад

Постановка задач исследования осуществлялась совместно с научным руководителем. Все основные теоретические и практические исследования проведены автором работы самостоятельно.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и библиографического списка, включающего 88 наименований. Объем диссертации составляет 104 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность задачи фильтрации жидкости в пороупругих средах, дается обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируются цели и задачи работы, а также ее научная новизна и практическая значимость, представлены основные положения, выносимые на защиту, обоснована достоверность результатов и описан личный вклад автора работы. В конце приводится структура диссертации и кратко излагается ее содержание. Также во введении приведены определяющие уравнения модели, которые при отсутствии фазовых переходов имеют вид

$$\tfrac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t} + div((1-\phi)\rho_s\vec{v}_s) = 0, \quad \tfrac{\partial(\rho_f\phi)}{\partial t} + div(\rho_f\phi\vec{v}_f) = 0, \tag{1}$$

$$\phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -k(\phi)(\nabla p_f + \rho_f\vec{g}), \tag{2}$$

$$\nabla\cdot\vec{v}_s = -a_1(\phi)p_e - a_2(\phi)(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{v}_s\cdot\nabla p_e), \tag{3}$$

$$\nabla\cdot\sigma + \rho_{tot}\vec{g} = 0, \quad \rho_{tot} = \phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s, \tag{4}$$

$$p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi)p_s, \quad p_e = (1-\phi)(p_s - p_f). \tag{5}$$

Данная квазилинейная система составного типа описывает пространственное нестационарное изотермическое движение сжимаемой жидкости в вязкоупругой пористой среде. В основе математической модели лежат уравнения сохранения массы для каждой фазы, закон Дарси для жидкой фазы, учитывающий движение твердого скелета, реологическое соотношение, описывающее вязкоупругие свойства среды, закон сохранения импульса системы в целом. Здесь $\rho_f, \rho_s, \vec{v}_s, \vec{v}_f$ – соответственно истинные плотности и скорости фаз; ϕ – пористость; $\sigma = (1-\phi)(2\eta\dot{\varepsilon}_D - p_sI) - \phi p_f I$ – тензор напряжений двухфазной среды, $\dot{\varepsilon}_D$ – тензор скоростей деформации твердой фазы, η – динамическая вязкость твердой фазы; $\vec{g} = (0, 0, -g)$ – плотность массовых сил; $k(\phi)$ – коэффициент фильтрации; $a_1(\phi), a_2(\phi)$ – параметры пороупругой среды; p_f, p_s – давления жидкой и твердой фаз соответственно; p_{tot} – общее давление; p_e – эффективное давление, ρ_{tot} – общая плотность. Задача записана в эйлеровых координатах (x_1, x_2, x_3, t). Истинная плотность горной породы ρ_s принимается постоянной. Система (1)–(5) является замкнутой, если $p_f = p_f(\rho_f)$ или $\rho_f = const$. В общем случае искомыми являются величины ϕ, ρ_f, v_s, v_f, p_f, p_s.

Численные исследования различных начально-краевых задач для системы уравнений (1)–(5) проводились в работах [23], [24], [25]. Вопросы обоснования модели в данных работах не рассматривались.

В **первой главе** рассматривается одномерная задача о неизотермическом движении жидкости в пороупругой среде:

$$\frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}((1-\phi)\rho_s v_s) = 0, \quad \frac{\partial(\rho_f \phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_f \phi v_f) = 0, \tag{6}$$

$$\phi(v_f - v_s) = -k(\phi)(\frac{\partial p_f}{\partial x} - \rho_f g), \tag{7}$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial x} = -a_1(\phi) p_e, \quad p_e = p_{tot} - p_f = (1-\phi)(p_s - p_f), \tag{8}$$

$$\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2\eta(1-\phi)\frac{\partial v_s}{\partial x}\right) - \rho_{tot} g, \quad \rho_{tot} = \phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s, \tag{9}$$

решаемая в области $(x,t) \in Q_T = \Omega \times (0,T)$, $\Omega = (0,1)$, при краевых и начальных условиях

$$\begin{gathered} v_s\,|_{x=0,x=1} = v_f\,|_{x=0,x=1} = 0, \quad p_{tot}\,|_{x=0} = p^0(t), \\ \phi\,|_{t=0} = \phi^0(x), \quad \rho_f\,|_{t=0} = \rho^0(x). \end{gathered} \tag{10}$$

Основной результат первых трех параграфов можно сформулировать в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть данные задачи (6)–(10) подчиняются следующим условиям: 1. функции $k(\phi), a_1(\phi), p_f(\rho_f)$ и их производные до второго порядка непрерывны для $\phi \in (0,1), \rho_f > 0$, и удовлетворяют условиям*

$$k_0^{-1}\phi^{q_1}(1-\phi)^{q_2} \le k(\phi) \le k_0\phi^{q_3}(1-\phi)^{q_4}, \quad a_1(\phi) = a_0(\phi)\phi^{\alpha_1}(1-\phi)^{\alpha_2-1},$$

$$0 < R_1 \le a_0(\phi) \le R_2, \quad k_0^{-1}\rho_f^{q_5} \le p_f(\rho_f) \le k_0\rho_f^{q_6}, \quad k_0^{-1}\rho_f^{q_7} \le \frac{dp_f(\rho_f)}{d\rho_f} \le k_0\rho_f^{q_8},$$

[23]Connolly, J. A. D. Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock / J. A. D. Connolly, Y. Y. Podladchikov // Geodin. Acta. – 1998. – Vol. 11. – P. 55–84.

[24]Morency, C. A numerical model for coupled fluid flow and matrix deformation with applications to disequilibrium compaction and delta stability / C. Morency, R. S. Huismans, C. Beaumont, P. Fullsack // Journal of Geophysical Research. – 2007. – Vol. 112.

[25]Yang, X. S. Nonlinear viscoelastic compaction in sedimentary basins / X. S. Yang // Nonlinear Proceeses in Geophysics. – 2000. – Vol. 7. – P. 1-7.

где $k_0, \alpha_i, R_i, i = 1,2$ *– положительные постоянные,* $q_1, ..., q_8$ *– фиксированные вещественные числа; 2. начальные условия* ϕ^0, ρ^0 *и функция* g *удовлетворяют следующим условиям гладкости:* $g \in C^{1+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{Q}_T)$, $\phi^0 \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, $\rho^0 \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ *и условиям согласования*

$$((1-\phi^0)\frac{dp_f(\rho^0)}{dx} - \rho^0 g(x,0)) \mid_{x=0,x=1} = 0,$$

а также удовлетворяют неравенствам

$$0 < m_0 \le \phi^0(x) \le M_0 < 1, \quad 0 < m_1 \le \rho^0(x) \le M_1 < \infty,$$

$$0 < g(x,t) \le g_0 < \infty, \quad x \in \overline{\Omega},$$

где m_0, M_0, m_1, M_1, g_0 *– известные положительные постоянные. Тогда задача* (6) – (10) *имеет единственное локальное классическое решение, т.е. существует значение* t_0 *такое, что*

$$v_s(x,t) \in C^{3+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_{t_0}), \quad v_f(x,t) \in C^{1+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_{t_0}),$$

$$(\phi(x,t), p_s(x,t), p_f(x,t), \rho_f(x,t)) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_{t_0}).$$

Более того, $0 < \phi(x,t) < 1$, $\rho_f(x,t) > 0$ *в* $\overline{Q}_{t_0}$.

Доказательство для простоты изложения разбито на части. В параграфе 1.1 доказана теорема существования и единственности решения в отсутствие силы тяжести и девиатора тензора напряжений. В параграфе 1.2 доказана аналогичная теорема в присутствии силы тяжести и при линейной зависимости давления жидкой фазы от плотности. В случае полного уравнения импульса системы в параграфе 1.3 доказана теорема существования и единственности задачи в гельдеровских классах.

В предположении постоянства плотности жидкой фазы и при наличии силы тяжести для системы (6)–(9) с начально-краевыми условиями (10) имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть данные задачи* (6)–(10) *подчиняются следующим условиям: 1. функции* $k(\phi), a_1(\phi)$ *и их производные до второго порядка непрерывны для* $\phi \in (0,1)$, *и удовлетворяют условиям*

$$k_0^{-1}\phi^{q_1}(1-\phi)^{q_2} \le k(\phi) \le k_0\phi^{q_3}(1-\phi)^{q_4},$$

$$a_1(\phi) = a_0(\phi)\phi^{\alpha_1}(1-\phi)^{\alpha_2-1}, \quad 0 < R_1 \le a_0(\phi) \le R_2,$$

где $k_0, \alpha_i, R_i, i = 1, 2$ *– положительные постоянные, 2. функция* g, *начальная функция* ϕ^0 *и граничная функция* p^0 *удовлетворяют следующим условиям гладкости*

$$g \in C^{1+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{Q}_T), \quad \phi^0 \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_T) \quad p^0 \in C^{1+\alpha}(0,T),$$

а также функции ϕ^0 *и* g *удовлетворяют неравенствам*

$$0 < m_0 \leq \phi^0(x) \leq M_0 < 1, \quad |g(x,t)| \leq g_0 < \infty, \quad x \in \bar{\Omega},$$

где m_0, M_0, g_0 *– известные положительные константы. Тогда задача* (6)–(10) *имеет единственное локальное решение, т.е. существует значение* t_0 *такое, что* $(\phi(x,t), v_f(x,t), v_s(x,t)) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_{t_0}), (p_s(x,t), p_f(x,t)) \in C^{1+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_{t_0})$. *Более того,* $0 < \phi(x,t) < 1$ *в* $\overline{Q}_{t_0}$.

При дополнительном ограничении на функции, характеризующие свойства пороупругой среды, доказывается разрешимость "в целом".

Теорема 3. *Пусть дополнительно к условиям теоремы 2 выполнены следующие условия:*

$$k(\phi) = \frac{k}{\mu}\phi^n, \quad a_1(\phi) = \frac{\phi^{-m}}{\eta}, \quad n \geq 1, m \geq 1, \quad (k,\mu) = const > 0.$$

Тогда для всех $t \in [0,T]$ *существует единственное решение задачи* (6)–(10), *причем существуют числа* $0 < m_1 < M_1 < 1$ *такие, что* $m_1 \leq \phi(x,t) \leq M_1, (x,t) \in Q_T$.

В **главе 2** изучены свойства решений системы уравнений одномерной задачи фильтрации вязкой несжимаемой жидкости в упругой пористой среде:

$$\tfrac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t} + \tfrac{\partial}{\partial x}((1-\phi)\rho_s v_s) = 0, \quad \tfrac{\partial(\rho_f\phi)}{\partial t} + \tfrac{\partial}{\partial x}(\rho_f \phi v_f) = 0,$$

$$\phi(v_f - v_s) = -\frac{k}{\mu}\phi^n(\frac{\partial p_f}{\partial x} - \rho_f g), \quad \frac{\partial v_s}{\partial x} = -\beta_\phi \phi^b \left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + v_s \frac{\partial p_e}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = -\rho_{tot} g, \quad p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi)p_s, \quad p_e = p_{tot} - p_f, \quad \rho_{tot} = (1-\phi)\rho_s + \phi\rho_f.$$

Данная система уравнений в переменных Лагранжа сводится к одному уравнению для функции $s = \phi/(1-\phi)$:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(d(s)\frac{\partial s}{\partial x}\right) + \frac{\partial f(s)}{\partial x}, \qquad (11)$$

причем предполагается, что существуют положительные постоянные M, δ_1, δ_2 такие, что справедливы следующие оценки (в дальнейшем считаем, что $0 < n - b \leq 2, \quad n + b - 2 > 0$):

$$0 \leq s \leq M < \infty, \quad |\frac{dp_e^0(x)}{dx}| \leq \delta_1 < \infty, \quad \beta_\phi|\frac{dG^0(x)}{dx}| \leq \delta_2 < \infty,$$

$$\nu_1 s^{n-b} \leq d(s) \leq \nu_2 s^{n-b}, \quad \nu_1 = \frac{k}{\mu\beta_\phi}(1+M)^{b-n-2}, \quad \nu_2 = \frac{k}{\mu\beta_\phi},$$

$$|f(s)| \leq \nu_3 s^n, \quad \nu_3 = \frac{k}{\mu}\left(g(\rho_s + (1+2M)\rho_f) + \delta_1 + \frac{\delta_2}{\beta_\phi}\right), \quad g \geq 0.$$

Определение 1. *Неотрицательная ограниченная измеримая функция $s(x,t)$ $(0 \leq s(x,t) \leq M)$, определенная в $\Omega \times (0,\infty)$, есть слабое решение уравнения (11) с начальным условием $s_0(x)$, если для любого $T > 0$ и любого открытого подмножества $\Omega_1 \subset R^1$ выполняются следующие предположения*

$$s \in L_\infty(0,T,W_2^1(\Omega)), \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(s^{n-b+1}\right) \in L_2[(0,T)\times\Omega_1], \tag{12}$$

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_{\Omega_1} s dx = \int\limits_{\Omega_1} s_0 dx \tag{13}$$

и для $\forall\varphi(x,t) \in \overset{o}{C}{}^\infty((0,T)\times\Omega_1)$

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_\Omega\left[d(s)\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial f(s)}{\partial x}\,\varphi\right]dx\,dt = \int\limits_0^\infty\int\limits_\Omega s\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dx\,dt + \int\limits_\Omega s(x,0)\,\varphi(x,0)\,dx. \tag{14}$$

При $s = 0$ уравнение (11) вырождается. Вопросы существования соответствующего решения освещены, например, в работе [26].

В параграфе 2.1 методом интегральных энергетических оценок, развитым в работах [27], [28], установлено свойство конечной скорости распространения

[26]Калашников, А.С. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка / А.С. Калашников // Успехи математичсеких наук. – 1987. – Т. 42, вып. 2(254). – С. 135–176.

[27]Antontsev, S.N. Energy Methods for Free Boundary Problems. Applications to Nonlinear PDEs and Fluid Mechanics. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications / S. N. Antontsev, J. I. Diaz, S. Shmarev. – Washington D.C., 2002. – 331 p.

[28]Антонцев, С.Н. Локализация решений вырождающихся уравнений механики сплошной среды / С.Н. Антонцев. – Новосибирск: ИГиЛ СО АН СССР, 1986. – 108 с.

возмущений. Положим:

$$K_\rho(x_0) = \{(x, x_0) : |x - x_0| \le \rho\}, \quad B(\rho, t) \equiv \int\limits_{K_\rho(x_0)} s^{n-b} \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 dx,$$

$$w(\rho_0, t) = \sup_{0 \le \tau \le t} \int\limits_0^\tau B(\rho_0, s) ds.$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (12) – (14) *и дополнительно* $t \in [0, T], \quad T \le T^*$, *где*

$$T^* \le min\left(M^{2-b-n}\left(\frac{min(1, \nu_1)}{n\nu_3}\right)^2, \left(\frac{(2\theta - 1)(\rho_0^{1+2\delta} - \rho^{1+2\delta})}{(2\delta + 1)4(\nu_2 K_i)^2} w^{1-2\theta}(\rho_0, t)\right)^{\frac{1}{1-\theta}}\right),$$

$$i = 1, 2, \quad \theta = \frac{2}{2 + r}, \quad \delta = \frac{1}{\theta r}.$$

Если $s(x, t)$ – *слабое решение* (11) *и* $s_0(x) = 0$ *в* $K_{\rho_0}(x_0)$, $0 < \rho_0 < dist(x_0, \partial G)$, *то* $s(x, t) = 0$ *почти всюду в* $K_{\rho_1(t)}(x_0)$ *при* $0 \le t \le T \le T^*$. *Причем*

$$\rho_1(t) = \left({\rho_0}^{1+2\delta} - L\, t^{1-\theta} (w(\rho_0, t))^{2\theta - 1}\right)^{\frac{1}{1+2\delta}},$$

где при $0 < n - b < 2$

$$L = 4C_1^2 \cdot Q(r), \quad r \in (1, 2), \quad C_1 = CM^{\frac{(r\sigma-2)(1-\theta)}{2}} \max(\sigma, M^{\frac{r\sigma-2}{r}}),$$

а при $n - b = 2$

$$L = 4C_2^2 \cdot Q(r), \quad r = \frac{4}{n - b + 2} = 1, \quad C_2 = 2C,$$

где C– *положительная постоянная, не зависящая от радиуса* ρ. *В обоих случаях здесь*

$$Q(r) = \frac{2\delta + 1}{2\theta - 1}\left(\frac{1}{2}\rho_0^\delta + T^{\frac{1}{2}} M^{2(\delta-1)} \rho_0^{\delta-1}\right)^{2\theta} \nu_2^2,$$

$$K_i = C_i(\frac{1}{2}{\rho_0}^\delta + T^{\frac{1}{2}} \rho_0^{\delta-1}\, M^{2(\delta-1)})^\theta, \quad i = 1, 2.$$

В параграфе 2.2 установлено свойство метастабильной локализации.

Теорема 5. *Пусть дополнительно к условиям теоремы 4 выполнены следующие условия*

$$\int_0^t \int_{K_\rho(x_0)} s^{n-b} \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 dx d\tau \le C_0,$$

$$\int_{K_\rho(x_0)} s_0^2(x) dx \le K_3 \Big(\rho - \rho_0\Big)^{\frac{2+r}{2-r}}, \quad \forall \rho \in (\rho_0, R).$$

Тогда существует T_0*, зависящее от данных задачи, такое, что* $s(x,t) = 0$ *при почти всех* $x \in K_{\rho_0}(x_0)$*, и* $t \in [0, T_0]$.

Конечное время стабилизации решения получено в параграфе 2.3.

Теорема 6. *Пусть* s *– обобщенное решение уравнения* (11) *с начальным условием* $s(x,0) = s_0(x)$*, и выполнены условия*

$$0 < n < b, \quad 2 - n \le b < 2 + n, \quad 0 \le s \le M < \infty,$$

$$0 < \beta_\phi < \frac{\delta_2}{\delta_1 + g(\rho_s + \rho_f(1+2M))},$$

$$0 < \delta_2 < (n-b+2)^{-1} n^{-1} \beta^{-1/\alpha} M^{1-b} (1+M)^{b-n-2} (mes\Omega)^{(n-b)/4},$$

$$\beta = \left(\frac{3}{2}\right)^\alpha, \quad \alpha = (\frac{1}{r} - \frac{n-b+2}{4})(\frac{1}{2} + \frac{1}{r})^{-1}, r \ge 1.$$

Тогда существует конечное время t_0 *такое, что* $s(x,t) = 0, x \in \Omega, t \ge t_0$.

В **третьей главе** исследуется система уравнений фильтрации вязкой жидкости в вязкоупругой деформируемой пористой среде. В параграфе 3.1 доказана глобальная по времени теорема существования и единственности автомодельного решения задачи

$$\frac{d}{d\xi}\left((1-\phi)v_s - c(1-\phi)\right) = 0, \quad \frac{d}{d\xi}\left(\phi v_f - c\phi\right) = 0, \tag{15}$$

$$\phi(v_f - v_s) = \frac{k\phi^n}{\mu}\frac{dp_e}{d\xi}, \quad \frac{dv_s}{d\xi} = -\frac{\phi^m}{\eta} p_e + (c - v_s)\phi^b \beta_\phi \frac{dp_e}{d\xi}, \tag{16}$$

$$p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi) p_s; \quad p_e = (1-\phi)(p_s - p_f). \tag{17}$$

$$\begin{gathered} v_s(0) = v_s^0, \quad v_f(0) = v_f^0, \quad \phi(0) = \phi^0, \\ \lim_{\xi\to\infty} v_s(\xi) = u^+, \quad \lim_{\xi\to\infty} v_f(\xi) = u^+, \quad \lim_{\xi\to\infty} \phi(\xi) = \phi^+, \end{gathered} \tag{18}$$

где $\xi = x - ct$, c – постоянный параметр, v_s^0, v_f^0, ϕ^0, ϕ^+ – заданные постоянные, удовлетворяющие условиям: $\phi^0 \neq \phi^+$, $v_s^0 \neq v_f^0$.

Теорема 7. *Пусть выполнены следующие условия:* $g = 0, \phi^0 \neq \phi^+$, $(\phi^0, \phi^+) \in (0,1)$. *Тогда существует единственное классическое автомодельное решение* $(\phi(\xi), v_i(\xi), p(\xi)), i = s, f$ *задачи* (15)–(18).

В параграфе 3.2 рассмотрена задача фильтрации в тонком пороупругом слое. В области $\Omega = (x,z) = [0,L] \times [0,H]$ рассматривается следующая система уравнений составного типа

$$\tfrac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + div((1-\phi)\vec{v}_s) = 0, \quad \tfrac{\partial\phi}{\partial t} + div(\phi\vec{v}_f) = 0, \tag{19}$$

$$\phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -K(\phi)(\nabla p_f + \rho_f \vec{g}), \tag{20}$$

$$div\vec{v}_s = -a_1(\phi)p_e - a_2(\phi)\frac{dp_e}{dt}, \tag{21}$$

$$\rho_{tot}\vec{g} + div\left((1-\phi)\nu\left(\frac{\partial\vec{v}_s}{\partial\vec{x}} + \left(\frac{\partial\vec{v}_s}{\partial\vec{x}}\right)^*\right)\right) - \nabla p_{tot} = 0, \tag{22}$$

$$p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi)p_s, p_e = (1-\phi)(p_s - p_f), \rho_{tot} = \phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s. \tag{23}$$

В процессе обезразмеривания исходной системы уравнений вводится малый параметр ε следующим образом: $\bar{x}, \bar{z}, \bar{t}$ – безразмерные переменные, определенные равенствами

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{z} = \frac{z}{H}, \quad \bar{t} = \varepsilon^k \tau_0 t, \quad \varepsilon = \frac{H}{L} \ll 1,$$

где $[L] = [H] =$ [м], $[\tau_0] = [1/\text{с}]$, k – произвольное вещественное число. После предельного перехода по параметру $\varepsilon \to 0$ $(k = 2)$ возникает система уравнений вида

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial\bar{t}} + div((1-\phi)\bar{v}_s) = 0, \quad \frac{\partial\phi}{\partial\bar{t}} + div(\phi\bar{v}_f) = 0, \tag{24}$$

$$\bar{v}_s^1 = \bar{v}_f^1, \tag{25}$$

$$\frac{\tau_0 L^2}{k_0\alpha}\phi(\bar{v}_f^2 - \bar{v}_s^2) = -\bar{K}(\phi)(\frac{\partial\bar{p}_f}{\partial\bar{z}} - \bar{\rho}_f\bar{g}), \tag{26}$$

$$\frac{1}{a^2\alpha(1-\phi)}\frac{d\phi}{d\bar{t}} = -\bar{a}_2(\phi)\frac{d(\bar{p}_{tot} - \bar{p}_f)}{dt}, \tag{27}$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar{v}_s^1}{\partial\bar{z}}\right) = 0, \tag{28}$$

$$2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left((1-\phi)\frac{\partial \bar{v}_s^2}{\partial \bar{z}}\right)+\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left((1-\phi)\frac{\partial \bar{v}_s^1}{\partial \bar{z}}\right)=0. \qquad (29)$$

Для системы уравнений (24)–(29) построены решения в квадратурах.

В пункте 3.3 рассмотрен пример моделирования тающего ледового покрова на основе модели движения вязкой жидкости в вязкоупругой пористой среде с учетом фазовых переходов. Данный процесс описывается системой уравнений (19)–(23), с учетом интенсивности фазовых переходов в уравнениях сохранения массы.

В **заключении** приведены основные результаты работы:

1. Для задачи о нестационарном изотермическом одномерном движении вязкой сжимаемой жидкости в вязкой пористой среде доказана локальная по времени однозначная разрешимость в пространствах Гельдера.

2. Доказана классическая разрешимость "в целом"для задачи о нестационарном изотермическом одномерном движении вязкой несжимаемой жидкости в вязкой пористой среде.

3. Изучены свойства решения задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости в упругой пористой среде. Установлено свойство конечного времени стабилизации решения, а также свойство конечной скорости распространения возмущений.

4. Для задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости в вязкоупругой пористой среде доказано существование автомодельного решения.

5. На основе выделения малого параметра в двумерной задаче о движении несжимаемой вязкой жидкости в вязкоупругой пористой среде построены решения в квадратурах.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Работы, опубликованные автором в ведущих рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК Министерства образования и науки РФ:

1. Papin A.A., Tokareva M.A. On Local Solvability of the System of the Equations of One Dimensional Motion of Magma // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2017. – Vol. 10(3). – P. 385–395.

2. Papin A.A., Tokareva M.A. Correctness of the initial-boundary problem of the compressible fluid filtration in a viscous porous medium // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. – 2017. – Vol. 894.

3. Папин А.А., Токарева М.А. О разрешимости в целом начально-краевой задачи для системы уравнений, описывающей движение магмы // Известия Алтайского государственного университета. – 2017. – Вып. 1 (93). – С. 115–118.

4. Папин А.А., Токарева М.А. Локальная разрешимость в классе непрерывных функций задачи о движении жидкости в деформируемой пористой среде // Известия Алтайского государственного университета. – 2017. – Вып. 4 (96). – С. 136–140.

5. Tokareva M.A. Solvability of initial boundary value problem for the equations of filtration in poroelastic media // Journal of Physics: Conference Series. – 2016. – Vol. 722.

6. Tokareva M.A. Localization of solutions of the equations of filtration in poroelastic media // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2015. – Vol. 8(4). – P. 467–477.

7. Токарева М.А. Конечное время стабилизации решения уравнений фильтрации жидкости в пороупругой среде // Известия Алтайского государственного университета. – 2015. – Вып. 1-2(85). – С. 153-157.

8. Токарева М.А. Двумерная задача фильтрации в тонком пороупругом слое // Известия Алтайского государственного университета. – 2013. – Вып. 1/1 (77). – С. 60-62.

9. Токарева М.А. Об одной модели тающего льда // Известия Алтайского государственного университета. – 2013. – Вып. 1/2 (77). – С. 48-51.

10. Папин А.А., Токарева М.А. Динамика тающего деформируемого снежно-ледового покрова // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. – 2012. – No. 4 (12). – С. 107-113.

11. Папин А.А., Токарева М. А. Задача о движении сжимаемой жидкости в деформируемой горной породе // Известия Алтайского государственного университета. – 2011. – Вып. 1/2 (72). – С. 36-43.

12. Папин А.А., Токарева М.А. Модельная задача о движении сжимаемой жидкости в вязкоупругой горной породе // Известия Алтайского государственного университета. – 2010. – Вып. 1 (65). – С. 35-37.

Подписано в печать 2018 г. Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Печать – цифровая. Усл. печ. л. 2,0.
Тираж 100 экз. Заказ
Отпечатано в типографии АлтГТУ,
656038, Барнаул, проспект Ленина, 46
тел.: (8-3852)36-70-67
Лицензия на полиграфическую деятельность
ПЛД №28-35 от 15.07.97 г.