МИНИСТЕРСВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет математики и информационных технологий
Кафедра дифференциальных уравнений

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Дифференциальные уравнения

Методическое пособие

Барнаул

Издательство
Алтайского государственного
университета
2015

Составитель:
к.ф.-м.н. ***А.В. Устюжанова***

Рецензент:
к.п.н. ***Г.В. Кравченко***

Методическое пособие предназначено студентам I курса физико-технического факультета АлтГУ, обучающимся по направлениям подготовки «Информатика и вычислительная техника», «Информационная безопасность». Издание содержит краткий теоретический материал, примеры и задания для проведения практических занятий.

План УМД 2015, п. 34

ЧАСТЬ I. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1.1. Основные понятия и определения

Обыкновенное дифференциальное уравнение – это уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = f(x)$ и ее производные $y', y'', \ldots, y^{(n)}$. Такое уравнение имеет вид

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Вместо производных дифференциальное уравнение может содержать дифференциалы искомой функции и независимой переменной.

Если искомая функция зависит от двух или большего числа независимых переменных, например, $u = u(x, y)$, то уравнение вида

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x^k \partial y^l}\right) = 0$$

называется *дифференциальным уравнением в частных производных*.

Порядок дифференциального уравнения – это порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.

Решением дифференциального уравнения n-го порядка на интервале (a, b) называется функция $y = \varphi(x)$, определенная и непрерывная со своими производными до n-го порядка включительно, и такая, что ее подстановка в дифференциальное уравнение превращает последнее в тождество по x на (a, b).

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется *интегрированием дифференциального уравнения*.

Общий вид дифференциального уравнения первого порядка

$$F(x, y, y') = 0. \qquad (1.1)$$

Уравнение (1.1), записанное в такой форме, называется *не разрешенным относительно производной*.

Дифференциальным уравнением, разрешенным относительно производной, называется уравнение, которое можно представить в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

где $f(x, y)$ – заданная функция двух переменных, *y* – искомая функция, *x* – независимая переменная.

Дифференциальное уравнение первого порядка можно записать в *симметричной форме*

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

В данное уравнение обе переменные *x* и *y* входят равноправно и любую из них можно принять за независимую переменную.

Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется непрерывно дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке обращает это уравнение в тождество.

Соотношение $\Phi(x, y) = 0$ называется *решением* дифференциального уравнения (1) *в неявной форме* (или *интегралом* уравнения (1.1)), если оно определяет $y = \varphi(x)$ как неявную функцию от *x*, которая является решением уравнения (1.1).

Общим решением дифференциального уравнения (1.1) называется *множество всех его частных решений без исключения*. Общее решение является однопараметрическим семейством функций $y = \varphi(x, C)$, зависящих от *x* и произвольной постоянной *C*, которые удовлетворяют уравнению (1.1) при любых допустимых значениях постоянной *C*.

Соотношение $\Phi(x, y, C) = 0$, где *C* – произвольная постоянная, называется *общим решением* дифференциального уравнения (1.1) *в неявной форме* (или *общим интегралом* уравнения (1.1)), если оно определяет неявным образом все частные решения уравнения (1.1) без исключения.

Дифференциальное уравнение называется *интегрируемым в квадратурах*, если его общее решение (общий интеграл) может быть получено в результате конечной последовательности арифметических действий и интегрирований элементарных функций.

Задачей Коши называется задача нахождения решения $y = \varphi(x)$ уравнения (1.1), удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Теорема о существовании и единственности решения. *Если в уравнении*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.2}$$

функция $f(x, y)$ *непрерывна на прямоугольнике D*:

$$x_0 - a \le x \le x_0 + a, \ y_0 - b \le y \le y_0 + b,$$

и удовлетворяет в D условию Липшица:

$$| f(x, y_1) - f(x, y_2) | \le N | y_1 - y_2 |, \tag{1.3}$$

где N – постоянная Липшица, то на отрезке $x_0 - h \le x \le x_0 + h$ *существует единственное решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* (1.2)*, удовлетворяющее начальному условию* $y(x_0) = y_0$, *где*

$$h < \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N}\right), \ M = \max | f(x, y) | \text{ в } D.$$

Условие Липшица (1.3) может быть заменено несколько более грубым, но обычно легко проверяемым условием существования ограниченной по модулю частной производной $f'_y(x, y)$ в *D*.

При выполнении условий теоремы существования и единственности решение задачи Коши может быть найдено *методом последовательных приближений* как предел при $n \to \infty$ равномерно сходящейся последовательности функций $\{y_n(x)\}$, определяемых рекуррентным соотношением

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt, \qquad y(x_0) = y_0,$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Точки, в окрестности которых решения уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, удовлетворяющего условию $y(x_0) = y_0$, не существует или решение существует, но не единственно, называются *особыми точками*.

Если график некоторого решения сплошь состоит из особых точек, то *решение* называется *особым*.

Теорема о непрерывной зависимости решения от параметра и от начальных значений. *Если правая часть дифференциального уравнения* $y' = f(x, y, \mu)$ *непрерывна по* μ *при* $\mu_0 \le \mu \le \mu_1$ *и удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности, причём постоянная Липшица N не зависит от* μ*, то решение* $y = \varphi(x, \mu)$ *рассматриваемого уравнения, удовлетворяющее начальному условию* $y(x_0) = y_0$*, непрерывно зависит от параметра* μ.

Теорема о существовании и единственности решения для уравнения, не разрешенного относительно производной. *Если в уравнении* (1.1) *в некоторой замкнутой окрестности точки* (x_0, y_0, y_0')*, где* y_0' *– один из действительных корней уравнения* $F(x_0, y_0, y') = 0$*, функция F удовлетворяет условиям*:

1) $F(x, y, y')$ *непрерывна по всем аргументам*;

2) *производная* $\dfrac{\partial F}{\partial y'}$ *существует и отлична от нуля*;

3) *существует ограниченная по модулю производная* $\dfrac{\partial F}{\partial y}$,

$$\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \le N,$$

то на отрезке $x_0 - h \le x \le x_0 + h$*, где h достаточно мало, существует единственное решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* (1.1)*, удовлетворяющее начальному условию* $y(x_0) = y_0$*, для которого* $y'(x_0) = y_0'$.

1.2. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнением с разделяющимися переменными называется дифференциальное уравнение, которое может быть представлено в виде

$$y' = f(x)g(y)$$

или в виде

$$p_1(x)q_1(y)dx + p_2(x)q_2(y)dy = 0. \qquad (1.4)$$

Для нахождения общего решения уравнения (1.4) с разделяющимися переменными надо *разделить переменные*, то есть путем деления обеих частей уравнения на произведение $p_2(x)q_1(y)$ добиться того, чтобы в преобразованном уравнении коэффициент при *dx* являлся бы функцией только от переменной *x*, а коэффициент при *dy* – функцией только от переменной *y*:

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)}dx + \frac{q_2(y)}{q_1(y)}dy = 0. \qquad (1.5)$$

Уравнение вида (1.5) называется *дифференциальным уравнением с разделенными переменными*. Интегрируя, находим общий интеграл

$$\int \frac{p_1(x)}{p_2(x)}dx + \int \frac{q_2(y)}{q_1(y)}dy = C.$$

Необходимо заметить, что деление на $p_2(x)q_1(y)$ может привести к потере частных решений, обращающих в нуль произведение $p_2(x)q_1(y)$.

Уравнение, в котором правая часть представляет собой функцию линейного аргумента:

$$y' = f(ax + by + c),$$

где a и b – постоянные, сводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены искомой переменной $z = ax + by + c$. Вычисляя производную от новой искомой функции $z' = a + by'$ и используя исходное уравнение, получаем:

$$z' = a + bf(z).$$

Отсюда

$$\frac{dz}{a+bf(z)}=dx.$$

Интегрируя, находим общий интеграл:

$$\int\frac{dz}{a+bf(z)}=x+C,$$

в котором осталось сделать обратную замену переменной $z=ax+by+c$.

Пример 1. Решить уравнение $3e^x\operatorname{tg} y\,dx+\dfrac{2-e^x}{\cos^2 y}dy=0$.

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Делим обе части уравнения на произведение $\operatorname{tg} y\cdot(2-e^x)$:

$$\frac{3e^x dx}{2-e^x}+\frac{1}{\operatorname{tg} y\cos^2 y}dy=0.$$

Полученное уравнение – это уравнение с разделенными переменными. Интегрируем его:

$$\int\frac{3e^x dx}{2-e^x}+\int\frac{1}{\operatorname{tg} y\cos^2 y}dy=C_1.$$

Вычислим интегралы

$$\int\frac{3e^x dx}{2-e^x}=-3\int\frac{d(2-e^x)}{2-e^x}=-3\ln|2-e^x|+const,$$

$$\int\frac{1}{\operatorname{tg} y\cos^2 y}dy=\int\frac{d(\operatorname{tg} y)}{\operatorname{tg} y}=\ln|\operatorname{tg} y|+const.$$

Таким образом, получаем

$$-3\ln|2-e^x|+\ln|\operatorname{tg} y|=C_1.$$

После потенцирования будем иметь

$$\left|\frac{\operatorname{tg} y}{(2-e^x)^3}\right| = e^{C_1},$$

откуда

$$\frac{\operatorname{tg} y}{(2-e^x)^3} = \pm e^{C_1}.$$

Обозначая $\pm e^{C_1} = C$, получим общий интеграл данного уравнения

$$\frac{\operatorname{tg} y}{(2-e^x)^3} = C \text{ или } \operatorname{tg} y - C(2-e^x)^3 = 0.$$

При делении на произведение $\operatorname{tg} y \cdot (2-e^x)$ могла произойти потеря решения. Приравниваем нулю каждый множитель

$$\operatorname{tg} y = 0 \text{ и } 2 - e^x = 0,$$

то есть

$$y = k\pi \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \text{ и } x = \ln 2.$$

Непосредственно подставляя в исходное уравнение, убеждаемся, что $y = k\pi$ и $x = \ln 2$ являются решениями этого уравнения. Их можно получит формально из общего интеграла при $C = 0$ и $C = \infty$. Поэтому окончательный ответ можно записать в виде:

$$\operatorname{tg} y - C(2-e^x)^3 = 0. \quad \blacktriangle$$

Пример 2. Найти частное решение уравнения $(1+e^x)yy' = e^x$, удовлетворяющее начальному условию $y\big|_{x=0} = 1$.

Решение. Заменяем в уравнении $y' = \dfrac{dy}{dx}$:

$$(1+e^x)y\frac{dy}{dx} = e^x.$$

Разделяем переменные

$$ydy = \frac{e^x dx}{1+e^x}.$$

Интегрируя, находим общий интеграл

$$\frac{y^2}{2} = \ln(1+e^x) + C. \qquad (1.6)$$

Используем начальное условие $y\big|_{x=0} = 1$. Полагая в (1.6) $x = 0$ и $y = 1$, получаем

$$\frac{1}{2} = \ln 2 + C.$$

Отсюда находим

$$C = \frac{1}{2} - \ln 2.$$

Подставляем в (1.6) найденное значение C, получаем частное решение

$$\frac{y^2}{2} = \ln(1+e^x) + \frac{1}{2} - \ln 2 \text{ или } y^2 = 1 + \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2.$$

Выражаем y:

$$y = \pm\sqrt{1 + \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2}.$$

Так, из начального условия следует, что $y > 0$, то выбираем

$$y = \sqrt{1 + \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2}.$$

Это и будет искомым частным решением. ▲

Задачи.

Проинтегрировать уравнения.

1. $(1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0$.

2. $(1+y^2)dx+xydy=0$.

3. $y'\sin x-y\cos x=0$, $y\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=1$.

4. $(1+y^2)dx=xdy$.

5. $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$.

6. $x\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0$, $y\big|_{x=0}=1$.

7. $e^{-y}(1+y')=1$.

8. $y\ln ydx+xdy=0$, $y\big|_{x=1}=1$.

9. $e^y(1+x^2)dy-2x(1+e^y)dx=0$.

10. $2x\sqrt{1-y^2}=y'(1+x^2)$.

11. $y^2\sin xdx+\cos^2 x\ln ydy=0$.

12. $y'+\sin(x-y)=\sin(x+y)$, $y\big|_{x=\pi}=\frac{\pi}{2}$.

1.3. Однородные уравнения

Уравнение называется *однородным*, если его можно представить в виде:

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{1.7}$$

или

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0, \tag{1.8}$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – однородные функции одинаковой степени однородности.

Функция $F(x,y)$ называется *однородной степени n*, если для любого значения $\lambda>0$ выполняется тождество:

$$F(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n F(x,y).$$

Однородное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены искомой переменной $u=\frac{y}{x}$ или $y=ux$. Дифференцируя указанную замену по *x*, получаем:

$$y'=u'x+u$$

для первой формы однородного уравнения (1.7) и

$$dy=xdu+udx$$

для второй (1.8). Подставляя найденную производную в исходное уравнение, получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$u'x + u = f(u),$$

или

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, находим общий интеграл:

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \ln|x| + C,$$

в котором осталось сделать обратную замену переменной $u = \dfrac{y}{x}$.

Уравнение с правой частью в виде функции дробно-линейного аргумента

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right),$$

где $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ – постоянные, преобразуется в однородное уравнение с помощью введения новых переменных u и υ по формулам

$$x = u + x_0, \qquad y = \upsilon + y_0, \tag{1.9}$$

где x_0 и y_0 – решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

Так как

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\upsilon}{du},$$

то, подставляя (1.9) в исходное уравнение, получаем уравнение

$$\frac{d\upsilon}{du}=f\left(\frac{a_1u+b_1\upsilon}{a_2u+b_2\upsilon}\right)=f\left(\frac{a_1+b_1\dfrac{\upsilon}{u}}{a_2+b_2\dfrac{\upsilon}{u}}\right),$$

которое является однородным уравнением вида

$$\frac{d\upsilon}{du}=h\left(\frac{\upsilon}{u}\right).$$

Представленный метод не подходит в случае параллельности прямых (1.10). В этом случае коэффициенты в уравнениях (1.10) пропорциональны $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=k$, и исходное уравнение можно записать в виде

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{k(a_1x+b_1y)+c_2}\right)=F(a_1x+b_1y).$$

Заменой $u=a_1x+b_1y$ это уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 1. Решить уравнение $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$y'=\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{y}{x}.$$

Данное уравнение является однородным относительно x и y. Положим

$$u=\frac{y}{x}, \text{ или } y=ux.$$

Тогда

$$y'=xu'+u.$$

Подставляем в уравнение выражения для y и y', получаем

$$xu'+u=\sqrt{1-u^2}+u,$$

$$x\frac{du}{dx}=\sqrt{1-u^2}\ .$$

Разделяем переменные:

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{dx}{x}\,.$$

Интегрируем

$$\arcsin u=\ln|x|+\ln C_1\ (C_1>0),$$

$$\arcsin u=\ln(C_1|x|)\,.$$

Так как $C_1|x|=\pm C_1x$, то, обозначая $\pm C_1=C$, получаем

$$\arcsin u=\ln(Cx),$$

где $|\ln(Cx)|\le\frac{\pi}{2}$. Заменяя u на $\frac{y}{x}$, находим общий интеграл

$$\arcsin\frac{y}{x}=\ln(Cx)\,.$$

Отсюда общее решение имеет вид $y=x\sin\ln(Cx)$.

При делении на произведение $x\sqrt{1-u^2}$ могла произойти потеря решений, которые обращают в нуль это произведение. Соотношение $x=0$ не является решением первоначального уравнения. Из соотношения $\sqrt{1-u^2}=0$ получаем $1-\left(\frac{y}{x}\right)^2=0$, откуда $y=\pm x$. Непосредственной подстановкой в уравнение, убеждаемся, что функции $y=-x$ и $y=x$ являются также решениями данного уравнения. ▲

Пример 2. Решить уравнение

$$(x+y-2)dx+(x-y+4)dy=0\,.$$

Решение. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}x+y-2=0,\\ x-y+4=0.\end{cases}$$

Система имеет единственное решение $x_0 = -1,\ y_0 = 3$. Делаем замену $x = u - 1,\quad y = \upsilon + 3$. При этом $dx = du$, $dy = d\upsilon$. Тогда исходное уравнение принимает вид

$$(u+\upsilon)du + (u-\upsilon)d\upsilon = 0.$$

Полученное уравнение является однородным. Полагая $\upsilon = zu$, где $z = z(u)$ – новая искомая функция, получаем

$$(u+zu)du + (u-zu)(udz + zdu) = 0,$$

откуда $u(1+2z-z^2)du + u^2(1-z)dz = 0$.

Разделяем переменные

$$\frac{du}{u} + \frac{1-z}{1+2z-z^2}dz = 0.$$

Интегрируем $\ln|u| + \frac{1}{2}\ln|1+2z-z^2| = \frac{1}{2}\ln C$ или $u^2(1+2z-z^2) = C$.

Делаем обратную замену $z = \dfrac{\upsilon}{u}$ и возвращаемся к переменным x, y:

$$(x+1)^2\left[1 + 2\frac{y-3}{x+1} - \frac{(y-3)^2}{(x+1)^2}\right] = C.$$

Данное соотношение можно преобразовать к виду

$x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C_1$,

где $C_1 = C + 14$. ▲

Пример 3. Решить уравнение

$$(x+y+1)dx + (2x+2y-1)dy = 0.$$

Решение. Система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x+y+1=0, \\ 2x+2y-1=0 \end{cases}$$

несовместна. В этом случае метод решения, рассмотренный в предыдущем примере, не подходит. Для интегрирования уравнения применяем подстановку $x+y=u$. Отсюда $y=u-x$, $dy=du-dx$. Тогда уравнение принимает вид

$$(u+1)dx+(2u-1)(du-dx)=0,$$

$$(2-u)dx+(2u-1)du=0.$$

Разделяем переменные

$$dx+\frac{2u-1}{2-u}du=0.$$

Вычислим интегралы

$$\int dx = x+const,$$

$$\int\frac{2u-1}{2-u}du=-\int\frac{2u-1}{u-2}du=\left|\begin{array}{l} u-2=t, \\ u=t+2, \\ du=dt \end{array}\right|=-\int\frac{2t+3}{t}dt=-\int\left(2+\frac{3}{t}\right)dt=$$

$$=-2(u-2)-3\ln|u-2|+const.$$

Итак, общий интеграл имеет вид

$$x-2(u-2)-3\ln|u-2|=C_1, \text{ или}$$

$$x-2u-3\ln|u-2|=C_2,$$

где $C_2=C_1-4$. Делаем обратную замену $u=x+y$, получаем общий интеграл исходного уравнения

$$x+2y+3\ln|x+y-2|=C,\ C=-C_2. \quad ▲$$

Задачи.

Проинтегрировать уравнения.

13. $xy'=y+x\cos^2\frac{y}{x}$.

14. $(x-y)dx+xdy=0$.

15. $xy'=y(\ln y-\ln x)$.

16. $x^2dy=(y^2-xy+x^2)dx$.

17. $xy'=y+\sqrt{y^2-x^2}$.

18. $2x^2y'=x^2+y^2$.

19. $x+y-2+(1-x)y'=0$.

20. $8x+4y+1+(4x+2y+1)y'=0$.

1.4. Линейные уравнения первого порядка

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка – это уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производной. Линейное уравнение имеет вид:

$$y' + P(x)y = Q(x). \qquad (1.11)$$

Если $Q(x) = 0$, то уравнение (1.11) называется *линейным однородным*. В противном случае уравнение (1.11) является *линейным неоднородным*.

Для нахождения решения линейного неоднородного уравнения применяется *метод вариации постоянной*. Сначала решается методом разделения переменных соответствующее линейное однородное уравнение

$$y' + P(x)y = 0,$$

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx,$$

$$y = Ce^{-\int P(x)dx},$$

где C – произвольная постоянная. Далее предполагаем, что C зависит от переменной x, то есть решение исходного неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}. \qquad (1.12)$$

Вычисляем производную

$$y' = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}$$

и подставляем ее и (1.12) в уравнение (1.11)

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} - P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

После преобразований получаем $\dfrac{dC}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}$.

Отсюда интегрированием находим функцию $C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1$, где C_1 – произвольная постоянная. Подставляя $C(x)$ в соотношение (1.12), получаем общее решение исходного уравнения.

Уравнение Бернулли имеет вид

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n,\ n \neq 1. \tag{1.13}$$

Для нахождения решения уравнения Бернулли есть два способа. Первый из них заключается в следующем. С помощью замены $z = y^{1-n}$ уравнение Бернулли сводится к линейному уравнению.

Другой способ состоит в непосредственном применении метода вариации постоянной. Сначала методом разделения переменных решается соответствующее однородное уравнение

$$y' + P(x)y = 0,$$

$$y = Ce^{-\int P(x)dx},$$

где C – произвольная постоянная. Далее предполагаем, что C зависит от переменной x, то есть решение исходного неоднородного уравнения Бернулли (1.13) будем искать в виде:

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}. \tag{1.14}$$

Вычисляем производную

$$y' = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}$$

и подставляем ее и (1.14) в уравнение (1.13)

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} - P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)C^n(x)e^{-n\int P(x)dx}.$$

После преобразований получаем уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции $C(x)$:

$$\frac{dC}{dx} = Q(x)C^n(x)e^{(1-n)\int P(x)dx}.$$

Отсюда интегрированием находим функцию $C(x)$. Подставляя $C(x)$ в соотношение (1.14), получаем общее решение исходного уравнения Бернулли (1.13).

Уравнение Риккати имеет вид $y' + P(x)y + Q(x)y^2 = f(x)$.

В общем случае данное уравнение не интегрируется в квадратурах. Однако, если известно одно частное решение $u(x)$ этого уравнения, уравнение Риккати сводится к уравнению Бернулли с помощью замены $y = u + z$, где $z(x)$ – новая неизвестная функция. Действительно, после подстановки замены получим

$$u' + z' + P(x)(u+z) + Q(x)(u+z)^2 = f(x).$$

Учитывая, что $u' + P(x)u + Q(x)u^2 = f(x)$,
после преобразований будем иметь уравнение Бернулли:

$$z' + \big(P(x) + 2Q(x)u(x)\big)z = -Q(x)z^2.$$

Пример 1. Решить уравнение $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

Решение. Данное уравнение является линейным неоднородным. Будем применять метод вариации постоянной. Сначала решаем соответствующее линейное однородное уравнение

$$y' + 2xy = 0,$$

в котором разделяем переменные $\dfrac{dy}{y} = -2xdx$ и интегрируем

$$\ln|y| = -x^2 + \ln C.$$

Отсюда $y = Ce^{-x^2}$.

Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y = C(x)e^{-x^2}.$$

Вычисляем производную $y' = C'(x)e^{-x^2} - C(x)2xe^{-x^2}$
и подставляем ее и y в исходное уравнение:

$$C'(x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}, \quad C'(x) = 2x,\ C(x) = x^2 + C_1.$$

Итак, общее решение линейного неоднородного уравнение имеет вид $y = (x^2 + C_1)e^{-x^2}$. ▲

Пример 2. Решить уравнение Бернулли $y' - xy = -xy^3$.

Решение. Делим обе части уравнения на y^3:

$$\frac{y'}{y^3} - x\frac{1}{y^2} = -x.$$

Делаем замену переменной $z = \frac{1}{y^2}$, $z' = -\frac{2y'}{y^3}$,

откуда $\frac{y'}{y^3} = -\frac{1}{2}z'$.

После подстановки получаем линейное уравнение

$$-\frac{1}{2}z' - xz = -x\text{, или } z' + 2xz = 2x.$$

Общее решение последнего уравнения имеет вид $z = 1 + Ce^{-x^2}$.

Делая обратную замену, получаем общий интеграл исходного уравнения Бернулли $\frac{1}{y^2} = 1 + Ce^{-x^2}$, или $y^2(1 + Ce^{-x^2}) = 1$. ▲

Пример 3. Решить уравнение Бернулли $xy' + y = y^2 \ln x$.

Решение. Применим метод вариации постоянной. Решаем сначала соответствующее однородное уравнение $xy' + y = 0$, в котором разделяем переменные $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$ и интегрируем $\ln|y| = -\ln|x| + \ln C$.

Отсюда $y = \frac{C}{x}$. Общее решение уравнения Бернулли ищем в виде $y = \frac{C(x)}{x}$, где $C(x)$ – новая неизвестная функция. Вычисляем $y' = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}$.

Подставляем y и y' в исходное уравнение

$$C'(x) = C^2(x)\frac{\ln x}{x^2}.$$

Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными $\dfrac{dC}{C^2}=\dfrac{\ln x}{x^2}dx$.

Вычислим отдельно интеграл с помощью формулы интегрирования по частям:

$$\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\left|\begin{matrix} u=\ln x, & du=\dfrac{dx}{x}, \\ d\upsilon=\dfrac{1}{x^2}dx, & \upsilon=-\dfrac{1}{x} \end{matrix}\right|=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+const$$

.

Итак, находим

$$\frac{1}{C(x)}=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+C_1,\quad C(x)=\frac{x}{1+Cx+\ln x}.$$

Таким образом, общее решение уравнения Бернулли имеет вид

$$y=\frac{1}{1+Cx+\ln x}.\quad\blacktriangle$$

Задачи.

Решить линейные уравнения.

21. $y'+2y=e^{-x}$. **22.** $x^2+xy'=y$, $y\big|_{x=1}=0$.

23. $y'-2xy=2xe^{x^2}$.**24.** $y'\cos x-y\sin x=2x$, $y\big|_{x=0}=0$.

25. $xy'-2y=x^3\cos x$. **26.** $y'x\ln x-y=3x^3\ln^2 x$.

27. $(2x-y^2)y'=2y$.

Решить уравнения Бернулли.

28. $y'+2xy=2xy^2$. **29.** $2y'-y=\dfrac{1}{y}e^x$.

30. $(x^3+e^y)y'=3x^2$. **31.** $y'-2ye^x=2\sqrt{y}e^x$.

32. $2y'\sin x+y\cos x=y^3\sin^2 x$.

1.5. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \qquad (1.15)$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$ двух независимых переменных, то есть

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

В этом случае уравнение (1.15) можно записать как $du = 0$. Тогда общий интеграл исходного уравнения имеет вид $u(x,y) = C$, где C – произвольная постоянная.

Для того чтобы уравнение (1.15) являлось уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Эйлера: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Для нахождения функции $u(x,y)$ составляются равенства

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y). \end{cases} \qquad (1.16)$$

Интегрируя первое из равенств (1.16) по переменной x, считая y постоянной, имеем

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y), \qquad (1.17)$$

где $\varphi(y)$ – произвольная функция от y. Дифференцируя полученное выражение по y и подставляя во второе из равенств (1.16), получаем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx + \varphi'(y) = Q(x,y),$$

$$\varphi'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\,.$$

Правая часть последнего уравнения в силу условия Эйлера не зависит от x. Интегрируя по y, находим

$$\varphi(y) = \int\left[Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\right]dy + C_1\,.$$

Подставляя $\varphi(y)$ в (1.17), получим искомую функцию

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + \int\left[Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\right]dy + C_1$$

.

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение

$$(\sin(xy) + xy\cos(xy))dx + x^2\cos(xy)dy = 0\,.$$

Решение. Проверим, что данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\sin(xy) + xy\cos(xy)) =$$

$$= x\cos(xy) + x\cos(xy) - x^2y\sin(xy) = 2x\cos(xy) - x^2y\sin(xy),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2\cos(xy)) = 2x\cos(xy) - x^2y\sin(xy),$$

то есть условие Эйлера $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ выполняется. Следовательно, данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах. Составим равенства

$$P = \frac{\partial u}{\partial x} = \sin(xy) + xy\cos(xy)\,,$$

$$Q = \frac{\partial u}{\partial y} = x^2y\cos(xy)\,.$$

Интегрируем первое из этих равенств по x

$$u(x,y)=\int(\sin(xy)+xy\cos(xy))dx+\varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ – пока неопределенная функция.

$$\int\sin(xy)dx=-\frac{1}{y}\cos(xy)+const,$$

$$\int xy\cos(xy)dx=x\sin(xy)-\int\sin(xy)dx=x\sin(xy)+\frac{1}{y}\cos(xy)$$

.

Итак, имеем $u(x,y)=x\sin(xy)+\varphi(y)$.

Находим частную производную по переменной y

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2\cos(xy)+\varphi'(y)$$

и приравниваем ее функции $Q=x^2y\cos(xy)$:

$$x^2\cos(xy)+\varphi'(y)=x^2\cos(xy),$$

откуда $\varphi'(y)=0$, $\varphi(y)=C$.

Общий интеграл исходного дифференциального уравнения принимает вид $x\sin(xy)=C$. ▲

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение

$$(x^3+xy^2)dx+(x^2y+y^3)dy=0.$$

Решение. Проверим, что данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^3+xy^2)=2xy,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2y+y^3)=2xy,$$

то есть условие Эйлера $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ выполняется. Это уравнение можно привести к виду $du=0$ непосредственно группировкой:

$$x^3dx+xy(ydx+xdy)+y^3dy=0,$$

$$d\left(\frac{x^4}{4}\right)+xyd(xy)+d\left(\frac{y^4}{4}\right)=0, \text{ или}$$

$$d\left(\frac{x^4}{4}+\frac{(xy)^2}{2}+\frac{y^4}{4}\right)=0.$$

Следовательно, $x^4+2(xy)^2+y^4=C$ есть общий интеграл исходного уравнения. ▲

Задачи.

Проинтегрировать уравнения в полных дифференциалах.

33. $x(2x^2+y^2)+y(x^2+2y^2)y'=0$.

34. $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$.

35.

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy=0.$$

36. $\left(2x+\dfrac{x^2+y^2}{x^2y}\right)dx=\dfrac{x^2+y^2}{xy^2}dy$.

37. $\left(\dfrac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\dfrac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=0$.

38. $(3x^2-2x-y)dx+(2y-x+3y^2)dy=0$.

39. $\left(\sin y+y\sin x+\dfrac{1}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+\dfrac{1}{y}\right)dy=0$.

40. $\dfrac{2x}{y^3}dx+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$, $y\big|_{x=1}=1$.

ЧАСТЬ II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

2.1. Основные понятия и определения

Дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Уравнение, разрешенное относительно старшей производной $y^{(n)}$, имеет вид $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$. (2.1)

Задачей Коши для уравнения (2.1) называется задача нахождения решения $y = \varphi(x)$ уравнения (2.1), удовлетворяющего *начальным условиям*

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\big|_{x=x_0} = y'_0, \dots, \quad y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \qquad (2.2)$$

Теорема существования и единственности решения задачи Коши. *Если в уравнении* (2.1) *функция* $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ *непрерывна по всем своим аргументам* $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ *в некоторой области* D *их изменения, имеет ограниченные в области,* D *частные производные* $\dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial y'}, \dfrac{\partial f}{\partial y''}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ *по аргументам* $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$*, то найдется интервал* $x_0 - h < x < x_0 + h$*, на котором существует единственное решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* (2.1)*, удовлетворяющее условиям* (2.2)*, где значения* $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$, ..., $y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ *содержатся в области* D.

2.2. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Рассмотрим простейшие случаи, допускающие понижение порядка.

1. Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$
решается n-кратным интегрированием.

2. Уравнение $F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$ не содержит искомой функции y и ее младших производных до $k-1$ порядка включительно. Это уравнение допускает понижение порядка на k единиц заменой переменной $u = y^{(k)}$, где $u(x)$ – новая искомая функция. Действительно, после замены переменных в исходном уравнении имеем $F(x, u, u' \ldots, u^{(n-k)}) = 0$.

Интегрируя данное уравнение, определяем искомую функцию

$$u = u(x, C_1, C_2, C_{n-k}).$$

Функция y находится k-кратным интегрированием уравнения

$$y^{(k)} = u(x, C_1, C_2, C_{n-k}).$$

3. Уравнение $F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ не содержит независимую переменную x. Это уравнение допускает понижение порядка на единицу с помощью замены обеих переменных. В качестве новой функции принимается $p = y'$, а в качестве новой независимой переменной – y, то есть $p = p(y)$. При этом все производные необходимо выразить через производные от новой искомой функции $p(y)$ по y. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2 p}{dy^2}$$

и аналогично для производных более высокого порядка. Исходное уравнение после замены переменных принимает вид

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \ldots, \frac{d^{n-1} p}{dy^{n-1}}\right) = 0.$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y''' = \sin x + \cos x$.

Решение. Последовательно интегрируем данное уравнение

$$y'' = \int (\sin x + \cos x)dx = -\cos x + \sin x + C_1,$$

$$y' = \int (-\cos x + \sin x + C_1)dx = -\sin x - \cos x + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int (-\sin x - \cos x + C_1 x + C_2)dx = \cos x - \sin x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \cdot \ \blacktriangle$$

Пример 2. Решить уравнение $xy^V - y^{IV} = 0$.

Решение. Данное уравнение не содержит искомой функции и ее производных до третьего порядка включительно. Поэтому, полагая $y^{IV} = p$, получаем $x\dfrac{dp}{dx} - p = 0$.

Разделяем переменные и интегрируем $p = C_1 x$, отсюда $y^{IV} = C_1 x$.

Последовательно интегрируя, находим

$$y''' = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2,$$

$$y'' = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 x + C_3,$$

$$y' = C_1 \frac{x^4}{24} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4,$$

$$y = C_1 \frac{x^5}{120} + C_2 \frac{x^3}{6} + C_3 \frac{x^2}{2} + C_4 x + C_5,$$

или $y = \tilde{C}_1 x^5 + \tilde{C}_2 x^3 + \tilde{C}_3 x^2 + C_4 x + C_5$,

где $\tilde{C}_1 = \dfrac{C_1}{120}$, $\tilde{C}_2 = \dfrac{C_2}{6}$, $\tilde{C}_3 = \dfrac{C_3}{2}$. ▲

Пример 3. Решить уравнение $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$.

Решение. Данное уравнение не содержит независимой переменной x. Полагая $y' = p$, $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$, получим уравнение Бернулли $p\dfrac{dp}{dy} + p^2 = 2e^{-y}$.

Применим метод вариации постоянной. Сначала решаем однородное уравнение $p\dfrac{dp}{dy} + p^2 = 0$, в котором разделяем переменные $\dfrac{dp}{p} = -dy$ и интегрируем $p = Ce^{-y}$.

Общее решение неоднородного уравнения Бернулли ищем в виде: $p = C(y)e^{-y}$.

Подставляя в уравнение, получаем

$$C(y)e^{-y}(C'(y)e^{-y} - C(y)e^{-y}) + (C(y)e^{-y})^2 = 2e^{-y},$$

или $C(y)C'(y) = 2e^{y}$.

Интегрируя, находим $\dfrac{C^2}{2} = 2e^{y} + \dfrac{C_1}{2}$, или $C^2 = 4e^{y} + C_1$.

Следовательно, $p^2 = C^2e^{-2y} = 4e^{-y} + C_1e^{-2y}$.

Заменяя $p^2 = (y')^2$, получаем

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{4e^{-y} + C_1e^{-2y}}.$$

Разделяем переменные и интегрируем

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{4e^{-y} + C_1e^{-2y}}} = dx,$$

$$\pm \frac{e^y dy}{\sqrt{4e^y + C_1}} = dx,$$

$$\pm \frac{1}{2}\sqrt{4e^y + C_1} = x + C_2.$$

Отсюда получаем общий интеграл исходного уравнения

$$e^y + \widetilde{C}_1 = (x + C_2)^2, \text{ где } \widetilde{C}_1 = \frac{C_1}{4}. \quad \blacktriangle$$

Задачи.

Проинтегрировать уравнения.

41. $y^{IV} = x$.

42. $y''' = x + \cos x$.

43. $y''(x+2)^5 = 1,\ y(-1) = \frac{1}{12},\ y'(-1) = -\frac{1}{4}$.

44. $y'' = xe^x,\ y(0) = y'(0) = 0$.

45. $xy'' = y'$.

46. $xy'' + y' = 0$.

47. $xy'' = (1 + 2x^2)y'$.

48. $y'' = (y')^2$.

49. $y'' = 1 + (y')^2$.

50. $y''' = 3yy',\ y(0) = y'(0) = 1,\ y''(0) = \frac{3}{2}$.

2.3. Линейные дифференциальные уравнения *n*-го порядка

Уравнение, линейное относительно неизвестной и ее производных, называется *линейным дифференциальным уравнением n-го порядка*. Такое уравнение имеет вид

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f(x). \quad (2.3)$$

Если правая часть $f(x)=0$, то уравнение называется линейным *однородным*. В противном случае уравнение является *линейным неоднородным*.

Функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называются *линейно зависимыми* на отрезке $[a,b]$, если существуют постоянные $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ такие, что выполняется равенство на $[a,b]$

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \ldots + \lambda_n y_n(x) = 0, \qquad (2.4)$$

причем хотя бы одно значение из $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ не равно нулю. Если тождество (2.4) справедливо только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, то функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называются *линейно независимыми* на отрезке $[a,b]$.

Теорема. *Общим решением на отрезке* $[a,b]$ *линейного однородного уравнения*

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0 \quad (2.5)$$

с непрерывными на $[a,b]$ *коэффициентами* $a_1(x), \ldots, a_n(x)$, $a_0(x) \neq 0$ *является линейная комбинация*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$

линейно независимых на $[a,b]$ *частных решений* $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ *с произвольными постоянными коэффициентами* $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Любые n линейно независимых частных решений линейного однородного уравнения n-го порядка называются его *фундаментальной системой решений*.

Теорема. *Общее решение на отрезке* $[a,b]$ *линейного неоднородного уравнения* (2.3) *с непрерывными на* $[a,b]$ *коэффициентами* $a_1(x), \ldots, a_n(x)$, $a_0(x) \neq 0$ *и правой частью* $f(x)$ *равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения* (2.5) *и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения.*

2.4. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Частные решения линейного однородного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$a_0\, y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

будем искать в виде $y = e^{kx}$, где k – некоторая постоянная. Вычисляем производные $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$, …, $y^{(n)} = k^n e^{kx}$ и после подстановки в исходное дифференциальное уравнение будем иметь $(a_0\, k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n) e^{kx} = 0$.

Сокращая на множитель $e^{kx} \neq 0$, получим *характеристическое уравнение* $a_0\, k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0$.

В зависимости от вида корней характеристического уравнения возможны четыре различных случая.

1. Все корни $k_1, k_2, \ldots, k_n$ характеристического уравнения действительны и различны. Тогда фундаментальная система решений состоит из n линейно независимых частных решений $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{k_n x}$. Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_n\, e^{k_n x}$.

2. Среди корней характеристического уравнения есть пара комплексных сопряженных корней $k = \alpha \pm \beta i$. Этой паре соответствуют два частных линейно независимых решения

$$e^{\alpha x} \cos \beta x,\ e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

3. Среди действительных корней характеристического уравнения имеются кратные. Пусть действительный корень k имеет кратность p. Тогда частными линейно независимыми решениями исходного уравнения, соответствующими этому корню, будут р функций

$$e^{kx}, xe^{kx}, x^2 e^{kx}, \ldots, x^{p-1} e^{kx}.$$

4. Среди корней характеристического уравнения имеются кратные комплексные корни. Пусть корни $k = \alpha \pm \beta i$ имеют кратность p. Этим корням соответствуют $2p$ частных линейно независимых решений

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ x^{p-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,\ x^{p-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'''-2y''-3y'=0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$k^3-2k^2-3k=0.$$

Находим его корни: $k_1=0$, $k_2=-1$, $k_3=3$. Так как они действительные и различные, то общее решение имеет вид

$$y=C_1+C_2e^{-x}+C_3\ e^{3x}. \quad \blacktriangle$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'''+2y''+y'=0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^3+2k^2+k=0$.

Находим его корни: $k_1=k_2=-1$, $k_3=0$. Они действительные, причем корень $k=-1$ имеет кратность 2, поэтому общее решение имеет вид $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+C_3$. ▲

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'''+4y''+13y'=0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$k^3+4k^2+13k=0.$$

Находим его корни: $k_1=0$, $k_2=-2-3i$, $k_3=-2+3i$. Общее решение имеет вид

$$y=C_1+C_2e^{-2x}\cos 3x+C_3e^{-2x}\sin 3x. \quad \blacktriangle$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$y^V-2y^{IV}+2y'''-4y''+y'-2y=0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$k^5-2k^4+2k^3-4k^2+k-2=0,$$

или $(k-2)(k^2+1)^2=0$.

Находим его корни: $k=2$ – однократный и $k=\pm i$ – пара двукратных мнимых корней. Общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \cos x + C_5 x \sin x . \blacktriangle$$

Задачи.

Проинтегрировать уравнения и, где указано, решить задачу Коши.

51. $y'' - y = 0$. **52.** $3y'' - 2y' - 8y = 0$.

53. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$.

54. $y'' + 2y' + y = 0$.

55. $y'' - 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$.

56. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$. **57.** $y^{VI} + 2y^{V} + y^{IV} = 0$.

58. $4y'' - 8y' + 5y = 0$. **59.** $y''' - 8y = 0$.

60. $y''' + y'' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

2.5. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

Общее решение неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \qquad (2.6)$$

равно сумме общего решения y_0 соответствующего однородного уравнения $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$ и какого-либо частного решения $\tilde{y}$ неоднородного уравнения.

Рассмотрим случаи, когда правая часть уравнения (2.6) записана в специальном виде.

1. Правая часть уравнения (2.6) имеет специальный вид

$$f(x) = e^{px} P_m(x),$$

где постоянная p называется *контрольным числом* правой части, $P_m(x)$ – многочлен степени m.

А) Если p не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$\tilde{y} = e^{px} R_m(x),$$

где $R_m(x)$ – многочлен степени m с неопределенными коэффициентами. Такой случай называется *нерезонансным*.

Б) Если p является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$\tilde{y} = x^r e^{px} R_m(x),$$

где r – кратность корня, $R_m(x)$ – многочлен степени m с неопределёнными коэффициентами. Такой случай называется *резонансный*.

2. Правая часть уравнения (2.6) имеет специальный вид

$$f(x) = e^{px}(P_m(x)\cos qx + Q_l(x)\sin qx),$$

где $P_m(x)$ и $Q_l(x)$ – многочлены степени m и l соответственно, $p \pm qi$ называется *контрольным числом* правой части.

А) Если $p \pm qi$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$\tilde{y} = e^{px}(R_s(x)\cos qx + T_s(x)\sin qx),$$

где $R_s(x)$ и $T_s(x)$ – многочлены степени $s = \max\{m, n\}$ с неопределенными коэффициентами. Такой случай называется *нерезонансным*.

Б) Если $p \pm qi$ является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$\tilde{y} = x^r e^{px}(R_s(x)\cos qx + T_s(x)\sin qx),$$

где r – кратность корня, где $R_s(x)$ и $T_s(x)$ – многочлены степени $s = \max\{m, n\}$ с неопределёнными коэффициентами. Такой случай называется *резонансный*.

Общее решение неоднородного линейного уравнения (2.6) можно находить *методом вариации постоянных*. Для этого сначала определяется фундаментальная система $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ решений соответствующего однородного линейного уравнения. Далее общее решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x),$$

где функции $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)+\ldots+C_n'(x)y_n(x)=0, \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)+\ldots+C_n'(x)y_n'(x)=0, \\ \ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x)+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)=\dfrac{1}{a_0}f(x), \end{cases}$$

которая является системой линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно $C_1'(x), C_2'(x), \ldots, C_n'(x)$. Так как определитель этой системы не равен нулю, то она имеет единственное решение

$$C_1'(x)=g_1(x),\ C_2'(x)=g_2(x),\ \ldots,\ C_n'(x)=g_n(x).$$

Отсюда находим

$$C_1(x)=\int g_1(x)dx+\tilde{C}_1,\ C_2(x)=\int g_2(x)dx+\tilde{C}_2,\ \ldots,$$

$$C_n(x)=\int g_n(x)dx+\tilde{C}_n.$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'''-y''+y'-y=x^2+x$.

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$k^3-k^2+k-1=0.$$

Находим его корни: $k_1=1$, $k_2=-i$, $k_3=i$. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y_0=C_1e^x+C_2\cos x+C_3\sin x.$$

Так как контрольное число правой части $p=0$ не является корнем характеристического уравнения (нерезонансный случай), то частное решение данного уравнения будем искать в виде

$$\tilde{y}=A_1x^2+A_2x+A_3,$$

где A_1, A_2, A_3 – неизвестные пока коэффициенты. Вычисляем производные $\tilde{y}'=2A_1x+A_2$, $\tilde{y}''=2A_1$, $\tilde{y}'''=0$ и подставляем в исходное уравнение $-2A_1+(2A_1x+A_2)-(A_1x^2+A_2x+A_3)=x^2+x$, или $-A_1x^2+(2A_1-A_2)x+(A_3-2A_1+A_2)=x^2+x$.

Приравнивая слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем

$$\begin{cases} -A_1 = 1, \\ 2A_1 - A_2 = 1, \\ A_3 - 2A_1 + A_2 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A_1 = -1$, $A_2 = -3$, $A_3 = -1$. Следовательно, частное решение будет $\tilde{y} = -x^2 - 3x - 1$.

Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = y_0 + \tilde{y},$$

то есть $y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x - x^2 - 3x - 1$. ▲

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y''' - y'' = 12x^2 + 6x$.

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$k^3 - k^2 = 0.$$

Находим его корни: $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = 1$. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y_0 = C_1 + C_2 x + C_3 e^x.$$

Так как контрольное число правой части $p = 0$ является двукратным корнем характеристического уравнения (резонансный случай), то частное решение данного уравнения будем искать в виде

$$\tilde{y} = x^2 (A_1 x^2 + A_2 x + A_3) = A_1 x^4 + A_2 x^3 + A_3 x^2,$$

где A_1, A_2, A_3 – неизвестные пока коэффициенты. Вычисляем производные

$$\tilde{y}' = 4A_1 x^3 + 3A_2 x^2 + 2A_3 x, \ \tilde{y}'' = 12A_1 x^2 + 6A_2 x + 2A_3,$$
$$\tilde{y}''' = 24A_1 x + 6A_2$$

и подставляем в исходное уравнение

$$-12A_1 x^2 + (24A_1 - 6A_2)x + (6A_2 - 2A_3) = 12x^2 + 6x,$$

откуда

$$\begin{cases} -12A_1 = 12, \\ 24A_1 - 6A_2 = 6, \\ 6A_2 - 2A_3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A_1 = -1$, $A_2 = -5$, $A_3 = -15$. Следовательно, частное решение будет

$$\tilde{y} = -x^4 - 5x^3 - 15x^2.$$

Общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x - x^4 - 5x^3 - 15x^2. \quad \blacktriangle$$

Пример 3. Найти частное решение уравнения $y'' - y = 4e^x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$k^2 - 1 = 0$$

имеет корни $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Так как контрольное число правой части $p = 1$ является корнем характеристического уравнения (резонансный случай), то частное решение данного уравнения будем искать в виде

$$\tilde{y} = xe^x A_1.$$

Вычисляем производные

$$\tilde{y}' = e^x A_1 + xe^x A_1, \; \tilde{y}'' = e^x 2A_1 + xe^x A_1.$$

Подставляем в исходное уравнение $e^x 2A_1 = 4e^x$,

откуда $A_1 = 2$. Следовательно, частное решение будет $\tilde{y} = 2xe^x$.

Общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + 2xe^x.$$

Чтобы найти требуемое частное решение, используем начальные условия

$$y(0) = C_1 + C_2 = 0,$$

$$y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x} + 2e^x + 2xe^x,$$
$$y'(0) = C_1 - C_2 + 2 = 1.$$

Для определения C_1, C_2 имеем систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 - C_2 = -1, \end{cases}$$

решая которую, находим $C_1 = -\frac{1}{2}$, $C_2 = \frac{1}{2}$. Подставляя найденные значения в общее решение исходного уравнения, получаем решение задачи Коши

$$y = -\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} + 2xe^x \text{ или } y = 2xe^x - \operatorname{sh} x. \quad \blacktriangle$$

Пример 4. Решить уравнение $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет мнимые корни $k_1 = i$, $k_2 = -i$, поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Общее решение исходного уравнения, согласно методу вариации постоянных, ищем в виде

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x, \tag{2.7}$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ – неизвестные функции от x. Для их нахождения составим систему

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Решаем эту систему относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$:

$$C_1'(x) = -tgx, \quad C_2'(x) = 1.$$

Интегрированием находим

$$C_1(x)=\ln|\cos x|+\widetilde{C}_1,\quad C_2(x)=x+\widetilde{C}_2.$$

Подставляя выражения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в (2.7), получаем общее решение исходного уравнения

$$y=\widetilde{C}_1(x)\cos x+\widetilde{C}_2(x)\sin x+\cos x\cdot\ln|\cos x|+x\sin x. \ \blacktriangle$$

Задачи.

Решить линейные неоднородные уравнения.

61. $y''+2y'+y=-2$.

62. $y''+2y'+2=0$.

63. $y''+9y-9=0$.

64. $y'''+y''=1$.

65. $y''-4y'+4y=x^2$.

66. $y''+8y'=8x$.

67. $y''+4y'+3y=9e^{-3x}$.

68. $y''+3y'=3xe^{-3x}$.

69. $y''+2y'+2y=1+x$.

70. $y''+y=4x\cos x$.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющих заданным начальным условиям.

71. $y''+y=2(1-x)$, $y(0)=2$, $y'(0)=-2$.

72. $y''-6y'+9y=9x^2-12x+2$, $y(0)=1$, $y'(0)=3$.

73. $y''+9y=36e^{3x}$, $y(0)=2$, $y'(0)=6$.

74. $y''-4y'+4y=2e^{2x}$, $y(0)=y'(0)=0$.

75. $y''+6y'+9y=10\sin x$, $y(0)=y'(0)=0$.

Проинтегрировать методом вариации постоянных уравнения.

76. $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$.

77. $y''-y'=\dfrac{1}{e^x+1}$.

78. $y''+y=\dfrac{1}{\cos^3 x}$.

79. $y''+y=\operatorname{ctg} x$.

80. $y''-y'+y=\dfrac{e^x}{x^2+1}$.

ОТВЕТЫ

1. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = C$, или $x + y = C(1 - xy)$.

2. $x^2(1 + y^2) = C$.

3. $y = \sin x$.

4. $y = \operatorname{tg} \ln Cx$.

5. $\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} = C$.

6. $\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} = 1,\ y = 1$.

7. $e^x = C(1 - e^{-y})$.

8. $y = 1$.

9. $1 + e^y = C(1 + x^2)$.

10. $y = \sin\left[C + \ln(1 + x^2)\right]$.

11. $y = (1 + Cy + \ln y)\cos x$.

12. $\operatorname{tg}\dfrac{y}{2} = e^{2\sin x}$.

13. $\operatorname{tg}\dfrac{y}{x} = \ln Cx$.

14. $y = x(C - \ln x)$.

15. $y = xe^{1+Cx}$.

16. $(x - y)\ln Cx = x$.

17. $y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2$, $y = x$, $y = -x$.

18. $2x = (x - y)\ln Cx$.

19. $y = 1 + (x - 1)\ln C(x - 1)$.

20. $(4x + 2y + 1)^2 = 4x + C$.

21. $y = Ce^{-2x} + e^{-x}$.

22. $y = x - x^2$.

23. $y=(C+x^2)e^{x^2}$.

24. $y=\dfrac{x^2}{\cos x}$.

25. $y=Cx^2+$
$+x^2\sin x$.

26. $y=(C+x^3)\ln x$.

27. $x=Cy-\dfrac{y^2}{2}$.

28. $y=\dfrac{1}{1+Ce^{x^2}}$.

29. $y^2=(x+C)e^x$.

30. $x^3e^{-y}=C+y$.

31. $\sqrt{y}+1=Ce^{e^x}$.

32. $y^2(C-x)\sin x=1$.

33. $x^4+x^2y^2+y^4=C$.

34. $x^3+3x^2y^2+y^4=C$.

35. $\sqrt{x^2+y^2}+\ln|xy|+\dfrac{x}{y}=C$.

36. $x^3y+x^2-y^2=Cxy$.

37. $\dfrac{\sin^2 x}{y^2}+\dfrac{x^2+y^2}{2}=C$.

38. $x^3+y^3-x^2-xy+y^2=C$.

39. $x\sin y-y\cos x+\ +\ln|xy|=C$.

40. $y=x$.

41. $y=\dfrac{x^5}{120}+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4$.

42. $y=\dfrac{x^4}{24}-\sin x+\ +C_1x^2+C_2x+C_3$.

43. $y=\dfrac{1}{12(x+2)^3}$.

44. $y=(x-2)e^x+x+2$.

45. $y=C_1x^2+C_2$.

46. $y=C_1\ln|x|+C_2$.

47. $y=C_1e^{x^2}+C_2$.

48. $y=C_2-\ln|C_1-x|$.

49. $y=C_2-\ -\ln|\cos(C_1+x)|$.

50. $y=\dfrac{4}{(x-2)^2}$.

51. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$.

52. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-4x/3}$.

53. $y=e^x(1+x)$.

54. $y=e^{-x}(C_1+C_2x)$.

55. $y=4e^x+2e^{3x}$.

56. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+\ +C_3e^{-3x}$.

57. $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3+e^{-x}(C_5+C_6x)$.

58. $y=e^x\left(C_1\cos\dfrac{x}{2}+\ +C_2\sin\dfrac{x}{2}\right)$.

59. $y=C_1e^{2x}+e^{-x}(C_2\cos\sqrt{3}x+C_3\sin\sqrt{3}x)$.

60. $y = x + e^{-x}$.

61. $y = e^{-x}(C_1 + C_2 x) - 2$.

62. $y = C_1 + C_2 e^{-2x} - x$.

63. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + 1$.

64. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + \dfrac{x^2}{2}$.

65. $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{8}$.

66. $y = C_1 + \ + C_2 e^{-8x} + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{8}$.

67. $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x} - \dfrac{9}{2} x e^{-3x}$.

68. $y = C_1 + C_2 e^{-3x} - \left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{3} \right) e^{-3x}$.

69. $y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^{-x} + \dfrac{x}{2}$.

70. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \cos x + x^2 \sin x$.

71. $y = 2(1 - x)$.

72. $y = x^2 + e^{3x}$.

73. $y = 2e^{3x}$.

74. $y = x^2 e^{2x}$.

75. $y = \left(x + \dfrac{3}{5} \right) e^{-3x} + \ + \dfrac{1}{5}(4 \sin x - 3 \cos x)$.

76. $y = (C_1 - x)\cos x + (C_2 + \ln|\sin x|)\sin x$.

77. $y = C_1 e^x + C_2 + \ + (e^x + 1)\ln(1 + e^{-x})$.

78. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \dfrac{\cos 2x}{2\cos x}$.

79. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \ + \sin x \cdot \ln |\,\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}|$.

80. $y = (C_1 + C_2 x)e^x - e^x \ln\sqrt{1 + x^2} + e^x x \,\mathrm{arctg}\, x$.

Библиографический список

1. Бушманов С.Б., Бушманова О.П. Дифференциальные уравнения. Методы решения, примеры и задачи. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2005. – 126 с.

2. Демидович Б.П. Дифференциальные уравнения. – СПб.: Иван Федоров, 2003. – 280 с.

3. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – СПб.: Лань, 2010. – 464 с.

4. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Высшая школа, 1983. – 128 с.

5. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 256 с.

6. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1967. – 564 с.

7. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1982, – 331 с.

8. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 256 с.

9. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1992. – 128 с.

10. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Едиториал УРСС , 2002. – 320 с.

Подписано в печать 12.03.2015. Формат 60х84/16
Усл.-печ. л. 2,5. Тираж 100 экз. Заказ №106
Типография Алтайского государственного университета:
656049, Барнаул, ул. Димитрова, 66