МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра математического анализа

ДИНАМИКА

Методические рекомендации по теоретической механике для студентов математического факультета

Часть 2

Издание АГУ Барнаул 1988

УДК 530
ДИНАМИКА : Методические рекомендации по теоретической механике для студентов математического факультета.-Барнаул: изд. АГУ, 1988. -31 с.

Печатается
по решению кафедры математического анализа
и методической комиссии МФ

Составитель к.ф.-м.н., доцент Папин А.А.
Рецензент к.ф.-м.н., доцент Кузиков С.С.

План УМД 1988 г., п. 21
Алтайский государственный университет, 1988.

Статика твердого тела.Основные определения и понятия

I.Материальная точка называется изолированной,если действием на нее других тел можно пренебречь.

Закон I(инерции).Изолированная материальная точка находится в покое или движется равномерно и прямолинейно.

Закон 2.Твердое тело (ТТ) находится в равновесии под действием двух сил тогда и только тогда,когда эти силы равны по модулю и направлены в противоположные стороны по общей линии действия.

2. Силы, описанные в законе2, называются уравновешивающимися.

Закон 3. Не нарушая состояния ТТ, можно добавлять и отбрасывать уравновешивающие силы.(Следовательно, силу можно переносить по линии ее действия в любую точку ТТ).

3. Две системы сил называются эквивалентными , если одну из них можно заменить другой, не нарушая состояния ТТ.

4. Сила, эквивалентная данной системе сил, называется равнодействующей.

Закон 4.Равнодействующая $\vec{R}$ двух сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$,приложенных в одной точке, приложена в той же точке , определяется по правилу параллелограмма:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad , \quad |\vec{R}|^2 = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2|\vec{F}_1|\cdot|\vec{F}_2|\cos(\widehat{\vec{F}_1,\vec{F}_2}).$$

Закон 5(равенства действия и противодействия).Силы, с которыми два тела действуют друг на друга, равны по модулю и направлены в противоположные стороны по одной прямой (они не уравновешиваются,т.к. приложены к разным телам).

Закон 6(отвердевания).Равновесие нетвердого тела не нарушится при его затвердевании (пример; нерастяжимая нить может находится в равновесии под действием растягивающих сил).

5. ТТ называется свободным, если его движение ничем не ограничено.

6. ТТ называется несвободным, если на него "наложены" связи, ограничивающие его движение по некоторым направления(пример: книга на столе, стол-связь).

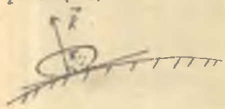
7. Реакцией связи называется сила, характеризующая действие связи на ТТ (эта сила приложена к ТТ).

8. Все силы, действующие на ТТ, делятся на реакции связей и активные.

Закон 7(освобождаемости от связей).Несвободное ТТ можно рассматривать как свободное, если его мысленно освободить от связей, заменив действие связей соответствующими реакциями связей.

Некоторые характерные случаи определения направления реакции связи:

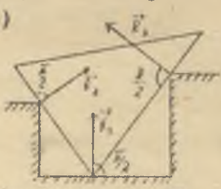
а) контакт "тело-поверхность" без трения (нормальная реакция)



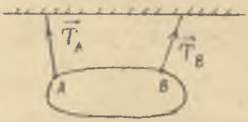
г) цилиндрический (сферический) шарнир

т.к. точка касания C неизвестна, то $\vec{R} = \sum_{k=1} R_k$.

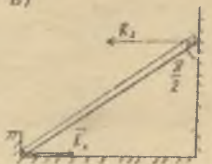
б)



д) гибкая связь: T приложена в точке наложения и направлена по касательной



в)



е) жесткий стержень шарнирно соединен с другими: реакции - вдоль стержня

сжатие

растяжение

Последовательность решения задач на равновесие: выбрать систему координат, освободиться от связей, изобразить силы, записать условия равновесия (число неизвестных должно быть равно числу уравнений).

Занятие I. Плоская сходящаяся система сил (линии действия сил пересекаются в одной точке).

I.I. Условие равновесия (необходимое и достаточное) - равенство нулю векторной суммы всех приложенных к телу сил (замкнутость силового многоугольника, рис. I.I)

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0 \qquad (\text{I.I})$$

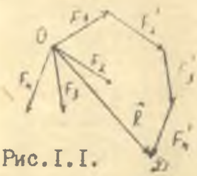


Рис. I.I.

Теорема I (о трех непараллельных силах). Если ТТ находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

Условие (I.I) в проекциях на оси координат имеют вид

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0\ , \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \qquad (\text{I.2})$$

I.2. Момент силы $\vec{F}$ относительно точки O есть вектор (рис. I.2)

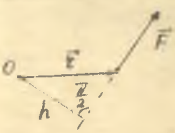


Рис. I.2.

$$m_o(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}\ . \qquad (\text{I.3})$$

Если $\vec{r} = (x, y)$, $\vec{F} = (F_x, F_y)$, то

$$|m_o(\vec{F})| = x F_y - y F_x\ , \qquad (\text{I.4})$$

$$|m_o(\vec{F})| = |\vec{r}|\,|\vec{F}| \sin(\widehat{\vec{r}, \vec{F}}) = h|\vec{F}|,\ [\text{Н}\cdot\text{м}] \qquad (\text{I.5})$$

h -плечо силы $\vec F$.Если сила стремится повернуть тело вокруг точки О против часовой стрелки, то момент силы отрицателен.В противном случае - положителен.

Теорема Вариньона.Пусть $\vec R$ -равнодействующая системы сходящихся сил F_i , $i=1-n$, тогда

$$m_o(\vec R) = \sum_{k=1}^{n} m_o(\vec F_k). \qquad (I.6)$$

I.3.Опрокидывание ТТ. Задачи на опрокидывание ТТ решаются в предположении, что ТТ начинает отрываться от одной из опор.Реакцию этой опоры не учитывают.Тогда при равновесии реакция оставшейся опоры должна уравновешиваться с равнодействующей всех активных сил и, следовательно линия действия равнодействующей должна проходить через эту опору. Поэтому выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{n} m_o(\vec F_k) = 0 . \qquad (I.7)$$

Задача I.I.(2.2I).Шарик В веса Р подвешан к неподвижной точке А посредством нити АВ и лежит на поверхности гладкой сферы радиуса r ; расстояние точки А от поверхности сферы АС= d , длина нити АВ= ℓ, прямая АО вертикальна.Определить натяжение Т нити и реакцию Q сферы.Радиусом шарика пренебречь.

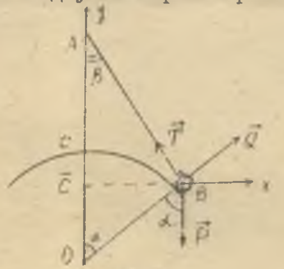


Рис.I.3

Решение (рис.I.3).Активные силы : P , реакции связей Q ,Т. Из треугольников АСВ и ОСВ следует

$$\begin{cases} r \sin\alpha = \ell \sin\beta \\ \ell\cos\beta + r\cos\alpha = r+d \end{cases} \qquad (I.8)$$

Условия равновесия системы сил:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = Q\cos(90-\alpha) - T\sin\beta = 0 \\ \sum F_{ky} = Q\cdot\sin(90-\alpha) - P + T\cos\beta = 0 \end{cases} \qquad (I.9)$$

Из первого уравнения (I.8) и второго в (I.9) следует, что $T=\frac{\ell}{r}Q$. Из оставшихся двух: $Q=P(r+d)/r$. Откуда $T=\ell P/(r+d)$.

Задача I.2.(2.54).Земляная насыпь подпирается вертикальной каменной стеной АВ.Найти необходимую толщину стены a ,предполагая, что давление земли на стену направлено горизонтально, приложено на I/3 ее высоты и равно 60 кН/м (на метр длины стены);удельный вес кладки 20 кН/м^3.Стена должна быть рассчитана на опрокидывание вокруг ребра А.

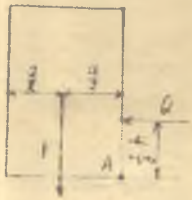


Рис.1.4.

Решение. Если ℓ -длина стены, а a -ширина, то вес стены P и давление земли Q соответственно равны

$$P = \ell h a \cdot 20 \quad , \quad Q = 60\,\ell$$

В силу (I.8) момент сил относительно точки A должен быть равен нулю, т.е.

$$\sum m_A(F_k) = -\frac{a}{2}P + \frac{1}{3}h\,Q = 0$$

Откуда $a^2 = 2$.

Задачи для самостоятельного решения: №№ I.I, I.2, I.5, 2.3, 2.4, 2.I9, 2.2I, 2.35, 2.54, 2.55.

Занятие 2. Плоская система параллельных сил. Общий случай плоской системы сил. Равнодействующая $\vec R$ двух параллельных сил $\vec F_1$ и $\vec F_2$ ($\vec F_1 \neq -\vec F_2$) равна векторной сумме сил: $\vec R = \vec F_1 + \vec F_2$. Ее линия действия делит внутренним ($\vec F_1 = \lambda \vec F_2$, $\lambda > 0$) или внешним ($\vec F_1 = -\lambda \vec F_2$, $\lambda > 0$) образом расстояние между линиями действия данных сил на части, обратно пропорциональные этим силам.

Определение. Система двух параллельных сил, равных по модулю и направленных в противоположные стороны, называется парой сил (рис.2.I).

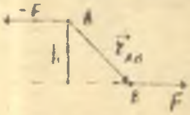


Рис.2.I.

Момент пары есть вектор

$$\vec m = \vec r_{AB} \times \vec F \ , \quad |\vec m| = |\vec F|\, h \qquad (2.I)$$

h -плечо пары. Момент положителен, если пара направлена против часовой стрелки. Основные свойства пары сил:

1. Для $\forall$ точки O:

$$\vec m = \vec m_0(\vec F) + \vec m_0(-\vec F) \qquad (2.2)$$

2. Пару можно переносить в плоскости ее действия без нарушения состояния тела.
3. Пары сил, моменты которых равны, эквивалентны.
4. Результатом сложения пар (на плоскости) является равнодействующая пара, момент которой равен сумме моментов слагаемых пар:

$$\vec m = \sum \vec m_k \qquad (2.3)$$

В случае произвольной плоской системы сил вводится понятие главного вектора $\vec V$ всех сил $\vec F_k$, приложенных к телу,

$$\vec V = \sum \vec F_k \qquad (2.4)$$

главного момента $\vec m_0$ относительно центра O

$$\vec{m}_o = \sum_{k=1}^{n} m_o(\vec{F}_k) . \qquad (2.5)$$

Любая плоская система сил приводится к одной силе, равной $\vec{V}$ и приложенной в центре О, и паре сил с моментом $\vec{m}_o$. Необходимые и достаточные условия равновесия: $\vec{V}=0$, $\vec{m}_o=0$. Эти условия могут быть записаны в следующих эквивалентных формах:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx}=0 , \sum_{k=1}^{n} F_{ky}=0 , \sum_{k=1}^{n} m_o(\vec{F}_k)=0 \qquad (2.6)$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx}=0 , \sum_{k=1}^{n} m_{A_i}(\vec{F}_k)=0, \; i=1,2, \qquad (2.7)$$

где вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ не должен быть перпендикулярен оси Ох.

$$\sum_{k=1}^{n} m_{A_i}(\vec{F})=0 , \quad i=1,2,3, \qquad (2.8)$$

где точки A_i не лежат на одной прямой.

Если все силы $\vec{F}_i$ параллельны, то в (2.6)-(2.8) следует оставить два уравнения, одно из которых - для суммы моментов.

2.1.Центр параллельных сил. Пусть $\{\vec{F}_i\}_{i=1}^{n}$ -система параллельных сил, приложенных в точках $A_i(\xi_1^i,\xi_2^i,\xi_3^i)$. В системе координат $O\xi_\alpha$, $\alpha=1-3$, сила $\vec{F}_i$ характеризуется вектором $\vec{r}_i=\overrightarrow{OA_i}$. Точка приложения равнодействующей $\vec{R}=\sum\vec{F}_i$ определяется концом вектора $\vec{r}_c=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, причем,

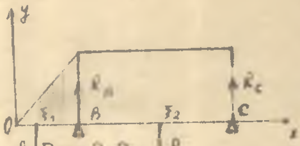
$$\vec{r}_c=\frac{\sum\vec{r}_i|\vec{F}_i|}{\sum|\vec{F}_i|} \Rightarrow \xi_\alpha=\frac{\sum\xi_\alpha^i|\vec{F}_i|}{\sum|\vec{F}_i|}, \; \alpha=1-3. \qquad (2.9)$$

Если $q(\xi)$ -интенсивность силы $\vec{F}_i$, т.е. $q=\frac{dF_i}{dS}$ (dS -элемент меры: длина, площадь, объем), то на элемент ΔS_i действует сила $\Delta\vec{F}_i=q(\xi^i)\Delta S_i\vec{e}_i$ ($\vec{e}_i$ -орт направления силы). Поэтому

$$\vec{r}_c=\frac{\sum\vec{r}_i q(\xi^i)\Delta S_i}{\sum q(\xi^i)\Delta S_i} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\int_{(S)} q\,\vec{r}\,dS}{\int_{(S)} q\,dS} \Rightarrow \xi_\alpha=\frac{\int_{(S)} q(x)x_\alpha dS}{\int_{(S)} q(x)dS} \qquad (2.10)$$

Для системы тел, находящихся в поле тяжести, формулы (2.9),(2.10) определяют центр тяжести системы.

Задача 2.1 (3.19). Горизонтальная балка АС, опертая в точках В и С, несет между опорами В и С равномерно распределенную нагрузку интенсивности q Н/м; на участке АВ интенсивность нагрузки уменьшается по линейному закону до нуля. Найти реакции опор В и С, пренебрегая весом балки.



P_1 Рис.2.2 P_2

Решение (рис.2.2). На участке ВС действует сила $P_2 = \ell q$, приложенная в точке ξ_2, где $2B\xi_2 = \ell$. На участке АВ действует сила

$$P_1 = \int_0^a \frac{q}{a} x\,dx = \frac{aq}{2}$$

Согласно (2.10), P_1 приложена в точке ξ_1 (отсчет от точки А), где

$$\xi_1 = \left(\int_0^a \frac{q}{a} x^2 dx\right)\left(\int_0^a \frac{q}{a} x\,dx\right)^{-1} = \frac{2}{3}a$$

Условие равновесия сил R_c, R_B, P_1, P_2 запишем для моментов этих сил относительно точек В и С:

$$\begin{cases} \sum m_B(F_k) = \frac{1}{3}a P_1 - \frac{\ell}{2} P_2 + R_c \ell = 0 \\ \sum m_C(F_k) = \frac{\ell}{2} P_2 + P_1\left(\ell + \frac{1}{3}a\right) - \ell R_B = 0 \end{cases}$$

Откуда

$$R_c = \frac{q}{6\ell}(3\ell^2 - a^2), \quad R_B = \frac{q}{6\ell}(3\ell^2 + 3a\ell + a^2).$$

Задача 2.2 (3.33). В шарнирном четырехзвенном механизме звено ВС параллельно неподвижному звену АД. Звено АВ$= h$ перпендикулярно АД. Посредине АВ приложена горизонтальная сила Р. Какую горизонтальную силу Q следует приложить к звену СД в точке Е, если СЕ=СД/4, чтобы механизм был в равновесии? Весом звеньев пренебречь.

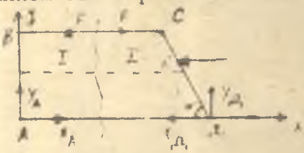


Рис.2.3

Решение (рис.2.3). Реакции связи в точках А и Д разобьем на составляющие Y_A, X_A и $Y_Д$, $X_Д$. Тогда имеем систему шести сил, пять из которых неизвестны: $X_A, X_Д, Y_A, Y_Д, Q$. Уравнения же равновесия - три. Поэтому разобьем механизм на две части I и II, заменив действие каждой из частей на другую некоторыми силами F и $-F$ (см. рисунок). Поскольку каждая из частей находится в равновесии то для части I имеем из условия равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = X_A + P - F = 0 \\ \sum F_{ky} = Y_A = 0 \\ \sum m_A(F_k) = -\frac{1}{2} h P + F h = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad F = \frac{P}{2}, \quad Y_A = 0, \quad X_A = -\frac{P}{2}$$

и, следовательно, направление X_A нужно заменить на противоположное. Аналогично для части II:

$$\sum F_{kx} = -Q - X_Д + F =$$

$$\begin{cases} \sum F_{ky} = Y_Д = 0, \\ \sum m_Д(F_k) = \frac{3}{4}(2l)\sin\alpha \cdot Q - F(2l)\sin\alpha = 0, \end{cases} \Rightarrow \quad Q = \frac{2}{3}P, \quad X_Д = -\frac{P}{6},$$

и $X_Д$ направлена по оси x.

Задачи для самостоятельной работы: №№ 3.1, 3.2, 3.18–3.26, 3.33, 3.38, 4.1–4.3, 4.41.

Занятие 3. Равновесие при наличии трения.

3.1. Сила трения скольжения $\vec{F_c}$ возникает между шероховатым телом и поверхностью. В этом случае равнодействующая активных сил $\vec{R}$ не нормальна к поверхности (рис.3.1.). Если $\vec{S}$ -реакция поверхности, то для равновесия необходимо, чтобы $\vec{S} = -\vec{R}$. Касательная составляющая $\vec{S}$ называется силой трения скольжения. Величина этой силы может меняться в некоторых пределах $F_c \in [0, F_{c\,max}]$, однако равновесие при этом не нарушится. Предельное значение силы трения определяется законом Кулона

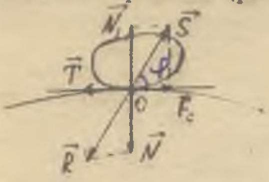


Рис.3.1.

$$F_{c\,max} = f N, \qquad (3.1)$$

где f -экспериментально определяемый коэффициент трения. Угол φ (рис.3.1) между нормалью к поверхности и $\vec{S}$ в предельном положении ($F_c = F_{c\,max}$) есть угол трения, причем $\operatorname{tg}\varphi = f$. Конус, описанный предельной реакцией $\vec{OS}$ вокруг $\vec{ON_1}$, называется конусом трения. Если равнодействующая проходит внутри конуса, то тело остается в покое.

3.2. Сила трения качения $\vec{F_K}$ возникает между катком радиуса r и веса P и плоскостью, на которой он находится в состоянии покоя, хотя сила $\vec{S}$ стремится сдвинуть каток (рис.3.2). Из опыта известно, что равновесие не нарушится, если $S \in [0, S_{max}]$. Так как силы $\vec{S}$ и $\vec{P}$ не параллельны, то равновесие может быть достигнуто только в том случае, когда реакция опоры $\vec{R}$ ~~не~~ проходит через центр O и смещена от вертикали на некоторое расстояние f_K (иначе у $\vec{R}$ нет горизонтальной составляющей, уравновешивающей $\vec{S}$). Касательная составляющая

Рис.3.2

реакции $\vec{S}$ и есть сила трения качения. Итак, в предельном положении равновесия каток находится под действием двух пар сил: $(\vec{P},\vec{N})$ и $(\vec{S}_{m},\ \vec{F})$, причем момент первой пары равен $r\cdot S_{max}$, а второй

$$m_{max}=f_k N, \tag{3.3}$$

где f_k -коэффициент трения качения (единица измерения-длина).

Для реализации чистого качения (без скольжения) необходимо, чтобы трение качения F_k было меньше трения скольжения, т.е.

$$F_k < fN. \tag{3.4}$$

3.3. Трение гибких тел возникает, например, при рассмотрении нити, навитой на цилиндр и удерживающей груз веса Р Для вычисления силы трения Т используется формула Эйлера

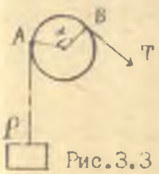


Рис.3.3

$$T=Pe^{-\alpha f}, \tag{3.5}$$

где α -угол охвата цилиндра нитью, f -коэффициент трения нити о цилиндр

Условия равновесия при наличии трения остаются такими же, как и в разделе 2. Однако, вместо равенств вида (2.5) могут, если силы трения не достигли предельных значений, возникнуть и неравенства.

Задача 3.I (5.28). Лестница АВ веса Р упирается в гладкую стену и опирается на горизонтальный негладкий пол. Коэффициент трения лестницы о пол равен f. Под каким углом α к полу надо поставить лестницу, чтобы по ней мог подняться доверху человек, вес которого равен p ?

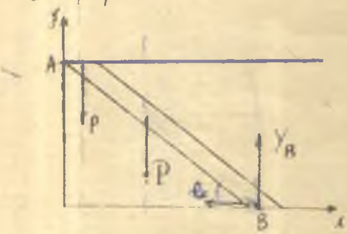


Рис.3.4

Решение. Система сил: X_A, Y_B- реакции связи; Р, p-вес лестницы и вес человека; F_c -трение скольжения (см. рис.3.4). Условия равновесия: $(l=AB)$

$$\sum F_{kx} = X_A - F_c = 0$$

$$\sum F_{ky} = -p - P + Y_B = 0$$

$$\sum m_B(F_k) = \frac{l}{2}P\cos\alpha + \underbrace{pl\sin\alpha}_{\cos\alpha} - X_A l\sin\alpha = 0$$

и, согласно (3.I),

$$F_c \le F_{c\,max} = f\,Y_B \qquad (3.6)$$

Из второго и третьего равенств в условиях равновесия выводим:

$$Y_B = p + P\,, \qquad \frac{1}{2}P + p = X_A\,tg\,\alpha$$

Откуда, с учетом (3.6), окончательно получаем

$$\frac{1}{2}P + p \le f(p+P)\,tg\,\alpha \;\Rightarrow\; tg\,\alpha \ge \frac{2p+P}{2f(p+P)}\,.$$

Задача 3.2. (5.39). Определить силу P, необходимую для равномерного качения цилиндрического катка диаметра d =60см и веса Q =300Н по горизонтальной плоскости, если коэффициент трения качения k =0,5 см, а угол составляемый силой P с горизонтальной плоскостью равен α =30 .

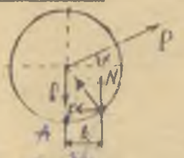


Рис.3.5

Решение. Условия равновесия (см.рис.3.5):

$$\sum F_{kx} = P\cos\alpha - F = 0\,, \qquad \sum F_{ky} = N - Q + P\sin\alpha = 0$$

$$\sum m_C(F_k) = Qk - Pk\sin\alpha - P\frac{d}{2}\cos\alpha = 0$$

Откуда

$$P = \frac{Qk}{k\sin\alpha + \frac{d}{2}\cos\alpha}\,, \qquad F = P\cos\alpha\,, \qquad N = Q - P\sin\alpha\,.$$

Задачи для самостоятельной работы №№ 5.8; 5.7; 5.II; 5.I6; 5.28; 5.29; 5.3I; 5.39; 5.40.

Занятие 4 (4часа). Равновесие пространственной системы сил

4.I. Система сходящихся сил. Как и в плоском случае (см.Занятие I), необходимым и достаточным условием равновесия системы сходящихся сил является равенство нулю векторной суммы всех сил:

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0\,, \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} F_{k x_\alpha} = 0\,, \quad \alpha = 1,2,3. \qquad (4.I)$$

4.2. Момент силы относительно некоторой оси $\vec{l}$ есть проекция на эту ось момента силы относительно любой точки оси.

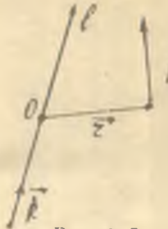


Рис.4.I

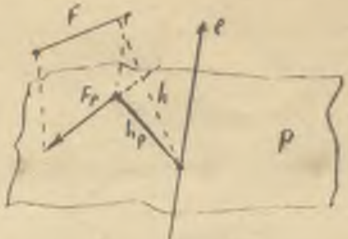


Рис.4.2

Согласно (I.3) момент силы $\vec F$ относительно точки 0 есть

$$m_o(\vec F) = \vec r \times \vec F. \tag{4.2}$$

Тогда момент относительно оси $\vec \ell$ (Рис.4.I):

$$m_\ell(\vec F) = (\vec r \times \vec F)\cdot \vec k, \tag{4.3}$$

где $\vec k$ -орт оси $\vec \ell$.Если P нормальная к оси $\vec \ell$ плоскость, а F_p - проекция $\vec F$ на P, h_p -расстояние от F_p до точки 0, то

$$|m_\ell(\vec F)| = \pm F_p h_p,$$

где знак "+" берется в том случае, если при наблюдении с конца оси $\vec \ell$ видно, что F_p стремится повернуть тело вокруг точки 0 против часовой стрелки. В противном случае момент отрицателен (рис.4.2). Случаи равенства нулю момента силы $\vec F$ относительно оси $\vec \ell$ очевидны: либо $\vec F \parallel \vec \ell$ (т.е. $F_p = 0$), либо линия действия $\vec F$ пересекает ось $\vec \ell$ (т.е. $h_p = 0$).

Пусть

$$\vec r = x\vec i + y\vec j + z\vec k, \quad \vec F = (F_x, F_y, F_z)$$

Тогда моменты относительно осей декартовой системы $Oxyz$ есть

$$m_x = yF_z - zF_y, \quad m_y = zF_x - xF_z, \quad m_z = xF_y - yF_x, \tag{4.5}$$

$$m_o(\vec F) = m_x\vec i + m_y\vec j + m_z\vec k.$$

4.3. Произвольная пространственная система сил. Аналогично плоскому случаю для пространственной системы сил $\vec F_k$ вводится понятие главного момента (г.м.) относительно точки O и г.м. относительно оси $\vec \ell$ как соответствующие суммы моментов всех сил:

$$\vec{m}_o(\vec{F}) = \sum_{k=1}^{n} m_o(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{F}_k , \qquad (7.I)$$

$$m_\ell(\vec{F}) = \vec{m}_o(\vec{F})\cdot\vec{k} = \sum_{k=1}^{n} (\vec{r}_k \times \vec{F}_k)\cdot\vec{k} . \qquad (4.7)$$

Главные моменты относительно осей в системе $Oxyz$

$$m_x = \sum_{k=1}^{n} m_x(F_k) = \sum_{k=1}^{n} (y_k F_{kz} - z_k F_{ky}), \quad m_y = \sum_{k=1}^{n} m_y(F_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (z_k F_{kx} - x_k F_{kz}), \quad m_z = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k) = \sum_{k=1}^{n} (x_k F_{ky} - y_k F_{kx}).$$

Если точка из (4.6) совпадае с началом координат, то вектор $\vec{m}_o(\vec{F})$ имеет разложение вида

$$\vec{m}_o(\vec{F}) = m_x \vec{i} + m_y \vec{j} + m_z \vec{k}$$

и, следовательно,

$$|\vec{m}_o| = m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 , \quad \cos(x_i, \vec{n}) = \frac{m_{x_i}}{|\vec{m}_o|} , \; i = 1,2,3. \qquad (4.8)$$

Как и в плоском случае для равнодействующей $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$ справедлива теорема Вариньона:

$$\vec{m}_o(\vec{R}) = \sum_{k=1}^{n} m_o(\vec{F}_k), \quad m_\ell(\vec{R}) = \sum m_\ell(\vec{F}_k) \qquad (4.9)$$

и теория пар сил (см. Занятие 2).

Пространственная система сил $\{\vec{F}_k\}$ приводится относительно некоторого центра (точка О) к главному вектору сил $\vec{V} = \sum \vec{F}_k$, приложенному в точке О, и паре сил, момент которой равен главному моменту $\vec{m}_o$ (относительно этой же точки О). Компоненты $\vec{m}_o$ есть определенные в (4.7) главные моменты относительно осей координат. При замене центра приведения на новый (точку А) главный момент меняется: $\vec{m}_A = \vec{m}_o + \vec{m}_A(\vec{V}_o)$, где $\vec{V}_o$ -главный вектор сил, приложенный в точке О. При этом остаются неизменными две величины: $\vec{V}$ - (первый статический инвариант) и скалярное произведение $\vec{V}\cdot\vec{m}_o$ (второй статический инвариант).

4.4. Необходимые и достаточные условия равновесия системы сил:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx_\alpha} = 0 , \quad \sum_{k=1}^{n} m_{x_\alpha}(\vec{F}_k) = 0 , \quad \alpha = 1,2,3. \qquad (4.I0)$$

система

а (4.I0) шести скалярных уравнений дает решение задачи в случае более шести неизвестных.

Задача 4.I. (6.1) Угловой столб составлен из двух одинаково наклоненных брусьев AB и AC, скрепленных в вершине посредством шарнира. Угол BAC=30. Столб поддерживает два горизонтальных провода АД и АЕ, составляющих между собой прямой угол. Натяжение каждого провода равно T=I кН. Определить усилия в брусьях, предполагая, что плоскость ВАС делит пополам угол ДАЕ, пренебрегая весом брусьев.

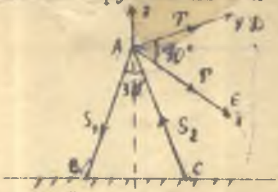


Рис.4.3.

Решение. Система сил S_1, S_2 и T сходится в точке А. Оси координат направим, как указано на рисунке. Тогда

$$\sum F_{kx} = -S_1 \sin 75^\circ + S_2 \sin 75^\circ = 0 \Rightarrow S_1 = S_2,$$

$$\sum F_{ky} = -S_1 \cos 75^\circ \cos 45^\circ - S_2 \cos 75^\circ \cos 45^\circ + T = 0$$

Откуда

$$S_1 = S_2 = \frac{T}{2\cos 45^\circ \cdot \cos 75^\circ}.$$

Задача 4.2. (8.9) Стол стоит на трех ножках, концы которых A, B, C образуют равносторонний треугольник со стороной a. Вес стола равен P, причем центр тяжести его расположен на вертикали CC_1, проходящей через центр O, треугольника ABC. На столе помещен груз p в точке M, координаты которой x и y; ось Oy параллельна AB. Определить давление каждой ножки на пол.

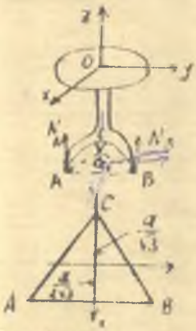


Рис.4.4

Решение. Направление сил и оси координат указаны на рисунке. Проекции сил на оси Ox и Oy равны нулю. Проекция на Oz дает

$$N_A + N_B + N_C = p + P \qquad (4.II)$$

I) Т.к. все силы параллельны Oz, то их моменты относительно этой оси равны нулю (проекции сил на плоскость Oxy равны нулю)

2) Относительно оси Ox имеем (см. нижний рисунок)

$$m_x(P) = m_x(N_C) = 0, \quad m_x(p) = -py, \quad m_x(N_A) = -N_A\frac{a}{2}, \quad m_x(N_B) = \frac{a}{2}N_B.$$

Тем самым,

$$(N_B - N_A)\frac{a}{2} - Py = 0 \Rightarrow N_B - N_A = \frac{2P}{a}y \qquad (4.12)$$

3)Относительно оси Оу имеем:

$$m_y(\mathcal{P}) = 0,\ m_y(N_B) = -N_B\frac{a}{2\sqrt{3}},\ m_y(N_A) = -N_A\frac{a}{2\sqrt{3}},$$

$$m_y(N_C) = N_C\frac{a}{\sqrt{3}}$$

Тем самым,

$$Px - \frac{a}{2\sqrt{3}}(N_B + N_A - 2N_C) = 0 \qquad (4.13)$$

4) Объединяя (4.II)-(4.I2), получим следующую систему для определения N_A, N_B, N_C :

$$N_A + N_B + N_C = P + \mathcal{P}$$

$$N_A + N_B - 2N_C = \frac{2\sqrt{3}}{a}Px$$

$$-N_A + N_B = \frac{2}{a}Py .$$

Решение последней есть

$$N_A = \frac{P+\mathcal{P}}{3} - \frac{P}{a}\left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}x\right),\ N_B = \frac{P+\mathcal{P}}{3} + \frac{P}{a}\left(y + \frac{\sqrt{3}}{3}x\right),$$

$$N_C = \frac{P+\mathcal{P}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3a}Px .$$

Задачи для самостоятельной работы: 6.I;6.2;6.9;6.I7;8.I;8.9;
8.I0;8.40;8.4I;8.43.

Занятие 5.Центр тяжести. Рассмотренный в разделе 2.I занятия 2 центр параллельных сил для случая сил тяжести называется центром тяжести.Координаты этого центра определяются формулами (2.9).Если силы F_i заменить на массы m_i , то (2.9) дает центр масс.Пусть F_i - силы тяжести.Для ТТ плотностью ρ имеем, что $F_i = \rho g\,\Omega_i$, где Ω_i - мера $i^{\underline{й}}$ части тела (Ω_i -длина,площадь, объем).Тогда (2.9) принимает вид

$$\vec{r} = \frac{1}{\Omega}\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i\,\Omega_i,\ \Omega = \sum_{i=1}^{n}\Omega_i \Rightarrow \xi_j = \frac{1}{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\xi_j^i\,\Omega_i,\ j=\overline{1-3} \qquad (5.1)$$

и при $n \to \infty$

$$\vec{r}_c = \frac{1}{\Omega}\int\limits_{\Omega} \vec{r}\, d\Omega \Rightarrow \xi_\alpha = \frac{1}{\Omega}\int\limits_{\Omega} x_\alpha\, d\Omega,\ \alpha = \overline{1-3}. \qquad (5.2)$$

При вычислении центра тяжести линий и плоских фигур можно пользоваться следующими двумя теоремами Гульдина

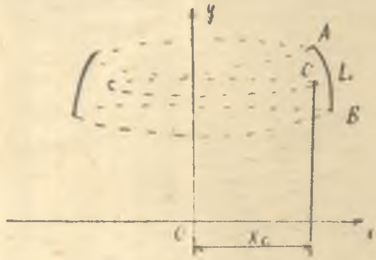


Рис.5.I

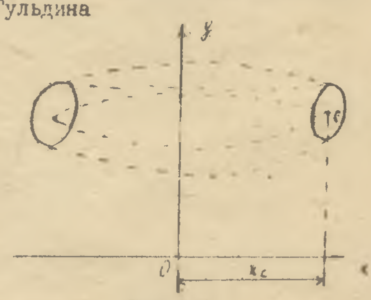


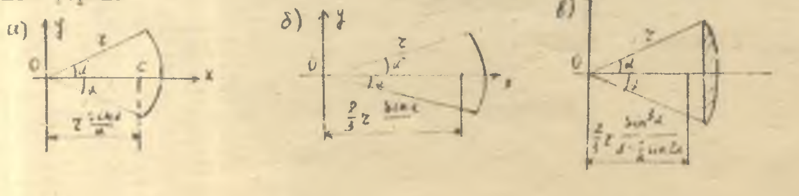
Рис.5.2

Т.I(Рис.5.I) Площадь боковой поверхности тела вращения, описанной плоской кривой АВ, вращающейся вокруг оси (y), расположенной в плоскости кривой и ее не пересекающей, равна произведению длины дуги L на длину окружности $2\pi X_c$, описываемой центром тяжести С дуги: $S = 2\pi L X_c$.

Т.2(Рис.5.2)Объем тела вращения, описанного плоской фигурой, вращающейся вокруг оси (y), расположенной в плоскости этой фигуры и не пересекающей ее контура, равен произведению площади фигуры S на длину окружности $2\pi X_c$, описанной ее центром тяжести С, $V = 2\pi S X_c$.

Если ТТ разбить на части, положение центров тяжестей которых известно, то центр тяжести ТТ определяется с помощью (5.I). В некоторых случаях ТТ удобно представить в виде разности отдельных частей (см.пример 2).Задача отыскания центра тяжести упрощается, если использовать симметрию тела и соответствующим образом выбрать координаты (т.е.понизить размерность задачи).

Положение центров тяжести некоторых однородных ТТ простейшей формы:



а) дуга окружности: $x_c = r\frac{\sin\alpha}{\alpha}$, б) сектор: $x_c = \frac{2}{3} r \frac{\sin\alpha}{\alpha}$,

в) сегмент: $x_c = \frac{2}{3} r \frac{\sin^3\alpha}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}$ г) призма: $C_1 C = C_2 C$

д), е) пирамида и конус: $C_1 C = \frac{1}{4} C_2 C_1$

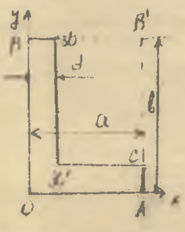
где C_i -центры тяжести оснований.

Пример I. Найдем центр тяжести дуги однородной окружности. Имеем согласно (5.2):

$$x_c = \frac{1}{\Omega}\int_{(\Omega)} x\,d\Omega, \quad x = r\cos\alpha, \quad d\Omega = r\,d\alpha, \quad \alpha\in[-\alpha,\alpha],$$

$$\Omega = \int_{-\alpha}^{\alpha} r\,d\alpha = 2r\alpha \Rightarrow x_c = \frac{1}{2r\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} r^2\cos\alpha\,d\alpha = \frac{r}{2\alpha}\sin\alpha\Big|_{-\alpha}^{\alpha} = r\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Пример 2 (9.8). Найти координаты центра тяжести поперечного сечения неравнобокого уголка, полки которого имеют ширину ОА= а, ОВ=б и толщину АС=ВД= d.



Решение. Дополним уголок до прямоугольника ОВВ'А. Центр тяжести этого прямоугольника есть

$$x_1 = \frac{1}{2}a, \quad y_1 = \frac{1}{2}b$$

, а площадь: $S_1 = ab$.

Аналогично для Д'ДВ'С:

$$x_2 = \frac{a+d}{2}, \quad y_2 = \frac{b+d}{2},$$

а площадь: $S_2 = (a-d)(b-d)$ возьмем со знаком "минус". Тогда центр тяжести уголка есть:

$$x_c = \frac{bd + a^2 - d^2}{2[a+b-d]}, \quad y_c = \frac{b^2 + ad - d^2}{2[a+b-d]}.$$

самостоятельной работы: №№ 9.8,9.9,9.25,9.26; прове-
улы а)-е).

Динамика материальной точки

Занятие 6. Прямая и обратная задачи механики

6.1. Дифференциальное уравнение движения. Основное уравнение динамики материальной точки представляет собой математическое выражение второго закона Ньютона:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}, \tag{6.1}$$

или, в проекциях на оси Ox_α, α=1,2,3, декартовой системы координат

$$m\frac{d^2x_\alpha}{dt^2} = m\frac{dv_\alpha}{dt} = F_\alpha . \tag{6.2}$$

При естественном описании движения уравнения (6.2) имеют вид

$$m\frac{dv_{\tau_1}}{dt} = F_{\tau_1}, \quad m\frac{v^2_{\tau_1}}{\rho} = F_{\tau_2}, \quad F_{\tau_3}=0, \quad \vec{F}=\sum_{\alpha=1}^{3} F_{\tau_\alpha}\vec{\tau}_\alpha,$$

$$v_{\tau_1} = \frac{ds}{dt}, \quad |\vec{F}| = \sqrt{F^2_{\tau_1}+F^2_{\tau_2}}, \quad \cos(\vec{F},\vec{\tau}_\alpha) = \frac{F_{\tau_\alpha}}{|\vec{F}|}.$$

В динамике точки возникают две основные задачи:

прямая - по известным силам $\vec{F}$ определить кинематические характеристики движения, т.е. $\vec{a}$, $\vec{v}$, $\vec{r}$.

обратная - по известным кинематическим характеристикам определить силы, вызывающие данное движение.

6.2. Силы, встречающиеся в механике, являются в конечном итоге результатом проявления двух фундаментальных сил - гравитационной и электромагнитной.

а) закон Ньютона для точечных масс m_1 и m_2, находящихся на расстоянии r друг от друга

$$\vec{F}_н = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}, \tag{6.3}$$

γ - гравитационная постоянная ($\gamma = 6{,}673\cdot10^{-11}\ м^3/кг\cdot с^2$).

б) закон Кулона для двух точечных зарядов q_1 и q_2, находящихся на расстоянии r друг от друга

$$\vec{F}_к = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}, \tag{6.4}$$

где К - коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц. (7.1)

Часто встречаются следующие силы:

1) Однородная $\vec{F}=const$ (одинаковая во всех точках пространства).

2) Квазиупругая $\vec{F}=-æ\vec{r}$, действующая на материальную точку, находящуюся вблизи устойчивого равновесия.

3) Силы трения:

а) скольжения, качения (см. Занятие 3),

б) сопротивления среды, например, сила Стокса $\vec{F}=-\alpha\vec{v}$.

Задача 6.1.(27.15). Самолет начинает пикировать без начальной вертикальной скорости. Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости. Найти зависимость между вертикальной скоростью в данный момент, пройденным путем и максимальной скоростью пикирования.

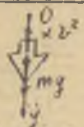


Рис.6.1.

Решение. Движение происходит вдоль оси Оу. Уравнение движения, согласно (6.2), имеет вид

$$m\dot{v}=m\ddot{y}=mg-\alpha\dot{y}^2;\quad \dot{y}=v \tag{6.5}$$

Считаем, что в начальный момент времени $t=0$ самолет находился в точке 0, т.е.

$$y(0)=0\quad,\ v(0)=\dot{y}(0)=0 \tag{6.6}$$

При интегрировании задачи (6.5),(6.6) сначала определяем скорость $v=\dot{y}(t)$, а затем пройденный путь $s(t)=y$. Исключая время, находим искомую зависимость $v(s)$. Однако, решение можно упростить. Заметим, что

$$\ddot{y}\,dy=\frac{d\dot{y}}{dt}dy=\dot{y}\,d\dot{y}=\frac{1}{2}d\dot{y}^2 .$$

Умножая уравнение (6.5) на dy , получим

$$\frac{d\dot{y}^2}{g-\frac{\alpha}{m}\dot{y}^2}=2\,dy\Rightarrow d\left[\frac{m}{\alpha}\ln\left|g-\frac{\alpha}{m}v^2\right|+2y\right]=0$$

и, следовательно,

$$\frac{m}{\alpha}\ln\left|g-\frac{\alpha}{m}v^2\right|+2y=C,$$

где постоянная С определяется из начальных условий: С= $\frac{m}{\alpha}\ln g$.
Кроме того, в точке максимума скорости $\dot{v}=0$ и, с учетом (6.5):

$$v^2_{max}=\frac{mg}{\alpha}$$

меняя в-

...с представлении для скорости С и $\frac{m}{\alpha}$ через $\frac{v^2_{max}}{g}$, ...тельно получаем

$$v^2(t) = v^2_{max}\left(1 - e^{-\frac{2gS}{v^2_{max}}}\right).$$

Задача 6.2. (27.54). Точка массы m движется под действием силы отталкивания от неподвижного центра О, изменяющейся по закону $\vec{F} = k^2 m \vec{r}$, где $\vec{r}$ -радиус-вектор точки. В начальный момент точка находилась в $M_0(a,0)$ и имела скорость v_0, направленную пареллельно оси у. Определить траекторию точки.

Решение. Уравнения движения (6.2) в данном случае имеют вид

$$m\ddot{x} = k^2 m x, \quad m\ddot{y} = k^2 m y \tag{6.7}$$

причем, при $t = 0$

$$x = a, \; \dot{x} = 0, \; y = 0, \; \dot{y} = v_0 \tag{6.8}$$

Так как характеристическое уравнение для каждого из уравнений в (6.7) есть $p^2 - k^2 = 0$, то

$$x = c_1 e^{kt} + c_2 e^{-kt}, \quad y = c_3 e^{kt} + c_4 e^{-kt}$$

Постоянные C_i определяются из (6.8):

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = a \\ kc_1 - kc_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = \frac{a}{2}; \quad \begin{cases} c_3 + c_4 = 0 \\ kc_3 - kc_4 = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} c_3 = \frac{v_0}{2k} \\ c_4 = -c_3. \end{array}$$

Тем самым,

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{2}(e^{kt} + e^{-kt}) = ch\,kt, \quad \frac{ky}{a} = sh\,kt.$$

Исключая время, получаем траекторию точки

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{ky}{v_0}\right)^2 = 1,$$

которая является гиперболой.

Задачи для самостоятельной работы: №№ 27.11-27.20; 27,57.

Занятие 7. Общие теоремы динамики точки.

7.1. Импульс, момент импульса кинетическая энергия материальной точки массы m, движущейся со скоростью $\vec{v}$, определяются следующим образом:

$$\vec{K} = m\vec{v},\ \vec{\mathcal{L}}_o = \vec{r}\times\vec{F},\ E = \frac{1}{2}mv^2, \tag{7.1}$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор материальной точки относительно центра 0. Если $\vec{r}=(x,y,z)$, то компоненты $\vec{\mathcal{L}}_o$ есть

$$\mathcal{L}_{ox} = m(y\dot{z}-z\dot{y}),\ \mathcal{L}_{oy} = m(z\dot{x}-x\dot{z}),\ \mathcal{L}_{oz} = m(x\dot{y}-y\dot{x}). \tag{7.2}$$

7.2. Теоремы об изменении импульса, момента импульса и кинетической энергии имеют вид

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F},\quad \frac{d\vec{\mathcal{L}}_c}{dt} = \mathcal{M}_o(\vec{F}),\quad \frac{dE}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} \tag{7.3}$$

Здесь $\vec{F}$ - сила, действующая на точку, $\mathcal{M}_o(\vec{F})$-момент силы относительно точки 0, $\vec{F}\cdot\vec{v}=N$ -мощность. Соотношения (7.3) являются следствием второго закона Ньютона.

Определение. Импульсом силы $\vec{F}$, действующей в течении промежутка времени t_2, t_1, называется величина

$$\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,dt \tag{7.4}$$

Интегрируя первое равенство в (7.3) по времени, получим

$$\boxed{\vec{K}(t_2) - \vec{K}(t_1) = \vec{S}.} \tag{7.5}$$

7.3. Работа. При бесконечно малом перемещении $d\vec{r}$ материальной точки под действием силы $\vec{F}$ последняя совершает элементарную работу

$$\delta A = \vec{F}\cdot d\vec{r}. \tag{7.6}$$

При перемещении точки из положения "I" в положение "2" по некоторому пути L силой $\vec{F}$ совершается работа

$$A = \int_L \vec{F}\cdot d\vec{r}, \tag{7.7}$$

где интеграл берется вдоль пути L.

Задачи для самостоятельной работы: №№ 28.7-28.9, 29.I2-29.I4 , 30.7-30.I2.

Занятие 8. Движение под действием центральной силы

8.I. Интеграл площадей. Если линия действия силы $\vec{F}$ проходит через центр О, то сила называется центральной. Ее момент относительно этого центра равен нулю. Согласно же (7.3), в этом случае производная по времени от $\vec{\mathcal{L}}_o$ равна нулю и, следовательно, момент импульса является постоянным вектором

$$\vec{\mathcal{L}}_o = \vec{c} = (c_1, c_2, c_3). \qquad (8.I)$$

Пусть $\vec{r} = \vec{OP}$ - радиус-вектор точки $P(x,y,z)$. Очевидно, что

$$\vec{c}\cdot\vec{r} = m(\vec{r}\times\vec{v})\cdot\vec{r} = 0 \qquad (8.2)$$

Но левая часть этого равенства определяет плоскость

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0,$$

и, следовательно, точка Р лежит в этой плоскости(последняя, в свою очередь, нормальна вектору $\vec{\mathcal{L}}_o$). Без ограничения общности примем, что точка Р движется в плоскости $z=0$ и $\mathcal{M}_z(t)\neq 0$. Вводя полярную систему координат $x = r(t)\cos\varphi(t)$, $y = r(t)\sin\varphi(t)$, третью компоненту вектора $\vec{\mathcal{L}}_o$ (т.е. $m(y\dot{x} - \dot{y}x) = c_3$) можно привести к виду

$$r^2\dot{\varphi} = c \equiv \frac{c_3}{m} \qquad (8.3)$$

Это соотношение носит название интеграла площадей. Пусть Р и P_0- начальное и текущее положение точки Р на траектории. Точки р и p_0 с координатами (x, y) и $(x+dx, y+dy)$ -суть проекции P_0 и Р на плоскость Оxy. Площадь треугольника Opp_0 есть (рис. 8.I)

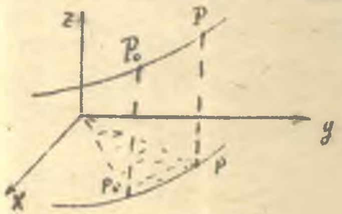


Рис.8.I

$$ds = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y \\ x+dx & y+dy \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$$

Откуда

$$\dot{S} = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) = \frac{1}{2}c. \qquad (8.4)$$

$S = S(t_0) + \frac{c}{2}(t - t_0)$

Т.о., площадь S "заметается" с постоянной скоростью (закон площадей). Заметим, что наличие закона площадей свидетельствует о движении под действием центральной силы.

8.2. Секторная скорость водится как "быстрота" изменения площади плоского элемента OPN, образованного радиус-вектором $\vec{r}$ и концом N вектора скорости $\vec{v}$

Рис.8.2

$$\vec{S}_0 \stackrel{df}{=} \frac{1}{2}\,\vec{r}\times\vec{v} = \frac{1}{2m}\,\vec{L}_0 \tag{8.5}$$

В случае центральной силы

$$\vec{S}_0 = \frac{\vec{c}}{2m} \tag{8.6}$$

и, следовательно, секторная скорость постоянна. Это эквивалентно (8.4) (т.к. $S_0 = \dot{S}$).

8.3. Формула Бине . Уравнение движения точки в полярной системе координат имеет вид

$$m\,(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r \tag{8.7}$$

Но с учетом (8.3)

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\,\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}\,\frac{dr}{d\varphi} = -c\,\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right), \quad \ddot{r} = -\frac{c^2}{r^2}\,\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right),$$

поэтому для $u = \frac{1}{r}$ имеем из (8.7) искомую формулу Бине

$$F_r = -m\,c^2u^2\left[u + \frac{d^2u}{d\varphi^2}\right]. \tag{8.8}$$

Соотношение (8.8) позволяет определять траекторию точки по заданной силе F_r и наоборот.

Пример I (28.16). Точка массы m ,подверженная действию центральной силы F , описывает лемнискату $r^2 = a\cos 2\varphi$, где a - величина постоянная, r - расстояние точки от силового центра; в начальный момент $r = r_0$, скорость точки равна v_0 и составляет угол α с прямой, соединяющей точку с силовым центром. Определить величину силы F , зная, что она зависит только от расстояния r .

Сила $\vec{F}$ называется консервативной, если работа не зависит от пути, а определяется лишь начальным и конечным положением перемещаемой точки. В этом случае можно ввести скалярную функцию координат $U(\vec{r})$ такую, что $\vec{F} = -\nabla U$ (тогда $rot\,\vec{F} = 0$ и δA есть полный дифференциал). Функция U называется потенциальной энергией и определена с точностью до аддитивной постоянной.
Итак, в консервативном силовом поле

$$A = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) \tag{7.8}$$

Величина

$$\mathcal{E} = E + U \tag{7.9}$$

называется полной энергией материальной точки.
Из третьего уравнения в (7.3) следует, что

$$dE = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \delta A \tag{7.10}$$

или

$$E_2 - E_1 = \int\limits_L \vec{F}\cdot d\vec{r} = A \tag{7.11}$$

С учетом (7.8) из (7.11) следует

$$E_2 + U_2 = E_1 + U_1 , \tag{7.12}$$

т.е. в консервативном силовом поле полная энергия сохраняется.
7.4. <u>Мощность</u> определяется работой, совершаемой силой в единицу времени

$$N = \frac{dA}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} . \tag{7.13}$$

<u>Пример I (28.8)</u>. Точка М движется вокруг неподвижного центра под действием силы притяжения к этому центру. Найти скорость v_2 в наиболее удаленной от центра точке траектории, есл скорость точки в наиболее близком к нему положении $v_1 = 30$ см/с, а $r_2 = 5\,r_1$.

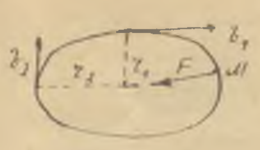


Рис.7.I

Решение. Поскольку $M_0(F)=0$, то в силу (7.3)

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt}=0,\ \Rightarrow \vec{L}_0=m\,\vec{r}\times\vec{v}=\vec{C}$$

Учитывая, что в предельных положениях, указанных на рисунке, углы между $\vec{r}$ и $\vec{v}$ известны и равны 90^0, из постоянства момента импульса получаем

$$r_1 v_1 = r_2 v_2 \Rightarrow v_2=\frac{r_1}{r_2}v_1=6\ м/с\ .$$

Пример 2 (29.I2). К концу упругой пружины подвешан груз массы М. Для растяжения пружины на 1 м надо приложить силу в c Н. Составить выражение полной механической энергии груза на пружине. Движение отнести к оси Ох, проведенной вертикально вниз из положения равновесия груза на пружине.

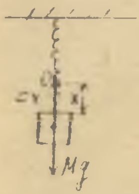


Рис.7.2

Решение. Груз находится под действием силы тяжести Mg и силы Гука: $-cx$, так что результирующая сила равна

$$F=Mg-cx\,,$$

и, очевидно, является консервативной, т.е.

$$F=-\frac{\partial}{\partial x}U \Rightarrow U(x)=\frac{c}{2}x^2-Mgx+C_1\,,$$

где C_I - некоторая произвольная постоянная. Согласно же (7.9)

$$\mathcal{E}=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+c\frac{x^2}{2}-Mgx\,.$$

Другой способ: уравнение движения груза

$$M\frac{dv}{dt}=Mg-cx$$

умножим на $\dot{x}=v$. Тогда получим

$$\frac{d}{dt}\left[M\frac{v^2}{2}-Mgx+\frac{c}{2}x^2\right]=0\,.$$

Но выражение в прямых скобках и есть полная механическая энергия, которая есть величина постоянная.

Задачи для самостоятельной работы: №№ 28.7-28.9, 29.I2-29.I4 , 30.7-30.I2.

Занятие 8. Движение под действием центральной силы

8.I. Интеграл площадей. Если линия действия силы $\vec{F}$ проходит через центр O, то сила называется центральной. Ее момент относительно этого центра равен нулю. Согласно же (7.3), в этом случае производная по времени от $\vec{\mathcal{L}}_0$ равна нулю и, следовательно, момент импульса является постоянным вектором

$$\vec{\mathcal{L}}_0 = \vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \tag{8.I}$$

Пусть $\vec{r} = \vec{OP}$ - радиус-вектор точки P(x,y, z). Очевидно, что

$$\vec{c} \cdot \vec{r} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{r} = 0 \tag{8.2}$$

Но левая часть этого равенства определяет плоскость

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0,$$

и, следовательно, точка P лежит в этой плоскости(последняя, в свою очередь, нормальна вектору $\vec{\mathcal{L}}_0$). Без ограничения общности примем, что точка P движется в плоскости $z = 0$ и $M_z(\vec{F}) = 0$. Вводя полярную систему координат $x = r(t)\cos\varphi(t)$, $y = r(t)\sin\varphi(t)$, третью компоненту вектора $\vec{\mathcal{L}}_0$ (т.е. $m(y\dot{x} - \dot{y}x) = c_3$) можно привести к виду

$$r^2 \dot{\varphi} = c \equiv \frac{c_3}{m} \tag{8.3}$$

Это соотношение носит название интеграла площадей. Пусть P и P_0 - начальное и текущее положение точки P на траектории. Точки p и p_0 с координатами (x, y) и $(x+dx, y+dy)$ - суть проекции P_0 и P на плоскость Oxy. Площадь треугольника Opp_0 есть (рис. 8.I)

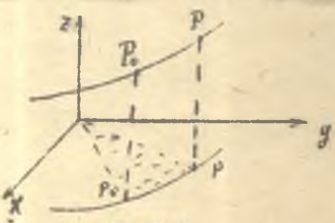


Рис.8.I

$$dS = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y \\ x+dx & y+dy \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$$

Откуда

$$\dot{S} = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) = \frac{1}{2}c \tag{8.4}$$

$S = S(t_0) + \frac{c}{2}(t - t_0)$

$\frac{S}{T} = \frac{c}{2}$

Т.о., площадь S "заметается" с постоянной скоростью (закон площадей). Заметим, что наличие закона площадей свидетельствует о движении под действием центральной силы.

8.2. Секторная скорость водится как "быстрота" изменения площади плоского элемента OPN, образованного радиус-вектором $\vec{r}$ и концом N вектора скорости $\vec{v}$

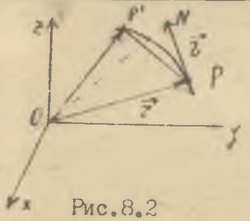


Рис.8.2

$$\vec{S}_0 \stackrel{def}{=} \frac{1}{2}\,\vec{r}\times\vec{v} = \frac{1}{2m}\,\vec{L}_0 \qquad (8.5)$$

В случае центральной силы

$$\vec{S}_0 = \frac{\vec{C}}{2m} \qquad (8.6)$$

и, следовательно, секторная скорость постоянна. Это эквивалентно (8.4) (т.к. $S_0 = \dot{S}$).

8.3. Формула Бине . Уравнение движения точки в полярной системе координат имеет вид

$$m\,(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r \qquad (8.7)$$

Но с учетом (8.3)

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\cdot\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = -c\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right), \quad \ddot{r} = -\frac{c^2}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right),$$

поэтому для $u = \frac{1}{r}$ имеем из (8.7) искомую формулу Бине

$$F_r = -m\,c^2u^2\left[u + \frac{d^2u}{d\varphi^2}\right]. \qquad (8.8)$$

Соотношение (8.8) позволяет определять траекторию точки по заданной силе F_r и наоборот.

Пример I (28.16). Точка массы m ,подверженная действию центральной силы F , описывает лемнискату $r^2 = a\cos 2\varphi$, где a - величина постоянная, r - расстояние точки от силового центра; в начальный момент $r = r_0$, скорость точки равна v_0 и составляет угол α с прямой, соединяющей точку с силовым центром. Определить величину силы F , зная, что она зависит только от расстояния r .

Решение. Поскольку траектория задана, то сила определяется формулой Бине. Согласно (8.I)

$$c = r_0 v_0 \sin\alpha . \qquad r \times mv$$

Кроме того, имеем

$$u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{\sqrt{a}}\left[3\cos^{-\frac{5}{2}}2\varphi \sin^2 2\varphi + 2\cos^{-\frac{1}{2}}2\varphi \right].$$

Тем самым

$$F = -\frac{3(r_0 v_0 \sin\alpha)^2}{a^{3/2}\cos^{\frac{7}{2}}2\varphi} = -\frac{3(a r_0 v_0 \sin\alpha)^2}{r^7}$$

Пример 2 (28.I9). Частица M массы I кг притягивается к неподвижному центру O силой, обратно пропорциональной пятой степени расстояния. Эта сила равна 8 Н на расстоянии I м. В начальный момент частица находится на расстоянии OM_0=2м и имеет скорость, перпендикулярную к OM_0 и равную 0,5 м/с. Определить траекторию частицы.

Решение. Согласно условию задачи : $F=-8u^5$, c=I. Тогда

$$u'' + u = 8u^3 \quad , \quad u' = \frac{du}{d\varphi} . \tag{8.9}$$

В начальный момент t =0 считаем, что φ =0 и, кроме того, с учетом интеграла площадей $\dot\varphi = c u^2$: $\dot\varphi_0 = 1/4$. Далее имеем

$$v_0^2 = \dot r_0^2 + r_0^2 \dot\varphi_0^2 \quad \Rightarrow \quad \dot r_0 = \dot u_0 = 0 .$$

Введением функции $p(u) = u'$ понизим порядок уравнения (8.9)

$$p p' = 8u^3 - u$$

Тогда

$$p^2 = \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = 4u^4 - u^2 + C_1$$

Но постоянная C_I равна, в силу начальных условий, двум. Если перейти к функции $r = u^{-1}$, то получим

$$\frac{dr}{\sqrt{4 - r^2}} = \pm d\varphi$$

Откуда

$$\arcsin\frac{r}{2} = \pm\varphi + C_1\,,\quad C_1 = \frac{\pi}{2}\,.$$

Окончательно

$$r = \pm\, 2\cos\varphi$$

Перейдем в декартову систему координат

$$x = r\cos\varphi = \pm\, 2\cos^2\varphi\,,\qquad y = r\sin\varphi = \pm\, 2\sin\varphi\cos\varphi$$

Исключая угол φ , получим уравнение траектории вида

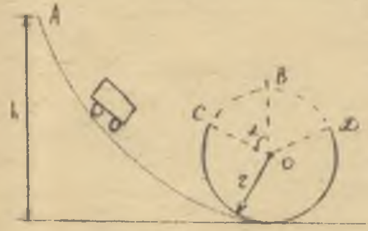
$$(x \mp 1)^2 + y^2 = 1\,.$$

Задачи для самостояте. ьной работы: №№ 28.16-28.20;51.10-51.20.

Занятие 9. Смешанные задачи

В этом разделе предлагаются задачи, при решении которых используются вспомогательные сведения трех предыдущих параграфов.

Пример 1 .31.4).Путь, по которому движется ваганетка, скатываясь из точки А, образует разомкнутую петлю радиуса r , как показано на рисунке: $\angle$ ВОС = $\angle$ ВОD = α . Найти, с какой высоты h должна скатываться вагонетка без начальной скорости, чтобы она могла пройти всю петлю, а также то значение угла α ,при котором эта высота h наименьшая.Принять, что на участке С центр тяжести вагонетки совершает параболическое движение.



Решение.Чтобы из точки D попасть в точку С, вагонетка как тело, движущееся в поле тяжести, должна иметь в точке С скорость, равную $v_c = (ag/\cos\alpha)^{1/2}$.Но из закона сохранения энергии имеем для этой точки:

$$mgh = mga(1+\cos\alpha) + \frac{1}{2}m\,v_c^2$$

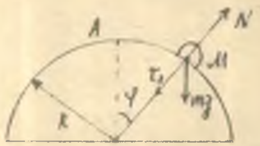
Откуда

$$h = a\left(1+\cos\alpha+\frac{1}{2\cos\alpha}\right).$$

Причем минимальное значение достигается при α =45°.

Пример 2 (31.22). Камень М, находящийся на вершине А гладкого полусферического купола радиуса R, получает начальную горизонтальную скорость v_0. В каком месте камень покинет купол? При каких значениях v_0 камень сойдет с купола в начальный момент? Сопротивлением движению камня по куполу пренебречь.

Решение. Воспользуемся естественным описанием движения. Тогда



уравнение движения в направлении нормали к сферической поверхности имеет вид

$$m\frac{v_M^2}{R} = mg\cos\varphi - N,$$

где N - реакция сферы. Условие схода камня со сферы есть $N=0$. Откуда $v_M^2 = gR\cos\varphi$. Из закона сохранения

$$mgR + \frac{mv_0^2}{2} = mgR\cos\varphi + \frac{mv_M^2}{2}$$

определяем искомую величину угла φ:

$$\cos\varphi = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}$$

Если же в начальный момент $\varphi=0$ и $N=0$, то

$$v_A^2 = v_0^2 = gR,$$

и, следовательно, $v_0 \geqslant \sqrt{gR}$.

Задачи для самостоятельной работы: №№ 31.3-31.15; 31.22-31.25. Номера задач указаны по сборнику /1/.

Теоретические вопросы

Введение. Предмет механики и ее место среди естественных наук. Методологические принципы механики, механика как одна из основ научно-технического прогресса. Основные этапы развития механики. Роль отечественных ученых в ее развитии. Математический аппарат классической механики. Роль конкретных проблем в развитии механики.

Кинематика. Пространство и время в классической механике. Группа преобразований Галилея. Механические модели материальных объектов: материальная точка, твердое тело, сплошная среда.

Способы задания движения точки и твердого тела. Скорость и ускорение точки и способы их разложений. Углы Эйлера. Угловая скорость и угловое ускорение твердого тела. Распределение скоростей и ускорений в твердом теле.

Сложное движение точки и твердого тела. Формулы сложения скоростей и ускорений. Сложение угловых скоростей.

Способы кинематического описания сплошной среды. Уравнение неразрывности.

Динамика механической системы. Основные понятия, определения и аксиомы классической механики. Трактовка понятий массы и силы. Дифференциальные уравнения движения точки. Соображения подобия и размерностей в механике.

Свободная и несвободная механические системы. Связи и их классификация. Пространство положений и пространство состояний. Степени свободы. Лагранжевы координаты.

Основные динамические характеристики: количество движения, момент количества движения (кинетический момент), кинетическая энергия, работа силы, силовая функция, потенциальная энергия. Осевые и центробежные моменты инерции, тензор инерции. Формула Гюйгенса - Штейнера. Формулы Кенига для вычисления момента количества движения и кинетической энергии.

Принцип Даламбера-Лагранжа. Принцип возможных перемещений. Условия равновесия твердого тела. Приведение системы сил, приложенных к твердому телу.

Теоремы об изменении количества движения, момента количества движения, кинетической энергии. Первые интегралы движения механических систем.

Уравнения Лагранжа. Их первые интегралы. Реакция связей и их определение. Уравнение Лагранжа с множителями. Группа симметрий и циклические интегралы. Законы сохранения количества движения, момента количеств движения и энергии как следствие инвариантности уравнений движения относительно группы преобразований Галилея. Теорема Нетер.

Движение точки в центральном поле сил. Задача двух тел. Применение общих теорем динамики системы к задаче многих тел.

Движение физического маятника. Динамические уравнения Эйлера движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Кинематические уравнения Эйлера и Пуассона. Случай Эйлера вращения вокруг центра масс твердого тела: геометрическое решение Пуансо, исследование фазовых траекторий, перманентные вращения. Волчок Лагранжа. Уравнения движения свободного твердого тела. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Определение реакций опор.

Дифференциальные уравнения относительного движения точки.

ГН

Силы инерции. Случай равномерно вращающейся системы координат. Интеграл Якоби. Вес тела. Маятник Фуко. Ограниченная круговая задача трех тел (области возможности, точки либрации).

Вариационные принципы механики. Принцип Гамильтона. Экстремальность действия по Гамильтону в фазовом пространстве. Принцип Якоби. Траектории движения консервативной системы как геодезические метрики Якоби.

Дуальное преобразование Лежандра и его свойство. Канонические уравнения Гамильтона. Функция Гамильтона. Интеграл Якоби.

Оптико-механическая аналогия.

Применение принципа Гамильтона в теории колебаний упругих систем. Вывод уравнений колебания струны и мембраны. Применение принципа Гамильтона в динамике идеальной жидкости. Гидродинамические уравнения Эйлера. Случай несжимаемой жидкости. Интеграл Бернулли.

Гамильтоновы системы. Интегральный инвариант Пуанкаре-Картана. Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема.

Гидродинамическая аналогия. Теорема Томсона о сохранении циркуляции скорости. Теорема Гельмгольца о вихрях.

Канонические преобразования. Производящая функция. Метод Якоби интегрирования уравнений Гамильтона. Скобки Пуассона и их свойства. Теорема Пуассона о первых интегралах. Фазовый поток гамильтоновой системы-семейство канонических преобразований. Гамильтоновы векторные поля и их коммутаторы. Условие коммутируемости фазовых потоков.

Интегрируемые гамильтоновы системы. Теорема Лиувилля об инволютивной системе первых интегралов. Канонические переменные действие-угол. Условно-периодические движения. Элементы теории возмущений. Метод усреднения.

Теория колебаний. Движение механической системы с одной степенью свободы в консервативном поле при наличии диссипативных сил. Фазовый портрет. Затухающие колебания. Вынужденные колебания при наличии периодического возбуждения. Резонанс. Параметрический резонанс.

Равновесие консервативной механической системы. Теорема Лагранжа об устойчивости равновесия. Устойчивость движения. Основные теоремы второго метода Ляпунова. Линеаризация уравнений движения колебательной системы. Нормальные координаты и собственные колебания. Влияние гироскопических сил на устойчивость равновесия.

Задача Эйлера о равновесии упругого стержня. Колебания упругих стержней и мембран. Уравнения линейной теории упругости.

Поведение собственных частот колебаний при изменении жесткости и при наложении новых связей. Экстремальные свойства собственных