4. Для любого $t_0 \in I_t^+$ существует M^δ такое, что при $x_0 \in M^\delta$ $\lim\limits_{t\to+\infty} V(t, x(t, x_0, t_0)) = 0$.

Разрешимость модельной задачи о движении динамически нейтральной примеси в тающем снеге

А.А. Папин, Н.С. Исаева
АлтГУ, г. Барнаул

Тающий снег рассматривается как трехфазная сплошная среда, состоящая из воды (i=1), воздуха (i=2) и льда (i=3). В основу математической модели положены уравнения сохранения массы для каждой из фаз [1], уравнения двухфазной фильтрации Маскета-Леверетта для воды и воздуха [2], уравнение теплового баланса снега [1] и уравнение диффузии для примеси [3]. Рассматриваемая система уравнений имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(ms_1\rho_1^0) + div(\rho_1^0\vec{v}_1) = I_{13},\ \frac{\partial}{\partial t}(ms_2\rho_2^0) + div(\rho_2^0\vec{v}_2) = 0,\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho_3^0(1-m)) = -I_{13},$$

$$\vec{v}_i = -K_0\frac{k_{0i}}{\mu_i}(\nabla p_i + \rho_i^0\vec{g}),\ i = 1,2,\ p_2 - p_1 = p_c(s_1,\theta),\ s_1 + s_2 = 1,$$

$$(\sum_{i=1}^{3}\rho_i^0(\theta)c_i\alpha_i)\frac{\partial\theta}{\partial t} + (\sum_{i=1}^{2}\rho_i^0(\theta)c_i\vec{v}_i)\nabla\theta = div(\lambda_c\nabla\theta) + \nu\frac{\partial\rho_3^0\alpha_3}{\partial t},$$

$$S + \frac{\partial}{\partial t}(ms_1\sigma) + div(\sigma\vec{v}_1 - D\nabla\sigma) = 0.$$

Здесь ρ_i^0, $\vec{v}_i = ms_i\vec{u}_i$ – соответственно истинные плотности воды, воздуха, льда и скорости фильтрации воды и воздуха, I_{13} – интенсивность перехода массы из 1-ой в 3-ю составляющую в единице объема и в единицу времени; m – пористость, s_1, s_2 – насыщенности воды и воздуха, $\vec{u}_i$ – истинные скорости фаз; K_0 – тензор фильтрации, k_{0i} – относительные фазовые проницаемости ($k_{0i} = k_{0i}(s_i) \geq 0,\ k_{0i}\big|_{s_i=0} = 0,$), μ_i – коэффициенты динамической вязкости, p_i – давления фаз, p_c – капиллярное давление, $\vec{g}$ – вектор ускорения силы тяжести; θ – температура среды ($\theta_i = \theta,\ i = 1,2,3$), $c_i > 0$ – теплоемкость i-й фазы при постоянном давлении, α_i – концентрация фаз ($\alpha_i = ms_i$, $i = 1,2$, $\alpha_i = 1 - m$), $\nu > 0$ – удельная теплота плавления льда, λ_c – коэффициент теплопроводности снега; σ – концентрация примеси, $D=\eta+\lambda_0|v_1|$, $\eta=const>0$ - коэффициент молекулярной диффузии, $\lambda_0=const>0$ – параметр дисперсии; $S=-\Gamma s(\sigma_*-\sigma)$, $\Gamma=const>0$, $\sigma_*=const\in[0,1]$. Система замыкается гипотезами: $\rho_1^0=\rho_1^0(\theta)>0$, $\rho_2^0=const>0$, $\rho_3^0=\rho_3^0(\theta)>0$, $I_{31}=I_{31}(\theta)$, $\vec{v}_3=0$, $I_{12}=I_{32}=0$.

Пусть в системе координат $Oxyz$ вектор $\vec{g}=(0,0,-g)$. Рассматривается следующая задача: снег занимает область $-\infty<z<ct$, $t>0$. При $z=-\infty$ вода и примесь отсутствуют ($s_1=0, v_1=0, \sigma=0$), воздух неподвижен ($v_2=0$) и поддерживается температура $\theta=\theta^-$ (ниже температуры плавления льда); при $z=ct$ подаются вода ($v_1=v_1^+\le 0$) и воздух ($v_2=v_2^+\le 0,\ p_2=p^+$) таким образом, что поддерживаются некоторые значения $s_1=s^+$, $\sigma=\sigma^+$ и $\theta=\theta^+$ (равная температуре плавления льда). В переменных $\xi=z-ct$ (c – неизвестная, подлежащая определению постоянная) возникает Задача 1:

$$-c\frac{d}{d\xi}(ms_1\rho_1^0(\theta)+\rho_3^0(\theta)(1-m))+\frac{d}{d\xi}(\rho_1^0(\theta)v_1)=0,$$

$$-c\frac{d}{d\xi}(ms_2\rho_2^0)+\frac{d}{d\xi}(\rho_2^0v_2)=0,$$

$$v_i=-K_0\frac{k_{0i}}{\mu_i}(\frac{dp_i}{d\xi}-\rho_i^0(\theta)g),\quad p_2-p_1=p_c(s_1,\theta),\quad s_1+s_2=1,$$

$$(\sum_{i=1}^{3}\rho_i^0(\theta)c_i(v_i-c\alpha_i))\frac{d\theta}{d\xi}+c\nu\frac{d\rho_3^0(\theta)(1-m)}{d\xi}=\frac{d}{d\xi}(\lambda_c\frac{d\theta}{d\xi}),$$

$$-\Gamma s(\sigma_*-\sigma)+\frac{d}{d\xi}(|c|\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0}(m-m^-)\sigma-D\frac{d\sigma}{d\xi})=0,$$

$$(s_1,\sigma,\theta-\theta^-,\frac{\partial\theta}{\partial\xi},\frac{\partial\sigma}{\partial\xi},v_i)\big|_{\xi\to-\infty}=0,$$

$$s_1(0)=s^+,\quad \sigma(0)=\sigma^+,\quad \theta(0)=\theta^+,\quad p_2=p^+,\quad v_i(0)=v_i^+,\quad i=1,2.$$

Задача 1 сводится к Задаче 2:

$$v_1=cms+c(1-m)\frac{\rho_3^0(\theta)}{\rho_1^0(\theta)}-c(1-m^-)\frac{\rho_3^0(\theta^-)}{\rho_1^0(\theta)},\quad v_2=cm(1-s)-cm^-,\quad s\equiv s_1,$$

$$\lambda_c\frac{d\theta}{d\xi}=c(c_1-c_3)M(\theta)+(A_1c_1+A_2c_2)(\theta-\theta^-)+\nu c[\rho_3^0(\theta)(1-m(\theta))-\rho_3^0(\theta^-)(1-m^-)],$$

$$A_1=-c\rho_3^0(\theta^-)(1-m^-),\quad A_2=-c\rho_2^0(\theta^-)m^-,\quad m^-\equiv m(\theta^-),$$

$$-k_{01}k_{02}K_0\frac{dp_c}{d\xi}=-\mu_1v_1k_{02}+\mu_2v_2k_{01}+K_0k_{01}k_{02}g(\rho_1^0(\theta)-\rho_2^0),$$

$$-\Gamma s(\sigma_* - \sigma) + \frac{d}{d\xi}(|c|\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0}(m - m^-)\sigma - D\frac{d\sigma}{d\xi}) = 0,$$

$$(\sigma, \frac{\partial \sigma}{\partial \xi})\Big|_{\xi \to -\infty} = 0, \quad s_1(0) = s^+, \quad \sigma(0) = \sigma^+, \quad \theta(0) = \theta^+, \quad M(\theta) \equiv \int_{\theta^-}^{\theta} \rho_3^0(x)(1 - m(x))dx.$$

Решение Задачи 2 назовем слабым решением Задачи 1.

Теорема. Пусть положительные числа $a_c, b_c, \nu, g, m^-, K_0$, $\theta^-, \theta_1, \theta^+$, s^+, ρ_2^0, c_i, (i=1,2,3) и непрерывные по $s \in [0,1]$ и $\theta \in [\theta^-, \theta^+]$ функции $m(\theta), \rho_1^0(\theta), \rho_3^0(\theta)$, $k_{0i} = \bar{k}_{0i}(s,\theta)s_i^{n_i}$, $n_i > 1$, $\mu_i(s,\theta), (i = 1,2)$, $p_c(s,\theta) = p_0(\theta)\gamma(s)$, $\lambda_c = a_c + b_c\rho_c^2$, $\rho_c = \rho_1^0 s_1 m + \rho_2^0 s_2 m + \rho_3^0(1 - m)$ удовлетворяют условиям:

a) $\rho_2^0 < \rho_3^0 < \rho_1^0$, $c_3 < c_1 < c_2$, $\dfrac{\nu}{c_1} \geq (1 - \dfrac{c_3}{c_1})(\theta_1 - \theta^-)$;

b) $m(\theta) = m^-$, $\rho_1^0(\theta) = \rho_1^1$, $\rho_3^0(\theta) = \rho_3^1$, при $\theta(\xi) \in [\theta^-, \theta_1]$;

$m(\theta) = m^- + \dfrac{1 - m^-}{\theta^+ - \theta_1}(\theta - \theta_1)$, $\rho_1^0(\theta) = a_3\theta + b_3$, $\rho_3^0(\theta) = a\theta + b$, при $\theta(\xi) \in [\theta_1, \theta^+]$;

$m(\theta) = 1$, $\rho_1^0(\theta) = \rho_1^3$, $\rho_3^0(\theta) = 0$, при $\theta(\xi) \geq \theta^+$;

c) $0 < (a = -k_{01}k_{02}\dfrac{d\gamma}{ds}, k_{01}, k_{02})$ при $s \in (0,1)$, $a\big|_{s=0,1} = k_{01}\big|_{s=0} = k_{02}\big|_{s=1} = 0$,

$\dfrac{1}{s}k_{01}k_{02}\gamma\big|_{s=0} = 0$, $\dfrac{d\gamma}{ds} \leq 0$, $a \geq \nu(s(1-s))^k$, $k = const > 0$, $\nu = const > 0$,

$0 < \nu^{-1}(\mu_i(s,\theta), p_0, \bar{k}_{0i}(s,\theta)) \leq \nu$, $\left(\left\|\dfrac{d\gamma}{ds}\right\|_{c[0,1]}, \left\|\dfrac{dp_0}{d\theta}\right\|_{c[\theta^-,\theta^+]}\right) \leq \nu.$

Тогда в $R^- = (-\infty, 0)$ существует, по крайней мере, одно слабое решение Задачи 1, обладающее свойствами:

$$0 \leq (s(\xi), \sigma(\xi)) \leq 1, \quad \theta^- \leq \theta(\xi) \leq \theta^+, \quad c = \frac{(1+\lambda)v_2^+}{(1 - m^-)(1 - \rho_3^0/\rho_1^0)} < 0, \quad \lambda \equiv \frac{v_1^+}{v_2^+} \geq 0,$$

$$(s, v_i, \rho_i, k_{01}k_{02}\frac{d\gamma}{d\xi}, \frac{d\theta}{d\xi}) \in C^\alpha(R^-), \quad \alpha = (1 + k)^{-1}.$$

Кроме того, существует точка $\xi_* \in R^-$ такая, что $s(\xi) = 0, \sigma(\xi) = 0$ для всех $\xi \leq \xi_*$.

Литература

1. Кучмент Л.С., Демидов В.Н., Мотовилов Ю.Г. Формирование речного стока. Физико-математические модели. – М.: Наука, 1983.

2. Бэр Я., Заславский Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. – М.: Мир, 1971.

3. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР. – М.: Наука, 1969.