Рекурсивный аналог гиперарифметической вычислимости

В.А. Ганов, Л.Л. Смолякова
АлтГУ, г. Барнаул

Рассматриваем абстрактные вычислительные машины с оракулами, являющиеся обобщениями машин Шенфилда из [2]. Команды таких машин разделяются на оперативные и спрашивающие. Виды этих команд и принципы работы машин, описаны в [1]. В частности, выполнение спрашивающей команды – это процедура получения ответов на вопросы, которые вычисляет машина согласно своей программе. Вопрос содержит программу и аргументы некоторой другой машины. Ответ на такой вопрос есть некоторое число, связанное с поведением этой машины, но процесс получения ответа не обязан быть алгоритмическим. В общем случае ответ дается машине извне, как значение некоторой процедуры или функции, называемой оракулом. Если для некоторого вопроса оракул не определен, то работа рассматриваемой машины считается не определенной. В таких случаях говорят, что машина застряла на некотором вопросе.

Один такт работа машины заключается в исполнении оперативной или спрашивающей команды. Количество тактов работы машины ограничено числом t, указанным в специальном счетчике тактов. Если счетчик тактов содержит 0 и машина не пришла в заключительное состояние, то считаем, что дальше машина работает бесконечно, и результат ее работы не определен.

Пусть запись $\{W\}_t^F(x)$ обозначает значение, которое вычисляет машина W на аргументах x, работая с оракулом F и с ограничением t, если оно определено. Через $\langle W, x, s\rangle$ обозначается код кортежа, в котором W – код некоторой машины, x – ее аргумент, t – ограничение. Такой код называется *инициальной машиной*. Говорят, что инициальная машина *хорошо работает с оракулом* F, если она получает ответы на все свои вопросы. Пусть $\overline{B}_t(F)$ – множество всех инициальных машин, которые хорошо работают с оракулом F и с ограничением t; $B_t(F)$ – множество всех машин из $\overline{B}_t(F)$, которые останавливаются с F.

Определим следующие числовые функции $H_t^m(z)$, где t,m – числовые параметры.

1. Пусть $z=\langle W,x,s\rangle$ – инициальная машина, хорошо работающая с оракулом H_t^m, $s<t$, тогда

$$H_t^m(z)=\begin{cases}\{W\}_s(x)+1, & \text{åñëè} \quad z\in B_s(H_t^m);\\ 0, & \text{åñëè} \quad z\in \overline{B}_s(H_t^m)\setminus B_s(H_t^m).\end{cases}$$

2. Пусть z выполняет спрашивающую команду, содержащую инициальную машину $z_1=\langle W_1,x_1,s_1\rangle$, $s_1<t$, тогда проверяем отношение $0<m$, даем значение $H_t^{m-1}(z_1)$ машине z в качестве ответа на заданный вопрос.

3. В остальных случаях считаем, что $H_t^m(z)$ не определено.

Легко доказывается, что функции H_t^m являются рекурсивными. Более того, при фиксированном параметре m функции H_t^m монотонно расширяются с ростом t. Тогда объединение этих функций по всем t = 0, 1, 2, ... также являются рекурсивными функциями. Обозначим эти объединения через H^m и покажем, что вычисления с оракулами H^m обладают аналогами основных свойств гиперарифметической вычислимости [1].

Утверждение 1 (проблема остановки). Для любой инициальной машины $z=\langle W,x,s\rangle$ $H^m(z)=\begin{cases}y+1, & \text{åñëè} \quad z\in B_s(H^m);\\ 0, & \text{åñëè} \quad z\in \overline{B}_s(H^m)\setminus B_s(H^m)\end{cases}$

и не определен в остальных случаях.

Утверждение 2 (парная селекция). Существует H^m – вычислимая функция $v_s(z_1,z_2)$ такая, что если $\{z_1,z_2\}\cap\overline{B}_s(H^m)\neq\varnothing$, то $v_s(z_1,z_2)$ определено и $v_s(z_1,z_2)\in\{z_1,z_2\}\cap\overline{B}_s(H^m)$.

Утверждение 3 (счетная селекция). Существует H^m – вычислимая функция $\mu_s(z)$, если $\exists n\ \{z\}^{H^m}(n)\in\overline{B}_s(H^m)$, то $\{z\}^{H^m}(\mu_s(z))\in\overline{B}_s(H^m)$.

Литература

1. Ганов В.А., Белякин Н.В. Общая теория вычислений с оракулами. – Новосибирск: ИМ СОАН СССР,1989. – 138 с.

2. Ганов В.А., Карымов В.Р. Проблема остановки для машин Шенфилда с оракулом. Материалы девятой региональной конференции по математике. – Барнаул: АлтГУ, 2006.

О характеризации Бека в случае различных подходов к определению комплексного интервала

В.С. Дронов

АлтГУ, г. Барнаул

При обобщении методов интервального анализа на комплексный случай отсутствует единое общепринятое определение комплексного интервала. В различных работах в качестве такого базового объекта выступают как круги на комплексной плоскости (круговые интервалы), так и прямоугольники, либо более сложные объекты – например, круговые сектора (см, например, [1]), круговые кольца и тому подобные объекты, так или иначе допускающие задание через интервальные параметры.

Использование тех или иных инструментов интервального анализа, выработанных для действительного случая, ограничивается свойствами данных объектов. В [2] утверждалось, что характеризация Рона для множеств AE-решений может быть перенесена на случай круговых комплексных интервалов, включая частный случай характеризации Оеттли-Прагера для объединенного множества решений.

Утверждается, что характеризация Бека [3] для объединенных множеств решений имеет полный аналог в случае круговых комплексных интервалов:

Теорема. *Если* $\mathbf{A} \in IC^{m\times n}$, $b \in IC^{m}$ *то* $\Xi(\mathbf{A},\mathbf{b}) = \{x \in C^{u}: \mathbf{A}x \cap \mathbf{b} \neq \emptyset\} = \{ C^{u}: 0 \in \mathbf{A}x - \mathbf{b} \}$, *где* $\Xi(\mathbf{A},\mathbf{b})$ *– объединенное множество решений системы, а IC – множества интервальных матриц указанной размерности, элементами которых служат круговые комплексные интервалы.*

Аналогичная теорема для случая прямоугольных комплексных интервалов или секторных интервалов (полярных комплексных интервалов в терминах [1]) вообще говоря, неверна, так как два последних множества в формулировке теоремы не обязаны совпадать. Таким образом, из приведенных подходов к определению комплексного интервала наиболее удобными в плане построения аналога действительных характеризаций оказываются круговые интервалы, что подтверждает результат [2].