ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Инварианты изображения относительно поворотов и растяжений

О.В. Батгауэр, В.В. Славский
ЮГУ, г. Ханты-Мансийск

В современных методах обработки цифровых изображений, например при вейвлет анализе, используют кратномасштабное представление изображения. Поэтому желательно иметь такие характеристики изображения, которые не зависели бы от масштаба, ориентации, качества снимка. Эти характеристики могут использоваться для определения характерных (особых) точек изображения.

Будем рассматривать восьмиканальное изображение, полученное со спутника Landsat 7. Выберем для примера три первых канала (слоя) с диапазонами спектрального разрешения 0.45 − 0.52, 0.52 − 0.6 и 0.63 − 0.69, соответствующие синей, зеленой и красной цветовым зонам.

В математической постановке это означает, что заданы три неотрицательные функции в некоторой области на плоскости. Будем предполагать, что данные функции непрерывно дифференцируемы, тогда справедливо разложение Тейлора второго порядка с центром в произвольной точке области.

Можно считать, не ограничивая общности, что данная точка − начало координат на плоскости, тогда

$$f_i(x,y) = a_i + p_{i1}x + p_{i2}y + \frac{1}{2}\left(b^i_{11}x^2 + 2b^i_{12}xy + b^i_{22}y^2\right) + o\left(x^2+y^2\right), i = 1,2,3$$

где $$a_i = f_i(0,0)\,,\ p_{i1} = \frac{\partial f_i}{\partial x}(0,0)\,,\ p_{i2} = \frac{\partial f_i}{\partial y}(0,0)\,,$$

$$b^i_{11} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}(0,0)\ ,\ b^i_{12} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y}(0,0)\,,\ b^i_{22} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2}(0,0)\,.$$

Предположим, что снимок подвергся преобразованию

$$\Theta(\lambda,\rho,\phi) : f_i(x,y) \to e^{\lambda_i} f_i\left(e^{\rho}\left(x\cos(\phi) - y\sin(\phi)\right), e^{\rho}\left(x\sin(\phi) + y\cos(\phi)\right)\right)$$

,

т.е. повороту, растяжению. Здесь коэффициент e^{ρ} соответствует гомотетии, угол ϕ − повороту, а коэффициенты e^{λ_1} , e^{λ_2} , e^{λ_3} − калибровке 1, 2 и 3 слоев соответственно.

Множители e^{λ_i} можно интерпретировать как факторы поглощения среды, действующие в окрестности исследуемой точки и соответствующие частотному диапазону данного слоя.

Определение 1. Будем называть нетождественно равную константе функцию $I\left(a_i, p_{i1}, p_{i2}, b_{11}^i, b_{12}^i, b_{22}^i\right)$ инвариантом 2-го порядка, если под действием преобразования она не меняется. Аналогично можно определить инварианты любого порядка.

Нетрудно видеть, что преобразования $\Theta(\lambda, \rho, \phi)$ удовлетворяют равенству $\Theta(\lambda_1, \rho_1, \phi_1) \circ \Theta(\lambda_2, \rho_2, \phi_2) = \Theta(\lambda_1 + \lambda_2, \rho_1 + \rho_2, \phi_1 + \phi_2)$ и образуют трехмерную коммутативную группу Ли G. Эта 5 мерная группа действует в пространстве параметров. $t = \left\{a_i, p_{i1}, p_{i2}, b_{11}^i, b_{12}^i, b_{22}^i\right\}$ размерности 18. Число независимых параметров 2 порядка будет соответственно 13.

Непосредственно проверяется, что следующие функции являются инвариантами 1-ого порядка:

$$I_1 = \frac{p_{12}p_{22} + p_{11}p_{21}}{\sqrt{\left(p_{11}^2 + p_{12}^2\right)\left(p_{21}^2 + p_{22}^2\right)}}, I_2 = \frac{p_{12}p_{32} + p_{11}p_{31}}{\sqrt{\left(p_{11}^2 + p_{12}^2\right)\left(p_{31}^2 + p_{32}^2\right)}},$$

$$I_3 = \frac{p_{22}p_{32} + p_{31}p_{21}}{\sqrt{\left(p_{21}^2 + p_{22}^2\right)\left(p_{31}^2 + p_{32}^2\right)}},$$

$$I_4 = \frac{a_1^2\left(p_{22}^2 + p_{21}^2\right)}{a_2^2\left(p_{11}^2 + p_{12}^2\right)}, \quad I_5 = \frac{a_2^2\left(p_{32}^2 + p_{31}^2\right)}{a_3^2\left(p_{21}^2 + p_{22}^2\right)}, \quad I_6 = \frac{a_3^2\left(p_{11}^2 + p_{12}^2\right)}{a_1^2\left(p_{31}^2 + p_{32}^2\right)}.$$

Замечание 1. Инварианты I_1, I_2, I_3 связаны соотношением $1 - I_1^2 - I_2^2 - I_3^2 + 2I_1I_2I_3 = 0$. Инварианты I_4, I_5, I_6 также зависимы – выполняется тождество $I_4I_5I_6 = 1$. В итоге получается 4 независимых инварианта 1 порядка.

Результаты проведенных численных экспериментов в системе MatLab с инвариантами 1 порядка позволяют сделать вывод: рассмотренные в данной работе инварианты слабо коррелируют между собой на типичных классах изображений и могут быть использованы в задачах распознавания изображений, отыскания снимков по образцу, задачах фотограмметрии.