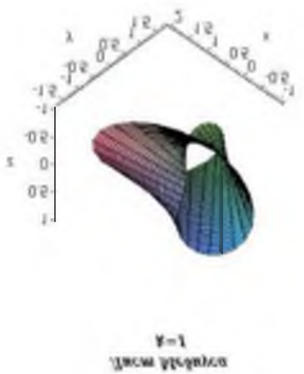
Об изменении кривизны листа Мебиуса при закручивании

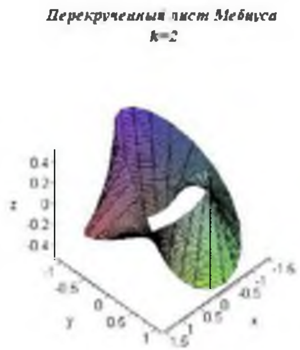
М.А. Чешкова
АлтГУ, г. Барнаул

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим линейчатую поверхность M, образованную прямыми, ортогонально секущими окружность. Обозначим через ϕ – угол, который образуют прямые с плоскостью окружности. Тогда уравнение поверхности запишется в виде

$$r(u,v) = e(v) + ul(v), e(v) = (\cos(v), \sin(v), 0),$$
$$l(v) = \cos(\phi(v))e(v) + \sin(\phi(v))a, a = (0,0,1)$$

Будем рассматривать те поверхности, когда $\phi = \frac{k}{2}v, k$ – целое число. В этом случае прямые $v = 0, v = 2\pi$ «склеиваются». Имеем лист Мебиуса [1], перекрученный k раз.





Гауссова кривизна $K(u,v,k)$ поверхности M равна

$$K(u,v,k) = \frac{k^2}{4((1+u\cos(kv/2))^2 + (uk/2)^2)^2}.$$

Исследуем, как меняется гауссова кривизна листа Мебиуса при закручивании на один оборот. Для этого рассмотрим график функции

$f(u,v) = K(u,v,2) - K(u,v,1)$.

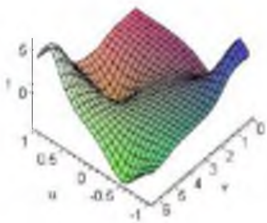
Точки, гауссовы координаты (u,v) которых удовлетворяют уравнению $f(u,v) = 0$, имеют на обеих поверхностях одинаковые гауссовы кривизны.

Используя математический пакет MAPLE [2], находим решения уравнения $f(u,v)=0$. Имеем

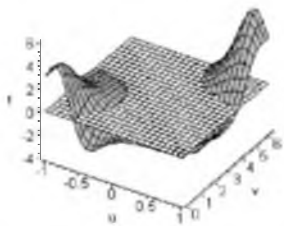
$$u = 4\cos(v/2) - 4\cos(v/2)^2 + 2 \pm \sqrt{-32\cos(v/2)^3 + 16\cos(v/2) + 32\cos(v/2)^4 + 10 - 24\cos(v/2)^2} \Big/ 8\cos(v/2)^4 - 12(\cos(v/2)^2 + 3$$

Подставляя эти решения в уравнения поверхностей Мебиуса, получим кривые, вдоль которых гауссовы кривизны совпадают.

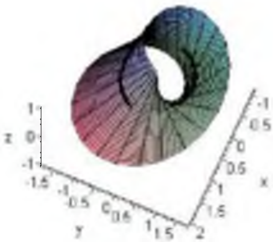
f=K(u,v,2)-K(u,v,1)



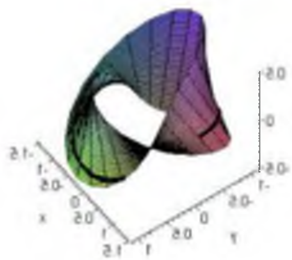
f=K(u,v,2)-K(u,v,1),
f=0



Кривые на листе Мебиуса (k=1), вдоль которых f=K(u,v,2)-K(u,v,1)=0



Кривые на перекрученном листе Мебиуса (k=2), вдоль которых f=K(u,v,2)-K(u,v,1)=0



Литература

1.Торп Дж. Начальные главы дифференциальной геометрии. – М., 1982.

2. Васильев А.Н. Maple 8. – М., 2003.