Исследуем эту функцию на экстремум.

Заметим, что $K < 0$, т.е. точки листа Мёбиуса являются гиперболическими [2, с. 138]. Покажем, что она ограничена. Найдём точки экстремума из $\partial_u K = 0$, $\partial_v K = 0$. Имеем точки $M_1 = (0, \pi)$, $M_2 = (\frac{4}{5}, 0)$, $M_2 = (\frac{4}{5}, 2\pi)$. Подсчитаем кривизну в этих точках $K(M_1) = -\frac{1}{4}$, $K(M_2) = -\frac{25}{4}$, $K(M_3) = -\frac{25}{4}$.

Теорема. Кривизна листа Мёбиуса находится в пределах $[-\frac{25}{4}, 0)$ и достигает наименьшего значения $-\frac{25}{4}$.

Литература

1. Торп Дж. Начальные главы дифференциальной геометрию. - М., 1982.

2. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. – М., 1974.

О конгруэнции сфер

Е.А. Петрова

АлтГУ, г. Барнаул

Двухпараметрическое семейство сфер называется *конгруэнцией сфер* [1, с. 459]. Геометрическое место центров сфер конгруэнции называется *поверхностью центров*. Конгруэнция сфер определена, если заданы поверхность центров M: $r = r(u^1, u^2)$ и скалярная функция $\rho = \rho(u^1, u^2)$, определяющая радиус соответствующей сферы.

Огибающая конгруэнции [2, с. 102] сфер состоит из двух поверхностей (рис. 1). Радиус-вектор точки огибающей можно записать в виде

$$R = r + \rho \cdot a,$$

где a – единичный вектор, направленный из центра сферы в соответствующую точку огибающей. Этот вектор является вектором нормали огибающей. В разложении на касательную и нормальную составляющие a принимает вид

$$a = U + \sigma \cdot n,$$

где $U = r_k \cdot p^k$ лежит в касательной плоскости.

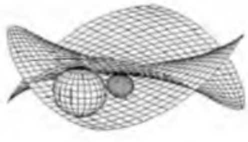

Рис. 1

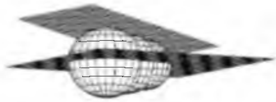

Рис. 2

Выразив координаты a через ρ и метрический тензор $g_{\alpha\beta}$ [1, с. 34] поверхности центров, получим

$$p^k = -g^{ks} \cdot \rho_s$$

$$\sigma = \pm\sqrt{1 - g_{\alpha\beta} \cdot p^\alpha \cdot p^\beta} = \pm\sqrt{1 - g^{\alpha\beta} \cdot \rho_\alpha \cdot \rho_\beta}$$

Обозначим

$$\varepsilon = \sqrt{1 - g_{\alpha\beta} \cdot p^\alpha \cdot p^\beta}\ .$$

Тогда определятся два вектора нормали

$$a_+ = U + \varepsilon \cdot n,\ a_- = U - \varepsilon \cdot n\ .$$

Уравнения поверхностей огибающей можно записать так

$$M_+ :\ R_+ = r + \rho \cdot a_+,\ M_- :\ R_- = r + \rho \cdot a_-\ .$$

Из условия, что a – вектор нормали огибающей получаем равенство

$$\langle r_i,\ U \rangle + \rho_i = 0\ .$$

Продифференцировав это равенство, получим

$$\langle r_i,\ \nabla_j U \rangle + \nabla_j \rho_i = 0\ ,$$

где $\nabla_j U$ – ковариантная производная [1, с. 41] U, $\nabla_j \rho_i$ – ковариантная производная ρ_i

Лемма 1. Следующие условия эквивалентны

1) $\nabla_j U = 0$ 2) $\nabla_j \rho_i = 0$.

Исследуем случай, когда M_+ и M_- являются плоскостями (Рис.2)

Лемма 2. Следующие условия эквивалентны

1) поверхность огибающей M_+ является плоскостью;

2) $\nabla_i p^s - \varepsilon \cdot A_i^s = 0$ и $b_{ki} \cdot p^k + \varepsilon_i = 0$,

где $A(A_i^s)$ – оператор Вейнгаартена, $b(b_{ij})$ –вторая квадратичная форма.

Лемма 3. Следующие условия эквивалентны

1) поверхность огибающей M_- является плоскостью;

2) $\nabla_i p^s + \varepsilon \cdot A_i^s = 0$ е $b_{ki} \cdot p^k - \varepsilon_i = 0$.

Теорема. Выполнения любых двух из следующих условий достаточно для выполнения двух других.

1) поверхность огибающей M_+ является плоскостью;
2) поверхность огибающей M_- является плоскостью;
3) поверхность центров М является плоскостью;
4) $\nabla_j \rho_i = 0$.

Литература

1. Шуликовский В.И. Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. – М.,1963.
2. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. – М., 1974.

Обобщенное неравенство Пуанкаре на областях Джона общих групп Карно

Е.А. Плотникова

НГУ, г. Новосибирск

Работа посвящена вопросам теории пространств Соболева на неголономных многообразиях. Более конкретно, доказывается обобщенное неравенство Пуанкаре на областях Джона, при условии выполнения слабого неравенства Пуанкаре для шара на общих группах Карно.

Общей группой Карно G называется связная односвязная нильпотентная группа Ли, алгебра Ли V которой градуирована, т.е.

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m,$$

где $[V_1, V_k] = V_{k+1}$ для $1 \le k \le m-1$, $[V_1, V_m] = 0$.

Левоинвариантные векторные поля $X_1, \ldots, X_{n_1}$, называемые горизонтальными, образуют базис V_1. Пусть $\dim V_1 = n_1 \ge 2$, $\dim V_k = n_k$ для $1 \le k \le m-1$ и $N = n_1 + \ldots + n_m$.

Область называется областью Джона $(U \in J(\alpha, \beta), 0 < \alpha \le \beta < \infty)$, если существует выделенная точка $p_0 \in U$ такая, что для любой точки $p \in U$ существует спрямляемая кривая $\gamma(s)$, $0 \le s \le l \le \beta$, для которой $\gamma(0) = p$, $\gamma(l) = p_0$ и $dist[\gamma(s), \partial U] \ge \frac{\alpha s}{l}$, для любого $s \in [0,1]$.

Пространство Соболева $W_p^k(\Omega)$ состоит из суммируемых на Ω функций, имеющих обобщенные производные вдоль горизонтальных векторных полей и конечную норму: