ГЕОМЕТРИЯ И АНАЛИЗ

Гармонические тензоры на трехмерных группах Ли с левоинвариантными римановыми метриками

О.П. Гладунова, Е.Д. Родионов, В.В. Славский
БарГПУ, г. Барнаул

Пусть G – трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Обозначим, через S_{ijk} – тензор Схоутена-Вейля.

Определение 1. Тензор $T_{i_1\ldots i_p}$ строения (p,0) (см. [1, с. 43]) называется *гармоническим*, если выполняются следующие три условия:

(1) $T_{i_1\ldots i_p}$ – кососимметрический,

(2) $\mathrm{rot}(T)=0$ или

$T_{i_1\ldots i_p;t}=T_{ti_1\ldots i_p;i_1}+T_{i_1t\ldots i_p;i_2}+\cdots+T_{i_1\ldots t;i_p}$,

(3) $\mathrm{div}(T)=g^{i_1t}T_{i_1\ldots i_p;t}=0$.

Здесь g^{i_1t} – кометрический тензор, $T_{i_1\ldots i_p;t}$ – ковариантная производная тензора $T_{i_1\ldots i_p}$.

Определение 2. Будем говорить, что тензор $T_{i_1\ldots i_p}$ *почти гармонический*, если выполняются следующие два условия:

(1) $\mathrm{rot}(T)=0$,

(2) $\mathrm{div}(T)=g^{i_1t}T_{i_1\ldots i_p;t}=0$.

Определение 3. Вектор V^i называется *гармоническим*, если выполняются следующие два условия:

(1) $\mathrm{rot}(V)=V^i_{;j}-V^j_{;i}=0$,

(2) $\mathrm{div}(V)=V^i_{;i}=0$.

Определим дивергенцию типа I и II тензора Схоутена-Вейля, соответственно, формулами

$$\mathrm{div}_1(S)=g^{it}S_{ijk;t} \text{ и } \mathrm{div}_2(S)=g^{jt}S_{ijk;t}.$$

Теорема 1. Пусть G – трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, LG – алгебра Ли группы G, S_{ijk} – тензор Схоутена-Вейля. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) $\mathrm{div}_1(S) = 0$. Если дополнительно выполнено условие $\mathrm{rot}(S) = 0$, то алгебра Ли LG имеет один из следующих типов: либо $su(2)$, либо $e(2)$, либо R^3.

(2) $\mathrm{div}_2(S) = 0$ тогда и только тогда, когда алгебра Ли LG имеет один из следующих типов: либо $su(2)$, либо $e(2)$, либо R^3, а метрика гомотетична стандартной. Если дополнительно выполнено условие $\mathrm{rot}(S) = 0$, то алгебра Ли LG имеет один из следующих типов: либо $su(2)$, либо $e(2)$, либо R^3. Дополнительное условие $\mathrm{rot}(S) = 0$ не влияет на класс алгебр Ли LG, для которых $\mathrm{div}_2(S) = 0$.

Теорема 2. Пусть G – трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, LG – алгебра Ли группы G, S_{ijk} – тензор Схоутена-Вейля, $\{V^k\}$ – единичный вектор. Тогда для любой трехмерной унимодулярной алгебры Ли LG существует конечное число направлений, для которых тензор $w_{ij} = V^k S_{kij}$ гармонический.

Если дополнительно, $\{V^k\}$ – гармонический единичный вектор, то алгебра Ли σ изоморфна либо $su(2)$, либо $e(2)$, либо $e(1,1)$, либо R^3.

Замечание. Подобные теоремы справедливы и для трехмерной неунимодулярной группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (06-01-81002) и Совета по ведущим научным школам РФ (НШ-8526.2006.1).

Литература:

1. Яно К., Бохнер С. Кривизна и числа Бетти. – М.: ИЛ, 1957.