Литература

1. Andrzejewski P., Glanc B. A note on the commutativity of rings // Demonstratio mathematica. – 2006. – №2. – Vol. XXXIX.
2. Mal'cev Y.N. The structure of associative algebras satisfying the polynomial identities and varieties of algebras. – Barnaul, ASU, 1994.

О многообразиях ассоциативных колец, все критические кольца которых являются слабыми армендеризовскими

А.С. Кузьмина

БГПУ, г. Барнаул

В данной работе рассматриваются ассоциативные кольца.

Определение. *Кольцо R называется армендеризовским, если для любых многочленов* $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m$ *и* $g(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n \in R[x]$ *из того, что* $f(x)g(x)=0$, *следует* $a_i b_j=0$ *для всех* $i=0,1,\ldots,m$ *и* $j=0,1,\ldots,n$

Определение. *Кольцо R называется слабым армендеризовским, если для любых многочленов* $f(x)=a_0+a_1x$ *и* $g(x)=b_0+b_1x \in R[x]$ *из того, что* $f(x)g(x)=0$, *следует* $a_i b_j=0$ *для* $i=0,1$ *и* $j=0,1$.

Понятие армендеризовского кольца введено в 1997 году M.Rege и S.Chhawchharia в [2]. В 2003 году в работе [1] было введено понятие слабого армендеризовского кольца и доказан ряд результатов, касающихся этого класса колец. В частности, приведен пример, иллюстрирующий, что не всякое слабое армендеризовское кольцо является армендеризовским.

Полного описания слабых армендеризовских и армендеризовских колец пока нет, поэтому представляет интерес изучение многообразий колец, все или часть колец которых являются слабыми армендеризовскими (или армендеризовскими). В настоящей работе исследуются многообразия, все критические кольца которых являются слабыми армендеризовскими. Также описаны многообразия, все конечные подпрямо неразложимые кольца которых являются слабыми армендеризовскими.

Введем используемые в работе обозначения:

Z_{p^t} – кольцо вычетов целых чисел по модулю p^t, p – простое число,

$M_p=\langle m_1,m_2 \mid pm_1=pm_2=0,\ m_1^2=m_2^2=0,\ m_1m_2+m_2m_1=0\rangle$,

$N_p=\langle n_1,n_2 \mid pn_1=pn_2=0,\ n_1^2=n_2^2=0,\ n_1n_2-n_2n_1=0\rangle$,

$$B_p = \begin{pmatrix} GF(p) & GF(p) \\ 0 & GF(p) \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{M}$ – многообразие колец, в котором все критические кольца являются слабыми армендеризовскими. Тогда любое критическое кольцо R из многообразия $\mathfrak{M}$ либо является армендеризовским, либо является однопорожденной Z_{p^t} –алгеброй, причем $R^p=0$, $t>1$, p – нечетное простое число.*

Замечание. Отметим, что во втором случае из формулировки теоремы число p может и не являться индексом нильпотентности кольца R, т.е. возможно, что $R^q=(0)$ для некоторого числа $q<p$.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{M}$ – многообразие колец. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1)любое подпрямо неразложимое конечное кольцо из многообразия $\mathfrak{M}$ является армендеризовским;

(2)любое подпрямо неразложимое конечное кольцо из многообразия $\mathfrak{M}$ является слабым армендеризовским;

(3)кольца B_p, M_p, N_p не содержатся в многообразии $\mathfrak{M}$;

(4)$B_p \notin \mathfrak{M}$ и в $\mathfrak{M}$ выполняется тождество вида $xy+f(x,y)=0$, где $f(x,y)$ – некоторый многочлен, нижняя степень которого ≥ 3.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{M}$ – локально конечное многообразие колец. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1)любое подпрямо неразложимое конечное кольцо из многообразия $\mathfrak{M}$ является армендеризовским;

(2)любое кольцо из многообразия $\mathfrak{M}$ является армендеризовским;

(3)любое кольцо из многообразия $\mathfrak{M}$ является слабым армендеризовским;

(4)любое подпрямо неразложимое конечное кольцо из многообразия $\mathfrak{M}$ является слабым армендеризовским;

(5)кольца B_p, M_p, N_p не содержатся в многообразии $\mathfrak{M}$;

(6)$B_p \notin \mathfrak{M}$ и в $\mathfrak{M}$ выполняется тождество вида $xy+f(x,y)=0$, где $f(x,y)$ – некоторый многочлен, нижняя степень которого ≥ 3.

Литература

1. Lee T.-K., Wong T.-L. On Armendariz rings // Houston Journal of Mathematics. – 2003. – Vol. 29. – №3. – P. 583–593.

2. Rege M.B., Chhawchharia S. Armendariz rings // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. – 1997. – 73. – P. 14–17.