Некоторые критерии коммутативности ассоциативных колец

А.В. Кислицин
БГПУ, г. Барнаул

На протяжении данной работы под словом «кольцо» будет подразумеваться «ассоциативное кольцо».

Начиная с 40-х годов прошлого века многие алгебраисты, такие как И. Херстейи, И. Капланский, Н. Джекобсон доказывали критерии коммутативности.

Так Веддерберн доказал коммутативность любого конечного тела, Фейс доказал, что тело, в котором некоторые степени любых двух элементов коммутируют, коммутативно. Джекобсон доказал свою знаменитую теорему, о том, что кольцо коммутативно, если каждый его элемент равен самому себе в некоторой степени.

Но и на сегодняшний день в данной области теории колец остается множество проблем.

В 2006 году польские математики Павел Андрзеевский и Барбара Гланк в работе [1] исследовали кольца нулевой характеристики, содержащие единицу и удовлетворяющие одному из тождеств: $(xy)^n = x^n y^n$ или $(xy)^n = (yx)^n$ $(n > 1)$. Также в этой работе были исследованы тела, удовлетворяющие тождеству $(xy)^n = x^m y^m$ $(n, m > 0)$.

В этой работе было доказано, что упомянутые кольца с данными тождествами будут являться коммутативными.

Используя структурную теорию колец, путем ослабления наложенных на кольца условий, удалось доказать следующие обобщения полученных в работе результатов:

Теорема 1. Пусть R – кольцо с единицей. Если char R = 0 и найдутся такие многочлены f, g, h с целыми коэффициентами, что степень хотя бы одного из них больше 1 и для любых $x, y \in R$ выполняется: $f(xy) = g(x)h(y)$, то R коммутативно.

Теорема 2. Пусть R – кольцо с единицей. Если char R = 0 и найдутся такие многочлены f, g с целыми коэффициентами, что для любых $x, y \in R$ выполняется: $f(xy) = g(yx)$, то R коммутативно.

Теорема 3. Пусть D – тело. Если существуют такие многочлены f, g, h с целыми коэффициентами, что степень хотя бы одного из них больше 1, старшие коэффициенты их равны ±1 и для любых $x, y \in D$ выполняется: $f(xy) = g(x)h(y)$, то D коммутативно.

Литература

1. Andrzejewski P., Glanc B. A note on the commutativity of rings // Demonstratio mathematica. – 2006. – №2. – Vol. XXXIX.

2. Mal'cev Y.N. The structure of associative algebras satisfying the polynomial identities and varieties of algebras. – Barnaul, ASU, 1994.

О многообразиях ассоциативных колец, все критические кольца которых являются слабыми армендеризовскими

А.С. Кузьмина
БГПУ, г. Барнаул

В данной работе рассматриваются ассоциативные кольца.

Определение. *Кольцо R называется армендеризовским, если для любых многочленов* $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m$ *и* $g(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n \in R[x]$ *из того, что* $f(x)g(x)=0$, *следует* $a_i\, b_j=0$ *для всех* $i=0,1,\ldots,m$ *и* $j=0,1,\ldots,n$

Определение. *Кольцо R называется слабым армендеризовским, если для любых многочленов* $f(x)=a_0+a_1x$ *и* $g(x)=b_0+b_1x \in R[x]$ *из того, что* $f(x)g(x)=0$, *следует* $a_i\, b_j=0$ *для* $i=0,1$ *и* $j=0,1$.

Понятие армендеризовского кольца введено в 1997 году M.Rege и S.Chhawchharia в [2]. В 2003 году в работе [1] было введено понятие слабого армендеризовского кольца и доказан ряд результатов, касающихся этого класса колец. В частности, приведен пример, иллюстрирующий, что не всякое слабое армендеризовское кольцо является армендеризовским.

Полного описания слабых армендеризовских и армендеризовских колец пока нет, поэтому представляет интерес изучение многообразий колец, все или часть колец которых являются слабыми армендеризовскими (или армендеризовскими). В настоящей работе исследуются многообразия, все критические кольца которых являются слабыми армендеризовскими. Также описаны многообразия, все конечные подпрямо неразложимые кольца которых являются слабыми армендеризовскими.

Введем используемые в работе обозначения:

Z_{p^t} – кольцо вычетов целых чисел по модулю p^t, p – простое число,

$M_p=\langle m_1,m_2 \mid pm_1=pm_2=0,\ m_1^2=m_2^2=0,\ m_1m_2+m_2m_1=0\rangle$,

$N_p=\langle n_1,n_2 \mid pn_1=pn_2=0,\ n_1^2=n_2^2=0,\ n_1n_2-n_2n_1=0\rangle$,