

Министерство образования и науки РФ  
Алтайский государственный университет

А.Г. Петрова

**КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧ  
ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА  
В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ**

*Монография*



Барнаул

---

Издательство  
Алтайского государственного  
университета  
2015

УДК 517.9  
ББК 22.161.6  
П 305

*Рецензенты:*

**д.ф.-м.н. Е.Д. Родионов** (АлтГУ);  
**д.т.н. Н.М. Оскорбин** (АлтГУ)

**П 305 Петрова, А.Г.**

Корректность задач тепломассопереноса в неоднородных средах [Текст] : монография / А.Г.Петрова. — Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2015. — 248 с.  
ISBN 978-5-7904-1991-1

Монография посвящена исследованию корректности математических моделей задач тепломассопереноса в неоднородных средах: неклассических одномерных задач со свободными границами, возникающих при моделировании фазовых переходов в неоднородных средах; начально-краевых задач для модели движения эмульсии в поле микроускорений и терموкапиллярных сил и доказательству их классической разрешимости; корректности модели затвердевания эмульсии; задач управления составом материала в процессах с фазовыми переходами. Книга предназначена для специалистов в области математического моделирования, теории нелинейных дифференциальных уравнений и задач со свободными границами и их приложений, а также для студентов и аспирантов высших учебных заведений.

УДК 517.9  
ББК 22.161.6

ISBN 978-5-7904-1991-1

© Петрова А.Г., 2015  
© Оформление. Издательство  
Алтайского государственного  
университета, 2015

# Оглавление

<b>Предисловие</b>	<b>6</b>
<b>ЧАСТЬ I КОРРЕКТНОСТЬ МОДЕЛЕЙ С ФАЗОВЫМ ПЕРЕХОДОМ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ</b>	<b>16</b>
<b>1 Основные сведения о базовых одномерных моделях</b>	<b>18</b>
1.1 Задача затвердевания бинарной смеси . . . . .	19
1.1.1 Построение модели . . . . .	19
1.1.2 Теорема о существовании решения задачи затвердевания бинарного сплава . . . . .	23
1.2 Об алгоритме численного решения задачи . . . . .	33
1.3 Монотонность фронта в двухфазной задаче Стефана . . . . .	37
<b>2 Задача Стефана с переохлаждением</b>	<b>40</b>
2.1 "Переохлажденная" задача Стефана с нулевым потоком . . . . .	41
2.2 "Переохлажденная" задача Стефана с условием 1-го рода . . . . .	44
<b>3 Модель жидкостной эпитаксии</b>	<b>57</b>
3.1 Построение модели и постановка задач . . . . .	57
3.2 Прямая задача в ограниченной области . . . . .	60
3.3 Прямая задача на полубесконечном интервале . . . . .	70
<b>4 Модель тепломассопереноса в парафинонефтяной смеси</b>	<b>77</b>
4.1 Постановка задачи . . . . .	77
4.2 Классическое решение одномерной задачи . . . . .	80
4.2.1 Формулировка теоремы . . . . .	80

4.2.2	Формулировка модифицированной задачи . . .	82
4.2.3	Формулировка вспомогательной задачи . . . . .	84
4.2.4	Разрешимость вспомогательной задачи и построение оператора . . . . .	85
4.2.5	Разрешимость модифицированной задачи . . .	87
4.2.6	Доказательство теоремы 4.2.1 . . . . .	88
4.3	Автомодельное решение . . . . .	89
4.3.1	Постановка задачи . . . . .	89
4.3.2	Простейший случай . . . . .	91
4.3.3	Общий случай . . . . .	92

## **ЧАСТЬ II. ДВИЖЕНИЕ ЭМУЛЬСИИ В ПОЛЕ МИКРОУСКОРЕНИЙ И ТЕРМОКАПИЛЛЯРНЫХ СИЛ 95**

<b>5</b>	<b>Постановка задачи и ее простейшие решения</b>	<b>97</b>
5.1	Уравнения модели . . . . .	97
5.2	О простейших решениях . . . . .	100
<b>6</b>	<b>Автомодельное решение одномерной задачи</b>	<b>106</b>
6.1	Постановка и решение автомодельной задачи . . . . .	106
6.1.1	Постановка задачи . . . . .	106
6.1.2	Автомодельное решение асимптотической задачи . . . . .	107
6.2	Вспомогательная краевая задача . . . . .	108
6.3	Существование автомодельного решения основной задачи . . . . .	113
6.4	Примеры численных расчетов . . . . .	116
<b>7</b>	<b>Корректность начально-краевых задач</b>	<b>119</b>
7.1	Основная начально-краевая задача . . . . .	119
7.1.1	Постановка задачи . . . . .	119
7.1.2	Построение оператора . . . . .	123
7.1.3	Доказательство локальной разрешимости задачи . . . . .	126
7.1.4	Единственность решения . . . . .	131
7.2	Другие краевые задачи . . . . .	133
<b>8</b>	<b>Линеаризованная задача Коши</b>	<b>138</b>
8.1	Постановка задач . . . . .	138
8.2	Единственность решения задачи Коши для системы 1. 140	
8.3	Существование решения задачи Коши для системы 1. 145	

8.4	Задача Коши для системы 2. . . . .	150
<b>9</b>	<b>Начально-краевая задача в пространстве</b>	<b>156</b>
9.1	Постановка задачи . . . . .	156
9.2	Единственность классического решения задачи . . . .	158
9.3	Построение оператора . . . . .	165
9.4	Разрешимость задачи (9.3.1)–(9.3.7) . . . . .	174
9.5	Основной результат . . . . .	177
<b>ЧАСТЬ III. ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ СОСТАВОМ МА-</b>		
<b>ТЕРИАЛА В ПРОЦЕССАХ С ФАЗОВЫМ ПЕРЕ-</b>		
<b>ХОДОМ</b>		<b>179</b>
<b>10</b>	<b>Управление составом растущей пленки</b>	<b>181</b>
10.1	Постановка задачи . . . . .	182
10.2	Теоремы о разрешимости обратных задач 1 и 2 . . . .	184
10.3	Автомодельные решения обратных задач эпитаксии .	187
10.3.1	Автомодельное решение задачи 1 . . . . .	187
10.3.2	Автомодельное решение задачи 2 . . . . .	189
<b>11</b>	<b>Задачи управления составом бинарного сплава</b>	<b>191</b>
11.1	Задача определения начальной концентрации примеси	192
11.1.1	Постановка задачи . . . . .	192
11.1.2	Разрешимость задачи I . . . . .	196
11.1.3	Автомодельная обратная задача I . . . . .	202
11.2	Задача определения граничного температурного ре-	
	жима . . . . .	204
11.2.1	Постановка задачи . . . . .	204
11.2.2	О "точном" решении задачи II . . . . .	206
11.2.3	Экстремальная формулировка задачи II . . . .	212
11.2.4	Автомодельная задача . . . . .	214
<b>12</b>	<b>Задача управления составом эмульсии</b>	<b>217</b>
12.1	Модель затвердевания эмульсии . . . . .	217
12.2	Условия разрешимости прямой и обратной задач . . .	221
12.3	Специальные решения прямой и обратной задач . . .	225
12.3.1	Случай теплового режима в виде бегущей волны	225
12.3.2	Автомодельное решение . . . . .	227
12.4	Температурный режим как управление . . . . .	230
<b>Библиографический список</b>		<b>233</b>

*Научное издание*

**Петрова Анна Георгиевна**

**КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧ  
ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА  
В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ**

*Монография*

Публикуется в авторской редакции

Издательская лицензия ЛР № 020261 от 14.01.1997.

Подписано в печать 05.11.2015. Формат  $60 \times 84 \frac{1}{16}$ .

Усл.печ.л. 14,4. Тираж 100. Заказ № 326

Типография Алтайского государственного университета;  
656049 Барнаул, ул. Димитрова, 66.