ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Задача Коши для уравнений движения газожидкостного слоя

И.Г. Ахмерова
АлтГУ, г. Барнаул

В докладе показана разрешимость задачи Коши для уравнений движения газожидкостного слоя [1].

Задача. В области $Q_T = \{(x,t) : x \in R,\ 0 < t < T < \infty\}$, требуется найти функции $\varphi,\ v_i,\ p^e,\ p^{se}, \rho_f, \theta$, удовлетворяющие следующей системе уравнений и условиям:

$$(\rho_s(1-\phi))_t + (\rho_s(1-\phi)\overrightarrow{v_1})_x = 0,\ \ (\rho_f\phi)_t + (\rho_f\phi\overrightarrow{v_2})_x = 0,$$

$$\rho_s(1-\phi)\frac{d\overrightarrow{v_1}}{dt} = div\sigma_1 + \vec{F} + \rho_s(1-\phi)\vec{g},$$

$$\rho_s(1-\phi)c_1(\theta_t + \overrightarrow{v_1}\nabla\theta\ ) = div(k(\phi)\nabla\theta),$$

$$\nabla p + \vec{F} = 0,$$

$$\sigma_1 = (-p^s + \lambda^s(\varphi) - 2/3\mu^s(\varphi)div\overrightarrow{v_1})I + 2\mu^s(\varphi)D_1,$$

$$\vec{F} = B(\varphi)(\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}) - p^e\nabla\varphi,\ \ p^{se} = p^e + f(\varphi),$$

$$v_i\big|_{t=0} = v_i^o(x),\quad \theta(x,t)\big|_{t=0} = \theta^o(x),\ \ p^e\Big|_{t=0} = p^o(x),\quad \varphi\big|_{t=0} = \varphi^o(x).$$

Здесь v_i – скорость i -ой фазы ($i = 1, 2$); ρ_f, ρ_s – истинные плотности газа и твердых частиц соответственно, φ - объемная концентрация газа (пористость); σ_1 – тензор напряжения в твердой фазе, p^s – давление в твердой фазе, p – давление газа, $\lambda^s(\varphi), \mu^s(\varphi)$ – коэффициенты вязкостей; D_1 – тензор скоростей деформации, I – единичный тензор. Для конкретизации вектора $\vec{F}$ водятся понятия внутреннего давления газа p^e и эффективного давления твердых частиц p^{se} ($p = \varphi p^e, p^s = (1-\varphi)p^{se}$); $\vec{g}$ – вектор ускорения силы тяжести; θ – абсолютная температура, $k(\varphi)$ – коэффициент теплопроводности смеси, c_s – теплоемкость твердой фазы при постоянном объеме; x –

независимая переменная, t – время. Функции $\lambda^s(\varphi)$, $\mu^s(\varphi)$, $f(\varphi)$, $B(\varphi)$, $k(\varphi)$ – заданны, для замыкания системы принимаем $p^e = p^e(\rho_f, \theta)$ ($p^e = R\rho_f\theta$ при $\theta > 0$, $\rho_f > 0$ и $p^e = 0$ при $\theta < 0$ или $\rho_f < 0$, $R = const > 0$) [2].

Литература

1. Вольперт А.И., Худяев С.И. О задаче Коши для составных систем нелинейных дифференциальных уравнений // Математический сборник. – 1972. – Т.87(129). – №4.

2. Gard S.K., Pritchett J.W. Dynamics of gas-fluidized beds. Journal of Applied Physics. – October 1975.– Vol. 46. – №10.

Метод численного расчета краевой задачи для уравнений Навье-Стокса

А.С. Кузиков, С.С. Кузиков
Сибирская академия государственной службы, АлтГУ, г. Барнаул

Предлагается итерационный метод расчета стационарного ламинарного течения несжимаемой жидкости, описываемой уравнениями Навье-Стокса:

$$(V * \nabla)V = -\nabla P + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta V + f \tag{1}$$

$$divV = 0$$

с заданным вектором скорости V на границе области течения Ω.

Задача формулируется как задача управления, где управлением является давление P, а минимизируемым функционалом является квадрат нормы в $L_2(\Omega)$ дивергенции вектора скорости.

Для расчета уравнений (1) используется консервативная разностная схема. Для минимизации функционала применяется градиентный метод в варианте скорейшего спуска.

Метод легко распространяется на течения при подводе тепла, например, при втекании «холодной» жидкости в «горячий канал».