Теорема 5. *Кривизна* $\tilde{k}$ *гиперболической эволюты* $\tilde{\gamma}$ *равна*

$$\tilde{k} = \frac{\sqrt{k^2 - \kappa^2}}{|\kappa|}, k^2 - \kappa^2 > 0.$$

Теорема 6. *Кручение* $\tilde{\kappa}$ *гиперболической эволюты* $\tilde{\gamma}$ *равно*

$$\tilde{\kappa} = -\frac{k'\kappa - k\kappa'}{|\kappa|(k^2 - \kappa^2)}.$$

Литература

1. Базылев В.Т., Дуничев К.И. Геометрия 2. – М.: Просвещение, 1975.

2. Дубровин Б.А. ,Новиков С.П., Фоменко А.Г. Современная геометрия. – М.: Наука,1979.

3. Izumiya Sh., Pei D., Sano T., Torii E. Evolutes of hyperbolic planes curves // Acta Matimatica Sinica. English Series. – 2004. – V.20. №3. P. 543-550.

4. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия.–М.: Наука,1969.

Интервальные приложения теоремы Миранды

С.П. Шарый

Институт вычислительных технологий СО РАН,
г. Новосибирск

В математическом анализе хорошо известна

Теорема Больцано-Коши.

Если функция $F : ∡ \rightarrow ∡$ непрерывна на интервале X из ∡ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри интервала существует нуль функции F, т.е. точка y, в которой $F(y) = 0$.

Её многомерным аналогом является результат, опубликованный более чем столетием позже в заметке [4] –

Теорема Миранды.

Пусть $F : ∡^n \rightarrow ∡^n$, $F(x) = (F_1 (x), F_2 (x), \ldots , F_n (x))^{\top}$ – функция, непрерывная на брусе X из $∡n$, со сторонами, параллельными координатным осям, и для каждого $i = 1, 2, \ldots , n$ имеет место

$$F_i (X_1 , \ldots , X_{i-1}, \inf X_i , X_{i+1}, \ldots , X_n) \cdot$$
$$F_i (X_1, \ldots , X_{i-1}, \sup X_i , X_{i+1}, \ldots , X_n) \le 0,$$

т.е. области значений компонент функции $F(x)$ на соответствующих противоположных гранях бруса X имеют разные знаки. Тогда на брусе X существует нуль функции F, т.е. точка y, в которой $F(y) = 0$.

В нашей работе мы покажем, как теорема Миранды может послужить основой для практичной интервальной методики оценивания множеств решений интервальных систем линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{a}_{11}\, x_1 + \boldsymbol{a}_{12}\, x_2 + \dots + \boldsymbol{a}_{1n}\, x_n = \boldsymbol{b}_1\,, \\ \boldsymbol{a}_{21}\, x_1 + \boldsymbol{a}_{22}\, x_2 + \dots + \boldsymbol{a}_{2n}\, x_n = \boldsymbol{b}_2\,, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \boldsymbol{a}_{n1}\, x_1 + \boldsymbol{a}_{n2}\, x_2 + \dots + \boldsymbol{a}_{nn}\, x_n = \boldsymbol{b}_n \end{array}$$

с интервальными коэффициентами $\boldsymbol{a}_{ij}$ и интервальными правыми частями $\boldsymbol{b}_i$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, или, кратко, $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$ – интервальная n на n матрица и $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_i)$ – интервальный вектор.

Напомним, что *множеством решений* интервальной линейной системы уравнений называется множество

$$\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{x \in \measuredangle^n \mid (\exists A \in \boldsymbol{A})(\exists\, b \in \boldsymbol{b})(Ax = b)\},$$

образованное всевозможными решениями точечных систем $Ax = b$ с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$ (см., к примеру, [1, 2, 3]). Множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ является многогранным (полиэдральным) множеством, в общем случае невыпуклым, точное и полное описание которого практически невозможно в силу его огромной трудоёмкости. Чаще достаточно знать *приближённое описание*, или *оценку* множества решений более простыми множествами, и мы решаем задачу его внешнего интервального оценивания: найти (по-возможности, меньший) брус $\boldsymbol{U}$ в $\measuredangle^n$ со сторонами, параллельными координатным осям, содержащий множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ интервальной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$. Предлагаемая в работе методика является новой версией так называемого *формального подхода*, который сводит задачу оценивания множества решений к нахождению формального (алгебраического) решения специальной интервальной системы уравнений.

Литература

1. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. – Москва: Мир, 1987.

2. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. – Новосибирск: Наука, 1986.

3. Шарый С.П. Алгебраический подход во «внешней задаче» для интервальных линейных систем // Вычислительные Технологии. – 1998. – Т. 3. – № 2. – С. 67–114.

4. Miranda C. Un' osservatione su un teorema di Brouwer. – Boll. Univ. Mat. Ital. Serie II, 1940. T. 3. C. 5–7.