Теорема. Пусть $\mu : R \to H$ исчерпывающая внешняя мера. Тогда существует исчерпывающая внешняя мера $\overline{\mu} : P \to H$, продолжающая внешнюю меру μ такая, что R всюду плотно в P относительно $J\left(\overline{\mu}\right)$.

Литература

1. Савельев Л.Я. Продолжение внешних мер. Докл. АН СССР, 257, №4, 1981, С. 830-833.

О гиперболической эволюте в H_+^2

М.А. Чешкова
АлтГУ, г. Барнаул

В псевдоевклидовом пространстве [1. с. 246] R_1^3 определено скалярное произведение

$< x, y >= -x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3$ и псевдовекторное произведение [2, с. 69; 3]

$x\Lambda y = (-(x^2y^3 - x^3y^2), x^3y^1 - x^1y^3, x^1y^2 - x^2y^1)$. Обозначим

$$H_+^2 = \{x \in R_1^3 : -(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = -1, x^1 \geq 1. \qquad (1)$$

Гиперболоид H_+^2 является моделью плоскости Лобачевского L^2. Метрика на R_1^3 индуцирует риманову метрику на H_+^2. На кривой $\gamma \in H_+^2$ можно ввести естественную параметризацию.

Итак, рассмотрим кривую $\gamma \in H_+^2 : x = x(s)$, где s – длина дуги. Обозначим $\dfrac{dx}{ds} = \tau(s)$.

Разложим вектор $\dfrac{d^2x}{ds^2} = \dfrac{d\tau}{ds}$ на касательную $k_g e$ и нормальную $k_n n$ составляющие, где k_g, k_n - геодезическая и нормальная кривизны кривой γ, соответственно.

В нашем случае $n = x, k_n = 1$. Определен ортогональный репер [3] $\{ x, \tau, e \}$:

$$x\Lambda\tau = e, \tau\Lambda e = -x, x\Lambda e = -\tau, < x, x >= -1, < \tau, \tau >= 1, < e, e >= 1 \quad (2)$$

Итак, [3]

$$\frac{dx}{ds}=\tau, \frac{d\tau}{ds}=k_g e+x, \frac{de}{ds}=-k_g\tau \tag{3}$$

Окружность, принадлежащая

$$H_+^2: F(X(s)) \equiv <C-X, C-X> -a^2=0, <X,X>=-1,$$

имеет с кривой γ в точке s_0 соприкосновение второго порядка [4, с. 40], если

$F(x(s_0))=0, \frac{dF}{ds}|_{s_0}=0, \frac{d^2F}{ds^2}|_{s_0}=0$. Используя (2), (3), находим $C \parallel x'\Lambda x''=k_g x+e$.

Рассмотрим те кривые, для которых вектор C имеет мнимую длину.

Положим $c=\alpha C\in H_+^2$. Имеем $<c,c>=\alpha^2(-k_g^2+1)$.

Так как $<c,c>=-1$, то $c=\frac{1}{\sqrt{k_g^2-1}}(k_g x+e), k_g^2>1$. Кривая $\tilde{\gamma}: c=c(s)$ называется [3] гиперболической эволютой кривой γ.

Для $\gamma\in R_1^3$ определен репер Френе $\{x,\tau,\nu,\beta\}$ и формулы Френе [2, с. 70]

$$\frac{dx}{ds}=\tau, \frac{d\tau}{ds}=k\nu, \frac{d\nu}{ds}=-k\tau+\kappa\beta, \frac{d\beta}{ds}=\kappa\nu, \nu\Lambda\tau=\beta, \nu\Lambda\beta=\tau, \beta\Lambda\tau=\nu,$$
$$<\nu,\nu>=1, <\beta,\beta>=-1, <\tau,\tau>=1,$$

где $k>0, \kappa$ – кривизна и кручение кривой, ν,β – орты главной нормали и бинормали кривой, соответственно.

Теорема 1. *Кривизна кривой γ равна $k=\sqrt{k_g^2-1}$.*

Теорема 2. *Кручение кривой γ равно $\kappa=-\frac{k_g'}{k_g^2-1}$.*

Теорема 3. *Касательная к гиперболической эволюте параллельна главной нормали исходной кривой.*

Теорема 4. *Радиус-вектор c гиперболической эволюты $\tilde{\gamma}$ равен вектору β бинормали исходной кривой γ.*

Теорема 5. *Кривизна* $\tilde{k}$ *гиперболической эволюты* $\tilde{\gamma}$ *равна* $\tilde{k} = \dfrac{\sqrt{k^2 - \kappa^2}}{|\kappa|}, k^2 - \kappa^2 > 0$.

Теорема 6. *Кручение* $\tilde{\kappa}$ *гиперболической эволюты* $\tilde{\gamma}$ *равно* $\tilde{\kappa} = -\dfrac{k'\kappa - k\kappa'}{|\kappa|(k^2 - \kappa^2)}$.

Литература

1. Базылев В.Т., Дуничев К.И. Геометрия 2. – М.: Просвещение, 1975.

2. Дубровин Б.А. ,Новиков С.П., Фоменко А.Г. Современная геометрия. – М.: Наука,1979.

3. Izumiya Sh., Pei D., Sano T., Torii E. Evolutes of hyperbolic planes curves // Acta Matimatica Sinica. English Series. – 2004. – V.20. №3. P. 543-550.

4. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия.–М.: Наука,1969.

Интервальные приложения теоремы Миранды

С.П. Шарый

Институт вычислительных технологий СО РАН,

г. Новосибирск

В математическом анализе хорошо известна

Теорема Больцано-Коши.

Если функция $F : \measuredangle \to \measuredangle$ непрерывна на интервале X из $\measuredangle$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри интервала существует нуль функции *F,* т.е. точка y, в которой $F(y) = 0$.

Её многомерным аналогом является результат, опубликованный более чем столетием позже в заметке [4] –

Теорема Миранды.

Пусть $F : \measuredangle^n \to \measuredangle^n$, $F(x) = (F_1 (x), F_2 (x), \ldots , F_n (x))^{\top}$ – функция, непрерывная на брусе X из $\measuredangle n$, со сторонами, параллельными координатным осям, и для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ имеет место

$$F_i (X_1, \ldots, X_{i-1}, \inf X_i, X_{i+1}, \ldots, X_n) \cdot F_i (X_1, \ldots, X_{i-1}, \sup X_i, X_{i+1}, \ldots, X_n) \leq 0,$$