меньшим диаметра цилиндра, то вторая поверхность огибающей – часть тора, состоящая из гиперболических точек (рис. 2, рис. 3).

Литература

1. Шуликовский В.И. Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. – М., 1963.

Регулярность решений квазилинейных уравнений субэллиптического типа

Е. А. Плотникова
НГУ, г. Новосибирск

Работа посвящена теории субэллиптических дифференциальных уравнений. Исследуется регулярность слабых решений одного класса квазилинейных уравнений на группах Гейзенберга. Более конкретно, речь идет о слабых решениях $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ уравнения

$$\sum_{i=1}^{2n} X_i A_i\left(x,u,X_1u,\ldots,X_{2n}u\right) = f\left(x,u,X_1u,\ldots,X_{2n}u\right), \qquad (1)$$

где Ω – область Джона, а $A_i\left(x,u,\xi\right): H^n \times R \times R^{2n} \to R$ – дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям эллиптичности: существуют положительные константы C_1, C_2, C_3 такие, что

$$C_1^{-1}|\eta|^2 \le \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial}{\partial \xi_j} A_i\left(x,u,\xi\right)\eta_i\eta_j \le C_1|\eta|^2, \qquad (2)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{2n}\left|\frac{\partial}{\partial u} A_i\left(x,u,\xi\right)\right|^2\right)^{1/2} \le C_2\left(1+|\xi|\right),$$

$$\left(\sum_{i=1}^{2n}\left|\frac{\partial}{\partial x_i} A_i\left(x,u,\xi\right)\right|^2\right)^{1/2} \le C_3\left(1+|\xi|\right).$$

Группой Гейзенберга H^n называется связная односвязная нильпотентная группа Ли, алгебра Ли V которой градуирована, т.е. $V = V_1 \oplus V_2$, где $\dim V_1 = 2n$, $\dim V_2 = 1$, $\left[V_1,V_1\right] = V_2$, $\left[V_1,V_2\right] = 0$. Размерность Хаусдорфа группы H^n равна $\nu = 2n+2$.

Левоинвариантные векторные поля $X_i, i = 1,\ldots,2n,$ (называемые горизонтальными) составляют стандартный базис горизонтального подрасслоения V_1. Вместе с векторным полем T они образуют стандартный базис алгебры Ли, соответствующей группе H^n.

Пространство $W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ - пространство Соболева $L^2_{loc}(\Omega)$ функций, первые горизонтальные производные которых принадлежат пространству $L^2_{loc}(\Omega)$. Для $0<\alpha<1$ определим пространства Гёльдера:

$$C^{\alpha}_{loc}(\Omega)=\left\{u:\sup_{x,y\in\Omega}\frac{|\eta(x)u(x)-\eta(y)u(y)|}{d(x,y)^{\alpha}}<\infty,\forall\eta\in C^{\infty}_{0}(\Omega)\right\},$$

$$C^{1,\alpha}_{loc}(\Omega)=\left\{u:X_1u,\dots,X_{2n}u\in C^{\alpha}_{loc}(\Omega)\right\}.$$

Область называется областью Джона $\left(\Omega\in J(\alpha,\beta),0<\alpha\le\beta<\infty\right)$, если существует выделенная точка $p_0\in\Omega$ такая, что для любой точки $p\in\Omega$ существует спрямляемая кривая $\gamma(s),0\le s\le l\le\beta$, для которой $\gamma(0)=p$, $\gamma(l)=p_0$ и $dist[\gamma(s),\partial\Omega]\ge{}^{\alpha s}\!/_{l}$ для любого $s\in[0,1]$.

На первом этапе исследования вводится понятие *дифференциального отношения* на группах Гейзенберга и доказывается результат, позволяющий «дифференцировать» уравнение (1) вдоль левоинвариантных векторных полей. Далее, применяя раннее разработанный в случае группы Гейзенберга метод Л. Капоньи [2, 3] для более простого класса уравнений, доказывается, что производные вдоль вертикального и горизонтальных векторных полей принадлежат пространству $W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ и являются слабым решением уравнения вида

$$\sum_{i=1}^{2n}X_i\left\{\sum_{j=1}^{2n}a_{ij}X_jw+a_iw\right\}+\sum_{i=1}^{2n}b_iX_iw+aw=g+\sum_{i=1}^{2n}X_ig_i,\qquad(3)$$

коэффициенты которого выражаются через коэффициенты уравнения (1) и u.

Следующий этап заключается в обобщении результатов О.А. Ладыженской и Н.Н. Уральцевой [1]. Доказана

Теорема 1. *Пусть* $w\in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ *- слабое решение уравнения (3), коэффициенты удовлетворяют условиям: существуют константы* $\mu_1,\mu_2,\mu_3>0$ *такие, что для* $q>\nu$

$$\mu_1|\xi|^2\le\sum_{i,j=1}^{2n}a_{ij}\xi_i\xi_j\le\mu_2|\xi|^2,$$

$$\left\|\sum_{i=1}^{2n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{2n} b_i^2 + |a|\right\|_{q/2,\Omega} \le \mu_3, \ \|g\|_{q/2,\Omega} \le \mu_3, \ \left\|\sum_{i=1}^{2n} g_i^2\right\|_{q,\Omega} \le \mu_3.$$

Тогда $w \in C^{\alpha}_{loc}(\Omega)$.

Введем обозначения: $A_{i,\xi_j} = \frac{\partial}{\partial \xi_j} A_i(x,u,Xu)$, $A_{i,u} = \frac{\partial}{\partial u} A_i(x,u,Xu)$, $A_{i,x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} A_i(x,u,Xu)$ (аналогично для функции f).

Таким образом, основным результатом работы является следующая

Теорема 2. *Пусть* $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ *- слабое решение уравнения (1), выполняются условия (2), и, кроме этого, для* $q > \nu$ *и любого* $1 \le i_0 \le 2n$

$$\sum_{i=1}^{2n} A^2_{i,\xi_j} + \sum_{i=1}^{2n} f^2_{\xi_j} + |f_u| \in L^{q/2}(\Omega), \quad f_{x_{2n+1}} \in L^{q/2}(\Omega),$$

$$\sum_{i=1}^{2n} A^2_{i,x_{2n+1}} \in L^q(\Omega), \quad \sum_{i=1}^{2n}\left(\sum_{j=1}^{2n} A_{i,\xi_j}\left[X_{i_0}, X_j\right]u + A_{i,x_{i_0}}\right)^2 \in L^q(\Omega),$$

$$f_{x_{i_0}} + \sum_{j=1}^{2n} f_{\xi_j}\left[X_j, X_{i_0}\right]u + \sum_{i=1}^{2n}\left(A_{i,x_{i_0}} + A_{i,u}Tu\right) + \sum_{i,j=1}^{2n} A_{i,\xi_j} X_j Tu \in L^{q/2}(\Omega).$$

Тогда существует $0 < \alpha < 1$ *такое, что* $\nabla u \in C^{\alpha}_{loc}(\Omega) \cap W^{1,2}_{loc}(\Omega)$, *где* ∇u *– риманов градиент* u.

Полученные результаты могут быть распространены на двухступенчатые группы Карно.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 06–01–00735), Совета по грантам Президента Российской Федерации (грант НШ-5682.2008.1).

Литература

1. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М. : Наука, 1973.

2. Capogna L. Regularity of quasi-linear equations in the Heisenberg Group // Comm. Pure Appl. Math. – 1997. – V. 50. – P. 867–889.

3. Capogna L. Regularity of quasilinear equations and 1-quasiconformal maps in Carnot Groups // Math. Ann. 1999. V. 313, N 2. P. 263-295.