Теорема 3. *Пусть R – конечное нильпотентное кольцо, имеющее планарный граф делителей нуля. Тогда R4=(0) и* $|R| \le 24$.

Следствием предложения 1, теорем 1 и 2 является следующий результат.

Теорема 4. *Пусть R – подпрямо неразложимое конечное кольцо, удовлетворяющее тождествам (1). Граф Г(R) планарен тогда и только тогда, когда R изоморфно одному из следующих колец:*

(1) $R \cong GF(p^n)$, $p>2$;

(2) $R \cong A_3, A_3^0$;

(3) $R \cong N_{3,3}$;

(4) $R \cong N_9$;

(5) $R \cong N_{0,p}$, $p=3,5$;

(6) $R \cong \mathrm{Z}_{p^2}$, $p=3,5$;

(7) $R \cong T_{2,p}$, $p=3,5$.

Литература

1. Akbari S., Mohammadian A. On zero-divisor graphs of finite rings // Journal of Algebra. – 2007. – 314. – P. 168–184.

2. Akbari S., Maimani H.R., Yassemi S. When zero-divisor graph is planar or a complete r-partite graph // Journal of Algebra. – 2003. – 270. – pp. 169–180.

3. Belshoff R., Chapman J. Planar zero-divisor graphs // Journal of Algebra. – 2007. – 316. – P. 471–480.

4. Smith N. Infinite planar zero-divisor graphs // Communications in Algebra. – 2007. – 35. – P. 171–180.

Евклидовы кольца и их применения для решения диофантовых уравнений

А.Ю. Тюрина

БГПУ, г. Барнаул

В данной работе рассматривается решение уравнения $x^2 + y^2 = z^2$ в ряде евклидовых колец.

Определение. Пусть R-коммутативная область целостности, т.е. кольцо с 1, не содержащее делителей нуля. R называется евклидовым

кольцом, если определено отображение φ: R→Z такое, что
$1)\, \textit{если}\ a \mid b\ \textit{и}\ a \neq 0, b \neq 0, \textit{то}\ \phi(b) \leq \phi(a);$

$2)\textit{для любых}\ a, b \in R, b \neq 0, \textit{существуют такие элементы}\ q, r \in R,$
$\textit{что}\ a = bq + r,\ \textit{причем}\ \phi(r) < \phi(b).$

Пусть $Z[\sqrt{d}] = \left\{a + b\sqrt{d}\ /\ a, b \in Z\right\}$, *где* $d \in \{-1; -2; 2\}$;

$$Z[p] = \left\{\frac{a}{p^k} / (a, p) = 1, a, p \in Z,\ p - \textit{простое число}\right\}\ \textit{и}\ \ K[t] -$$

кольцо многочленов над полем К. Каждое из них является евклидовым кольцом.

Для этих колец получены следующие результаты.

Теорема 1. Уравнение $x^2 + y^2 = z^2$ имеет бесконечно много решений в кольце Z[i], каждое из которых имеет вид (dx, dy, dz), где

$$\begin{cases} x = ml - nk + (nl + mk)i, \\ y = \dfrac{l^2 + n^2 - k^2 - m^2}{2} + (lk - mn)i, \\ z = \dfrac{l^2 - n^2 - k^2 + m^2}{2} + (lk + mn)i; \end{cases}$$

для $m, n, l, k \in Z;\ d \in Z[i];\ \textit{НОД}((m, n)(l, k)) = 1.$

Теорема 2. Уравнение $x^2 + y^2 = z^2$ имеет бесконечно много решений в кольце $Z[\sqrt{2}]$, каждое из которых имеет вид (dx, dy, dz), где

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\,((ml + 2nk) + \sqrt{2}(mk + nl)) \\ y = \dfrac{\varepsilon_1 m^2 + \varepsilon_2 l^2}{2} + \varepsilon_1 n^2 + \varepsilon_2 k^2 + \sqrt{2}(\varepsilon_1 mn + \varepsilon_2 lk), \\ z = \dfrac{\varepsilon_1 m^2 - \varepsilon_2 l^2}{2} + \varepsilon_1 n^2 - \varepsilon_2 k^2 + \sqrt{2}(\varepsilon_1 mn - \varepsilon_2 lk) \end{cases}$$

для $m, n, l, k \in Z;\ m, l - \textit{нечетные числа};\ d \in Z[i];\ \varepsilon_1\varepsilon_2 = 1\ \textit{или}\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2,$
где $\varepsilon_i = \pm(1 \pm \sqrt{2})^n, n = 0, 1.$

Теорема 3. Уравнение $x^2 + y^2 = z^2$ имеет бесконечно много решений в кольце $Z[i\sqrt{2}]$, каждое из которых имеет вид (dx, dy, dz), где

$$\begin{cases} x = \pm(ac - 2bd + i\sqrt{2}(ad + bc)) \\ y = \pm(\dfrac{a^2 \mp c^2 - 2b^2 \pm 2d^2}{2} + (ab \mp cd)i\sqrt{2}) \\ z = \pm(\dfrac{a^2 \pm c^2 - 2b^2 \mp 2d^2}{2} + (ab \pm cd)i\sqrt{2}) \end{cases}$$

для $\mathrm{a,b,c,d} \in \mathrm{Z}; a, c - \text{нечетные числа}; \ d \in Z[i]$.

Теорема 4. Уравнение $x^2 + y^2 = z^2$ имеет бесконечно много решений в кольце $Z[p]$, каждое из которых имеет вид (dx, dy, dz), где

$$\begin{cases} x = \dfrac{b_1^2 - b_2^2 p^{2s}}{2}, \\ y = b_1 b_2 p^{2s}, \\ z = \dfrac{b_1^2 + b_2^2 p^{2s}}{2}; \end{cases}$$

для целых чисел s, b_1 *и* $\mathrm{b}_2; (\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2) = 1; d \in Z[p]$.

Теорема 5. Уравнение $x^2 + y^2 = z^2$ имеет бесконечно много решений в кольце $\mathrm{K[t]}$, каждое из которых имеет вид (dx, dy, dz), где

$$\begin{cases} x = mn(x-\alpha_1)^2 ... (x-\alpha_t)^2 - \dfrac{n}{m}(x-\beta_1)^2 ... (x-\beta_t)^2, \\ y = 2n(x-\alpha_1)...(x-\alpha_t)(x-\beta_1)...(x-\beta_t), \\ z = nm(x-\alpha_1)^2 ... (x-\alpha_t)^2 + \dfrac{n}{m}(x-\beta_1)^2 ... (x-\beta_t)^2; \end{cases}$$

для $\mathrm{n}, \mathrm{m}, \alpha_{\mathrm{i}}, \beta_i \in K; \ d \in K[t]$.