8. Bakalov B., Kac V.G., Voronov A.A. Cohomology of conformal algebras, Comm. Math. Phys. 200 (3) (1999) 561–598.

9. Долгунцева И.А. Когомологии Хохшильда для ассоциативных конформных алгебр // Алгебра и логика. 2007. №46(6). С. 688–706.

О классификации конечных локальных колец, радикал Джекобсона которых имеет индекс нильпотентности четыре

Е.В. Журавлев

АлтГУ, г. Барнаул

Рассматриваемый здесь результат является продолжением исследований, начатых в работах [1, 2] и посвящен строению конечных локальных колец.

Теорема. Ассоциативное кольцо R, определяемое конструкцией B, является конечным локальным кольцом характеристики p^2, радикал Джекобсона которого имеет индекс нильпотентности четыре. Обратно, каждое такое кольцо, отличное от кольца Галуа, изоморфно одному из колец конструкции B.

Конструкция B

Пусть $R_0 = GR(p^{2r},p^2)$ – кольцо Галуа и $R_0/pR_0 = GF(p^r) = F$. Пусть U, V, W – R_0-модули с порождающими множествами $\{u_1,\ldots, u_{s_1}\}$, $\{v_i\}$, $\{w_j\}$ ($0 \le i \le s_2$, $0 \le j \le s_3$) соответственно, и, кроме того, W является векторным пространством над полем F. Предположим, что

$$pu_1 \ne 0, pu_2 \ne 0,\ldots, pu_s \ne 0, pu_{s+1} = 0,\ldots, pu_{s_1} = 0,$$
$$pv_1 \ne 0, pv_2 \ne 0,\ldots, pv_\lambda \ne 0, pv_{\lambda+1} = 0,\ldots, pv_{s_2} = 0,$$

где s, λ – некоторые целые числа, $0 \le s \le s_1$, $0 \le \lambda \le s_2$.

Пусть $\{\sigma_0,\sigma_1,..,\sigma_{s_1}\}$, $\{\theta_0,\theta_1,..,\theta_{s_2}\}$, $\{\tau_0,\tau_1,..,\tau_{s_3}\}$, $\sigma_0 = \theta_0 = \tau_0 = = id_{R_0}$ – автоморфизмы R_0 и

$$\left(a_{ij}^k\right)_{s_1\times s_1},\ k = \overline{0,s_2},$$
$$\left(b_{ij}^k\right)_{s_1\times s_1}, \left(c_{ij}^k\right)_{s_1\times s_2}, \left(d_{ij}^k\right)_{s_1\times s_2}, k = \overline{0,s_3},$$
$$\left(\hat{a}_{ij}^k\right)_{s_1\times s} \left(\hat{b}_{ij}^k\right)_{s_1\times s_1}, \left(\hat{c}_{ij}^k\right)_{s_1\times s_2}, \left(\hat{d}_{ij}^k\right)_{s_1\times s_2}, k = \overline{1,s},$$
$$\left(\breve{b}_{ij}^k\right)_{s_1\times s_1}, \left(\breve{c}_{ij}^k\right)_{s_1\times s_2}, \left(\breve{d}_{ij}^k\right)_{s_1\times s_2}, k = \overline{1,\lambda},$$

– матрицы над полем F, удовлетворяющие следующим условиям:

1) множества $\left\{\left(a_{ij}^{k_1}\right)\right\}$, $\left\{\left(c_{ij}^{k_2}\right)\right\}$, $\left\{\left(d_{ij}^{k_2}\right)\right\}$ являются множествами линейно независимых матриц;

2) если $a_{ij}^{k} \neq 0$ для некоторого $0 \le k \le s_2$, то $\theta_k = \sigma_i \sigma_j$;

3) если $\hat{a}_{ij}^{k} \neq 0$ или $\hat{b}_{ij}^{k} \neq 0$ для некоторого $1 \le k \le s$, то $\sigma_k = \sigma_i \sigma_j$;

4) если $b_{ij}^{k} \neq 0$ для некоторого $0 \le k \le s_3$, то $\tau_k = \sigma_i \sigma_j$;

5) если $\breve{b}_{ij}^{k} \neq 0$ для некоторого $1 \le k \le \lambda$, то $\theta_k = \sigma_i \sigma_j$;

6) если $c_{ij}^{k} \neq 0$ или $d_{ij}^{k} \neq 0$ для некоторого $0 \le k \le s_3$, то $\tau_k = \theta_j \sigma_i$;

7) если $\hat{c}_{ij}^{k} \neq 0$ или $\hat{d}_{ij}^{k} \neq 0$ для некоторого $1 \le k \le s$, то $\sigma_k = \theta_j \sigma_i$;

8) если $\breve{c}_{ij}^{k} \neq 0$ или $\breve{d}_{ij}^{k} \neq 0$ для некоторого $1 \le k \le \lambda$, то $\theta_k = \theta_j \sigma_i$.

Кроме того, пусть выполнен один из следующих наборов ограничений:

a) $1 \le s_2 \le s_1^2$, $1 \le s_3 + 1 \le s_1 s_2$, $s = \lambda = 0$, $a_{ij}^{0} = \hat{a}_{ij}^{k} = \hat{b}_{ij}^{k} = \hat{c}_{ij}^{k} = \hat{d}_{ij}^{k} = 0$, $\breve{b}_{ij}^{k} = \breve{c}_{ij}^{k} = \breve{d}_{ij}^{k} = 0$ и для любых чисел α, β, $\gamma = \overline{1, s_1}$ и $m = \overline{0, s_3}$ справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{s_2} a_{\alpha\beta}^{k} d_{\gamma k}^{m} = \sum_{k=1}^{s_2} \left(a_{\alpha\beta}^{k}\right)^{\sigma_\alpha} c_{\alpha k}^{m};$$

b) $1 \le s_2 + 1 \le s_1^2$, $1 \le s_3 + s \le s_1 s_2 + s$, $\lambda = 0$, $b_{ij}^{0} = c_{ij}^{0} = d_{ij}^{0} = \hat{a}_{ij}^{k} = 0$, $\breve{b}_{ij}^{k} = \breve{c}_{ij}^{k} = \breve{d}_{ij}^{k} = 0$ и

$$\sum_{k=1}^{s_2} a_{\alpha\beta}^{k} d_{\gamma k}^{m_1} = \sum_{k=1}^{s_2} \left(a_{\beta\gamma}^{k}\right)^{\sigma_\alpha} c_{\alpha k}^{m_1},$$

$$a_{\alpha\beta}^{0} \delta_{\gamma}^{m_2} + \sum_{k=1}^{s_2} a_{\alpha\beta}^{k} \hat{d}_{\gamma k}^{m_2} = \left(a_{\beta\gamma}^{0}\right)^{\sigma_\alpha} \delta_{\alpha}^{m_2} + \sum_{k=1}^{s_2} \left(a_{\beta\gamma}^{k}\right)^{\sigma_\alpha} \hat{c}_{\alpha k}^{m_2}$$

для любых чисел α, β, $\gamma = \overline{1, s_1}$ и $m_1 = \overline{1, s_3}$, $m_2 = \overline{1, s}$, причем

$$\delta_{\gamma}^{m} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \gamma > s \quad \text{или} \quad \gamma \neq m, \\ 1, & \text{иначе}. \end{cases}$$

$$\delta_{\alpha}^{m} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \alpha > s \quad \text{или} \quad \alpha \neq m, \\ 1, & \text{иначе}; \end{cases}$$

c) $1 \le s' + s_2 \le (1+s_1)^2$, $1 \le s - s' + \lambda + s_3 \le (1+s_1)(s'+s_2)$, $a_{ij}^0 = b_{ij}^0 = = c_{ij}^0 = d_{ij}^0 = 0$ и $\widehat{b}_{ij}^1 = \ldots = \widehat{b}_{ij}^{s'} = 0$, $\widehat{c}_{ij}^1 = \ldots = \widehat{c}_{ij}^{s'} = 0$, $\widehat{d}_{ij}^1 = \ldots = \widehat{d}_{ij}^{s'} = 0$, $\widehat{a}_{ij}^{s'+1} = \ldots = \widehat{a}_{ij}^{s} = 0$, где $0 \le s' \le s$, и

$$\sum_{k=1}^{s_2} a_{\alpha\beta}^k d_{\gamma k}^{m_1} = \sum_{k=1}^{s_2} \left(a_{\beta\gamma}^k\right)^{\sigma_\alpha} c_{\alpha k}^{m_1},$$

$$\sum_{k=1}^{s} \left(\widehat{a}_{\alpha\beta}^k\right) a_{k\gamma}^{m_2} + \sum_{k=1}^{s_2} a_{\alpha\beta}^k \breve{d}_{\gamma k}^{m_2} = \sum_{k=1}^{s} \left(\widehat{a}_{\beta\gamma}^k\right)^{\sigma_\alpha} a_{\alpha k}^{m_2} + \sum_{k=1}^{s_2} \left(a_{\beta\gamma}^k\right)^{\sigma_\alpha} \breve{c}_{\alpha k}^{m_2},$$

$$\sum_{k=1}^{s_2} a_{\alpha\beta}^k \widehat{d}_{\gamma k}^{m_3} = \sum_{k=1}^{s_2} \left(a_{\beta\gamma}^k\right)^{\sigma_\alpha} \widehat{c}_{\alpha k}^{m_3}$$

для любых чисел α, β, $\gamma = \overline{1, s_1}$ и $m_1 = \overline{1, s_3}$, $m_2 = \overline{1, \lambda}$, $m_3 = \overline{1, s}$.

Далее, рассмотрим прямую сумму $R = F \oplus U \oplus V \oplus W$ и определим умножение на R по правилу

$$\left(\alpha_0 + \sum_{k=1}^{s_1} \alpha_k u_k + \sum_{k=1}^{s_2} \beta_k v_k + \sum_{k=1}^{s_3} \gamma_k w_k\right) \cdot \left(\alpha_0' + \sum_{k=1}^{s_1} \alpha_k' u_k + \sum_{k=1}^{s_2} \beta_k' v_k + \sum_{k=1}^{s_3} \gamma_k' w_k\right) =$$

$$= \alpha_0 \alpha_0' + p\left(\sum_{i,j=1}^{s_3} \left(a_{ij}^0 + b_{ij}^0\right)\left[\alpha_i \left(\alpha_j'\right)^{\sigma_i} + pR_0\right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{s_1} \sum_{j=1}^{s_2} \left(c_{ij}^0 \left[\alpha_i \left(\beta_j'\right)^{\sigma_i} + pR_0\right] + d_{ij}^0 \left[\beta_j \left(\alpha_i'\right)^{\theta_j} + pR_0\right]\right)\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{s_1} \left(\alpha_0 \alpha_k' + \alpha_k \left(\alpha_0'\right)^{\sigma_k} + p\left(\sum_{i,j=1}^{s_1} \left(\widehat{a}_{ij}^k + \widehat{b}_{ij}^k\right)\left[\alpha_i \left(\alpha_j'\right)^{\sigma_i} + pR_0\right] + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{i=1}^{s_1} \sum_{j=1}^{s_2} \left(\widehat{c}_{ij}^k \left[\alpha_i \left(\beta_j'\right)^{\sigma_i} + pR_0\right] + \widehat{d}_{ij}^k \left[\beta_j \left(\alpha_i'\right)^{\theta_j} + pR_0\right]\right)\right)\right) \cdot u_k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{s_2} \left(\alpha_0 \beta_k' + \beta_k \left(\alpha_0'\right)^{\theta_k} + \sum_{i,j=1}^{s_1} \dot{a}_{ij}^k \alpha_i \left(\alpha_j'\right)^{\sigma_i} + p\left(\sum_{i,j=1}^{s_1} \breve{b}_{ij}^k \left[\alpha_i \left(\alpha_j'\right)^{\sigma_i} + pR_0\right] + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{i=1}^{s_1} \sum_{j=1}^{s_2} \left(\breve{c}_{ij}^k \left[\alpha_i \left(\beta_j'\right)^{\sigma_i} + pR_0\right] + \breve{d}_{ij}^k \left[\beta_j \left(\alpha_i'\right)^{\theta_j} + pR_0\right]\right)\right)\right) \cdot v_k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{s_3} \left(\left[\alpha_0' + pR_0\right] \gamma_k' + \gamma_k \left[\alpha_0' + pR_0\right]^{\tau_k} + \sum_{i,j=1}^{s_1} b_{ij}^k \left[\alpha_i \left(\alpha_j'\right)^{\sigma_i} + pR_0\right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{s_1} \sum_{j=1}^{s_2} \left(c_{ij}^k \left[\alpha_i \left(\beta_j'\right)^{\sigma_i} + pR_0\right] + d_{ij}^k \left[\beta_j \left(\alpha_i'\right)^{\theta_j} + pR_0\right]\right)\right) \cdot w_k,$$

где $\alpha_0, \alpha'_0, \alpha_k, \alpha'_k, \beta_k, \beta'_k \in K_0$, $\gamma_k, \gamma'_k \in R_0 / pR_0$, $\dot{a}_{ij}^k \in K_0$, $\dot{a}_{ij}^k + pR_0 = a_{ij}^k$.

Литература

1. Журавлев Е.В. О классификации конечных локальных колец характеристики p^2, радикал Джекобсона которых имеет индекс нильпотентности четыре// Известия АГУ. – 2008. № 1(57). С. 18–28.

2. Журавлев Е.В. Локальные кольца порядка p^6 с 4-нильпотентным радикалом Джекобсона // Сибирские электронные математические известия [Электронный ресурс]. – 2006. Т. 3. С. 15–59. – Режим доступа: http://semr.math.nsc.ru.

3. Gorbas B., Williams G.D. Rings of order p^5. Part 2. Local rings // Journal of Algebra. 2000. V. 231.

4. Chikunji C.J. On a Class of Finite Rings // Communication in Algebra. 1999. V. 27(10).

О коммутативности ассоциативных колец

А. В. Кислицин
БГПУ, г. Барнаул

Будем рассматривать ассоциативные кольца.

В 1905 году Веддерберн доказал коммутативность любого конечного тела. С этого времени многие алгебраисты (Х. Белл, Н. Джекобсон, И. Капланский, К. Фейс, И. Херстейн и другие) начали доказывать «теоремы коммутативности», т.е. выявлять условия, при которых ассоциативные кольца являются коммутативными. Ведущие алгебраисты, доказывая «теоремы коммутативности», зачастую обобщали теоремы друг друга, но, тем не менее, остаются результаты, поддающиеся дальнейшим обобщениям.

Белл и Клейн в работе [1] рассмотрели, часто встречающееся при доказательстве коммутативности ассоциативных колец, тождество $[x^n, y] = nx^{n-1}[x, y]$. В частности, в работе [1] было доказано, что любое первичное кольцо R, в котором для любого $x \in R$ найдется целое $n = n(x) > 1$ такое, что для любого $y \in R$ выполняется $[x^n, y] = nx^{n-1}[x, y]$ будет коммутативным. На основе данного результата удалось сформулировать и доказать следующую теорему.