Пусть p – n-мерный вектор с положительными компонентами. Интервал $\boldsymbol{x}$ будем называть интервалом с пропорциями p, если его ширина пропорциональна p.

Утверждение 2. *Наибольший по размерам интервал с пропорциями p, лежащий в множестве S, имеет радиус $\lambda^* p$, где*

$$\lambda^* = \max_{x \in R^n} \min_{i=1,\dots,m} \left(\frac{A_{i:}x - b_i}{|A_{i:}|\, p} \right).$$

Центр этого интервала может располагаться во всякой точке x^*, на которой достигается λ^*.

Утверждение 2 представляет задачу о поиске наибольшего по размерам интервала с пропорциями p, лежащего в множестве S, как задачу о поиске max и arg max для вогнутой кусочно-линейной функции.

Локальные оценивающие процедуры для интервальных линейных систем уравнений

С.П. Шарый

ИВТ СО РАН, г. Новосибирск

В работе рассматриваются интервальные системы линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) вида

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{a}_{11} x_1 + \boldsymbol{a}_{12} x_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_{1n} x_n = \boldsymbol{b}_1, \\ \boldsymbol{a}_{21} x_1 + \boldsymbol{a}_{22} x_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_{2n} x_n = \boldsymbol{b}_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \boldsymbol{a}_{n1} x_1 + \boldsymbol{a}_{n2} x_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_{nn} x_n = \boldsymbol{b}_n \end{array}$$

с интервальными коэффициентами $\boldsymbol{a}_{ij}$ и интервальными правыми частями $\boldsymbol{b}_i$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, или, кратко,

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b},$$

где $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$ – интервальная $n\times n$-матрица и $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_i)$ – интервальный n-вектор. Выписанные интервальные системы мы понимаем как семейства точечных линейных систем Ax = b той же структуры с матрицами A из **A** и векторами b из **b**.

Множеством *решений* интервальной линейной системы уравнений будем называть множество

$$\Xi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) = \{\, x \in R^n \mid (\text{существует } A \in \boldsymbol{A})\ (\text{существует } b \in \boldsymbol{b})\ (\, Ax = b \,)\,\},$$

образованное всевозможными решениями точечных систем $Ax = b$ с A из $\boldsymbol{A}$ и b из $\boldsymbol{b}$ (см., к примеру, [1,2,3,4]). Часто его называют также *объединённым множеством решений*, поскольку для интервальных уравнений существуют другие множества решений, более адекватные тем или иным конкретным практическим ситуациям.

Точное и полное описание множества решений $\Xi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ практически невозможно в силу его огромной трудоёмкости, а с другой стороны и не нужно в большинстве реальных постановок задач. Чаще достаточно знать *приближённое описание*, или *оценку* множества решений более простыми множествами, имеющими меньшую конструктивную сложность. В нашей работе мы занимаемся его внешним интервальным оцениванием, стараясь найти (по-возможности, меньший) брус $\boldsymbol{U}$ в R^n со сторонами, параллельными координатным осям, содержащий множество решений $\Xi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ интервальной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$.

Локальными оценивающими процедурами для интервальных линейных систем алгебраических уравнений мы будем называть любые процедуры для локального оценивания множеств решений ИСЛАУ, т.е. не всего множества решений целиком, а лишь той его части, которая лежит в некотором заданном брусе. Более строго, интервальнозначное отображение

$$LocSol(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{z}) : IR^{m\times n} \times IR^{n} \times IR^{n} \to IR^{n}$$

называется *локальной оценивающей процедурой* для интервальных систем линейных алгебраических уравнений, если для любых интервальных матриц $\boldsymbol{A}$ и любых интервальных векторов $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{z}'$ выполнены следующие условия:

$LocSol\ (\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{z})$ содержит пересечение множества решений $\Xi(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b})$ интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ с брусом $\boldsymbol{z}$,

$LocSol\ (\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{z})$ содержится в $LocSol\ (\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{z}')$, если $\boldsymbol{z}$ содержится в $\boldsymbol{z}'$.

Зачем нужны локальные оценивающие процедуры?

С одной стороны, реальная практика нередко предъявляет к решению задачи, в самой постановке которых присутствуют двусторонние ограничения на возможные значения неизвестных переменных, вытекающие, например, из физических, экономических и т.п. соображений. Это сразу же суживает область поиска решений, и естественно было бы попытаться учесть подобные ограничения с самого начала процесса решения задачи.

С другой стороны, локальные оценивающие процедуры (особенно для ИСЛАУ) оказываются полезными как вспомогательное средство при решении более сложных задач, приводящих к необходимости измельчения области решений и отдельного исследования задачи на подобластях меньшего размера, где погрешности интервальных методов меньше и есть надежда на более успешное применение различных интервальных тестов. Такова, к примеру, ситуация с решением систем нелинейных уравнений.

В представляемой работе рассмотрены общие способы построения локальных оценивающих процедур на основе известных методов глобального решения ИСЛАУ, обсуждаются их применения и влияние на конструирование интервальных алгоритмов.

Библиографический список

1. Калмыков, С.А. Методы интервального анализа / С.А. Калмыков, Ю.И. Шокин, З.Х. Юлдашев. – Новосибирск : Наука, 1986.

2. Алефельд, Г. Введение в интервальные вычисления / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. – М. : Мир, 1987.

3. Шарый, С.П. Конечномерный интервальный анализ / С.П. Шарый. – Электронная книга, доступная на http://www.nsc.ru /interval.

4. Neumaier, A. Interval methods for systems of equations / A. Neumaier. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.