Арифметическая иерархия относительно оракула и ограничения

В.А. Ганов, В.Р. Карымов
АлтГУ, г. Барнаул

Продолжаются исследования, начатые в [1], обобщенных вычислений на абстрактных вычислительных машинах с оракулом, работающих с ограничением на число тактов работы. Эти вычисления используются для построения аналога арифметической иерархии множеств и предикатов из [2]. Фиксируется некоторый числовой оракул F, и эффективная нумерация всех программ машин с оракулом. *Кодом* машины называется номер ее программы. Через $\{z\}_t^F(\overline{x})$ обозначается значение, которое вычисляет машина с кодом z на аргументах $\overline{x}$, работающая с оракулом F и ограничением t. Запись $\overline{x}$ является сокращением записи кортежа $(x_1,\dots,x_n)$. Числовая функция $f(\overline{x})$ называется *F-вычислимой с ограничением t*, если существует машина z такая, что для всех $\overline{x}$ $\{z\}_t^F(\overline{x}) \cong f(\overline{x})$. При этом код z называется кодом $f(\overline{x})$. Естественным образом определяются F-разрешимые множества и отношения.

Определение 1. Отношение R входит в арифметическую иерархию относительно F и t, если R является F-разрешимым с ограничением t или может быть получено из некоторого F-разрешимого с ограничением t отношения S путем последовательного применения конечного числа операций проектирования и взятия дополнения.

На практике арифметические относительно F и t отношения записывают в виде (1) на основании следующего утверждения.

Теорема 1. n–местное отношение $R(x_1,\dots,x_n)$ входит в арифметическую иерархию относительно F и t тогда и только тогда, когда оно F-разрешимо с ограничением t или может быть выражено при некотором m в следующей предикатной форме

$$(Q_1 y_1)\ \dots\ (Q_m y_m) S(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m), \tag{1}$$

где Q_i – кванторы $\forall$ или $\exists$, а S - это $(n+m)$-местное отношение, F-разрешимое с ограничением t. Для краткости (1) записывается в виде $(\overline{Qy})\ S(\overline{x},\overline{y})$, Далее, аналогично [2, с. 290-303] вводятся классы $\sum_n^{F.t}$ и $\prod_n^{F.t}$ арифметических относительно F и t множеств и отношений. При этом отношения класса $\sum_n^{F.t}$ представимы в кванторной форме (1), в которой кванторная приставка начинается с $\exists$ и имеет n перемен кванторов, аналогично отношения класса $\prod_n^{F.t}$ представимы в кванторной форме (1), в которой кванторная приставка начинается с $\forall$ и имеет n перемен кванторов. В общем случае легко доказываются следующие утверждения.

Теорема 2. 1) $\sum_n^{F.t} \cup \prod_n^{F.t} \subseteq \sum_{n+1}^{F.t_1} \cap \prod_{n+1}^{F.t_1}$, где t_1 находится рекурсивно по t.

2) Для любого отношения R верно соотношение:

$$R \in \sum_n^{F.t} \leftrightarrow \neg R \in \prod_n^{F.t_1},$$

где t_1 находится рекурсивно по t.

3) Для любого $n > 0$ верно:

$$\sum_n^{F.t} - \prod_n^{F.t} \neq \varnothing; \prod_n^{F.t} - \sum_n^{F.t} \neq \varnothing.$$

Но оракул F и ограничение t на число тактов работы могут оказывать существенное влияние на выполнение предыдущих соотношений. Например, если оракул F есть всюду определенная функция, то соседние по числу n классы $\sum_n^{F.t}$, $\prod_n^{F.t}$ могут совпадать между собой. Аналогичная ситуация наблюдается при малых ограничениях t. Другая особенность в том, что при рассмотрении различных свойств замкнутости данных классов приходится изменять параметр t так, как это делалось в теореме 2.

Библиографический список

1. Ганов, В.А. Вычисления с оракулами и ограничениями / В.А.Ганов, В.Р. Карымов // МАК-2007 : материалы десятой краевой конференции по математике. – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2007.

2. Роджерс, Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость / Х. Роджерс. – М. : Мир, 1972. – 624 с.