

О математическом моделировании риска

А.Т. Семенов

НГУЭУ, г. Новосибирск

Рассматривается задача построения математических моделей риска. Традиционно модели такого типа чаще всего применяются в управлении финансовыми рисками и страховании. Однако область возможного применения таких моделей значительно шире. При принятии практического любого решения приходится сталкиваться с различного рода неопределенностями, игнорирование которых приводит к существенным потерям в качестве решения и, следовательно, к неоптимальному использованию ресурсов.

Понятие «риск» включает следующие элементы [3]:

- *субъект риска* – индивидум, малые и большие группы, организации и социальные институты, общество в целом;
- *проблемную ситуацию (ситуацию риска)* – совокупность различных обстоятельств и условий, создающих такую обстановку для того или иного вида деятельности, которая характеризуется:
 - a) наличием неопределенности исхода (решения);
 - b) необходимостью выбора решения (альтернативы);
 - c) оценкой возможности осуществления выбираемых альтернатив;
- *«снятие» ситуации риска* – выбор и реализация решения (плана действий).

Риск – это характеристика выбора и реализации решения в условиях неопределенности, т.е. некоторая функция X , определенная на множестве Ω возможных альтернатив выбора и реализации решения и принимающая значение в некотором множестве V [3].

В математических моделях риска необходимым элементом является субъективный фактор. Это вызвано тем, что риск представляет собой феномен человеческого сознания, способ оценки субъектом перспектив своей деятельности, существенный компонент его жизненного пространства. Способы учета субъективного фактора до некоторой степени разработаны в линейной теории фон Неймана – Моргенштерна [1]. В рамках этой теории с помощью функции полезности удалось формализовать понятие отношения субъекта к риску. В нелинейной теории понятие отношения к риску пока определяется только в терминах отношения предпочтения на множестве распределений риска.

Основой моделирования и анализа явлений и процессов, связанных с риском, является возможность количественной оценки риска. Доста-

точно длительное время данный вопрос являлся проблемным: в условиях отсутствия единого показателя риск характеризовался целым рядом разнородных величин, применявшихся в зависимости от целей анализа, рыночных условий, набора доступной информации и т. д.

Мерой риска называется вещественный функционал $\rho(\lambda)$, заданный на множестве всех рисков.

Для обеспечения эффективного анализа и управления рисками любая мера риска должна обеспечивать возможность:

- сравнения различных рисков, т.е. определения отношения предпочтения между ними [2];
- сопоставления оценок риска по различным инструментам, направлениям деятельности и видам рисков и получения агрегированных оценок;
- управления рисками.

Среди многообразных мер риска, используемых в теории и на практике, отметим, прежде всего, классические меры риска – математическое ожидание и дисперсию. Эти меры риска используются в настоящее время в основном вместе, составляя меру «среднее-дисперсия»; впервые она была применена Г. Марковицем для решения задачи выбора оптимального портфеля. Разновидности этой меры активно используются в портфельном и инвестиционном анализе. В качестве примера можно привести модель ценообразования CAPM (Capital Asset Pricing Model). Однако применение на практике данной меры риска имеет ряд существенных недостатков, поскольку учитываются отклонения в обе стороны (как в благоприятную, так и в неблагоприятную) от ожидаемого значения, что приводит к некорректной оценке риска. Кроме того, предполагаются известными моментные характеристики до второго порядка, которые для распределений, например, с «тяжелыми хвостами» могут и не существовать.

В связи с этим были предприняты интенсивные поиски других приемлемых мер риска. Так в 1996 г. Базельским комитетом по банковскому надзору (Basel Committee on Banking Supervision) для оценки рисков, которые могут возникнуть в результате неблагоприятной конъюнктуры рынка, была предложена величина *Value-at-risk (VaR)*. Данная мера риска представляет собой величину, которую риск не превышает с заданной вероятностью, и определяется как квантиль заданного уровня распределения риска. Методика *VaR* в настоящее время используется многими международными финансовыми организациями при установлении нормативов величины страхового запаса относительно величины своих активов.

Несмотря на свою большую популярность, *VaR* также обладает рядом серьезных недостатков. В связи с этим была предложена модификация данной меры – *CVaR* (*Conditional Value-at-Risk*) – которая лишена многих недостатков, свойственных *VaR*у. Кроме того, эта мера является более консервативной, чем *VaR*: для одного и того значения уровня риска мера *CVaR* требует большего резерва, чем *VaR*.

В настоящее время существует множество других характеристик, кроме приведенных выше, используемых на практике в качестве мер риска. Одни из них строились исходя из практических надобностей, другие – из теоретических предпосылок. В связи с этим возникает вопрос, какие меры риска считать «хорошими».

Наиболее общие разумные требования к мерам риска задаются при помощи так называемых условий когерентности (coherent). Концепция когерентности была введена впервые в работе [4], а затем развита в [5].

Мера риска $\rho(X)$ называется *когерентной*, если она является:

1) *монотонной*: $\rho(X) \leq \rho(Y)$ для любых рисков X и Y таких, что $X(\omega) \leq Y(\omega)$ при почти всех $\omega \in \Omega$;

2) *положительно однородной*: $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$ для любого риска X и любого числа $\lambda \geq 0$;

3) *инвариантной к сдвигу*: $\rho(X + c) = \rho(X) + c$ для любого риска X и любого числа $c \in R$.

4) *субаддитивной*: $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ для любых рисков X и Y .

Свойства 1) – 4) являются естественными требованиями, которые следует предъявлять к мерам риска.

Библиографический список

1. Фон Нейман, Дж. Теория игр и экономическое поведение / Дж. Фон Нейман, О. Моргенштерн. – М. : Наука, 1970.
2. Новоселов, А.А. Математическое моделирование финансовых рисков: Теория измерения / А.А. Новоселов. – Новосибирск : Наука, 2001.
3. Семенов А.Т. Введение в общую теорию риска / А.Т. Семенов. – Новосибирск : НГУЭУ, 2009.
4. Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. (1997). Thinking coherently // RISK. – Vol. 10. – P. 68 – 71.
5. Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. (1999). Coherent Measures of Risk // Mathematical Finance. – Vol. 9, № 3. – P. 203 – 228.