Опр. ε – шевелением ломаной $A_1A_2...A_m$ назовём ломаную $B_1B_2...B_m$, для которой $\left|A_kB_k\right| \le \varepsilon \quad (k = 1, 2, ..., m)$.

5. Найти ГМТ всех ломаных, являющихся ε – шевелением ломаной l.

6. Докажите существование $\varepsilon > 0$, такого, что при δ – шевелениях несамопересекающаяся l остаётся несамопересекающейся, где $\delta \le \varepsilon$.

Опр. Для отрезков a и b величина $J(a,b) = 0$, если a и b не пересекаются. $J(a,b) = 1$, если a и b пересекаются во внутренних точках. Иначе, $J(a,b)$, называемая **индексом пересечения** отрезков a и b, неопределена.

Пусть l и m –несамопересекающиеся замкнутые ломаные. Величину $J(l,m) = \sum J(a,b) \pmod 2$, где a и b – всевозможные отрезки, принадлежащие l и m, для которых определено $J(a,b)$, называют индексом пересечения ломаных l и m.

7. Для несамопересекающихся замкнутых l и m докажите, что малым шевелением l' ломаной l можно добиться, что звенья l' и m не имеют пары параллельных, l' – несамопересекающаяся замкнутая и $J(l,m) = J(l',m)$.

8. Пусть несамопересекающиеся замкнутые l и m не имеют пары параллельных звеньев. Будем передвигать l параллельным образом вдоль направления, не параллельного звеньям ломаных. Докажите возможность такого движения с сохранением индекса пересечения ломаных.

Заметьте, что нами доказана теорема: Индекс пересечения двух несамопересекающихся замкнутых ломаных равен нулю.

Опираясь на полученный факт, аналогичным дроблением студенты побуждаются далее к доказательству и самой теоремы Жордана.

Центральные расширения четырехмерных симплектических групп Ли

Я.В. Славолюбова
КемГУ, г. Кемерово

В работах [5], [6] получен список вещественных разрешимых неабелевых четырехмерных алгебр Ли. Он содержит 17 симплектических алгебр Ли.

В данной работе рассматриваются пятимерные контактные алгебры Ли, полученные из четырехмерных симплектических алгебр Ли центральным расширением. Для каждой из четырехмерных алгебр Ли классификационного списка [5], [6] построены левоинвариантные контактные метрические структуры, исследованы их свойства, найдены семейства нормальных ассоциированных контактных метрических структур [4] и η-эйнштейновых [2]. Вычислены секционные кривизны, скалярные кривизны ассоциированных метрик и тензоры кривизны, Риччи.

Пусть M^{2n+1} – многообразие с заданной на нем контактной метрической структурой (η, ξ, φ, g), где ξ – поле Риба, g – риманова метрика и φ – аффинор на M^{2n+1}. Ассоциированная метрика g для контактной структуры η полностью определяется [1] аффинором φ:

$$g(X,Y) = d\eta(\varphi X,Y) + \eta(X)\eta(Y).$$

Если в качестве многообразия берется группа Ли, то естественно рассматривать левоинвариантную контактную структуру. В этом случае контактная форма η, векторное поле Риба ξ, аффинор φ и ассоциированная метрика g задаются своими значениями в единице.

Контактную алгебру Ли можно получить из симплектической следующим классическим методом контактизации [3]. Пусть ($L(H)$, ω) – симплектическая алгебра Ли. Тогда контактная алгебра Ли получается как центральное расширение $L(H)\times_{\omega}\mathbf{R}e_0$ алгебры $L(H)$ при помощи симплектической формы ω. Скобки Ли задаются следующим образом:

$$[x,e_0]_{L(G)} = 0 \text{ для любого } x\in L(H),\ e_0\in Z(L(H)) = \mathbf{R}e_0,$$

$$[x,y]_{L(G)} = [x,y]_{L(H)} + \omega(x,y)\, e_0 \text{ для любых } x,y\in L(H).$$

Контактная форма задается равенствами: $\eta(e_0) =1$, $\eta(H) =0$.

Предположим, что симплектическая группа Ли (H, ω) является почти келеровой. Это означает, что задана левоинвариантная почти комплексная структура J_H, обладающая свойством $\omega(J_H(X), J_H(Y)) = \omega(X, Y)$. Как всегда, мы будем считать, что J_H задана оператором J_H на алгебре Ли $L(H)$, таким, что $J_H^2 =-I$. Оказывается, что такая почти келерова структура однозначно определяет K-контактную метрическую структуру на центральном расширении.

Пусть (H, ω) – симплектическая группа Ли, ($L(H)$, ω) – ее алгебра Ли, $L(G) = L(H)\times_{\omega}\mathbf{R}e_0$ – центральное расширение. Тогда имеет место

Теорема. *Левоинвариантная почти келерова структура* ($L(H)$, ω, J_H, g_H) *на симплектической группе Ли* (H, ω) *однозначно определяет левоинвариантную* K*-контактную метрическую структуру* (η, ξ, φ, g) *на центральном расширении группы* H.

Отметим, что для точной симплектической алгебры Ли ($L(H)$, $\omega = d\alpha$) контактные расширения ($L(H)\times_{\omega}\mathbf{R}e_0$, $\eta = -e^0$) и ($L(H)\times\mathbf{R}e_0$, $\eta = se^0 + \alpha$) являются изоморфными при любом значении параметра $s \neq 0$ [7].

Библиографический список

1. Blair. D.E. Contact Manifolds in Riemannian Geometry // Lecture Notes in Mathematics // Springer Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1976.

2. Davidov J. Eta-Einstein condition on twistor spaces of odd-dimensional Riemannian manifolds // Journal of Geometry 2006, 86, 42-53

3. Diatta A. Left invariant contact structures on Lie groups// arXiv: math. DG/0403555, v2, 24 Sep 2004.

4. Смоленцев Н.К. Пространства римановых метрик.// Современная математика и ее приложения, т.31, 2003, С. 69-146.

5. Ovando G. Four dimensional symplectic Lie algebras // arXiv: math/0407501v1, [math.DG], 28 Jul 2004, 21 P.

6. Ovando G. Complex, symplectic and Kahler structures on four dimensional Lie algebras // arXiv:math/0309146v1, [math.DG], 8 Sep 2003, 15 P.

7. Славолюбова Я.В. Контактные расширения четырехмерных точных симплектических групп Ли // Вестник КемГУ, 4, 2008, С. 19-24.

Одно замечание к принципу неподвижной точки

Г.Ш. Лев, А.В. Фролов

АлтГТУ им. И.И. Ползунова, г. Барнаул

Пусть B – бикомпакт в топологическом пространстве, в котором выполняется первая аксиома отделимости. Пусть, далее, $f(x)$ непрерывная числовая функция на B и T: $B \to B$ – преобразование, обладающее следующими свойствами:

1) существует единственная точка $x_0 \in B$, где $T(x_0) = x_0$;

2) $f(T(x)) > f(x)$, если $x \in B$ и $x \neq x_0$.

При выполнении сформулированных выше условий выполняется неравенство

$$f(x_0) > f(x), \quad x \in B \setminus x_0 .$$

Пример. $B = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_i \geq 0,\ \sum x_i = 1\}$ и $f(x) = x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$. Если $x_{n1} = \max\{x_i\}$ и $x_{n2} = \min\{x_i\}$, то $T(x) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, где