Модели теории множеств в языке $\mathfrak{I}$-вычислений

А.Н. Гамова
СГУ, г. Саратов

В языке вычислений на машинах Тьюринга с частичным оракулом $\mathfrak{I}$ строятся модели систем аксиом Крипке-Платека (KP) и ZF без аксиомы степени.

Предметная область образована $\mathfrak{I}$ *-множествами*, кодируемыми $\mathfrak{I}$-вычислимыми деревьями с обрывом всех цепей. Переход от дерева $x \in T(\mathfrak{I})$ к его отросткам 1-го уровня $b(x,n)$ соответствует переходу от множества $\boldsymbol{x}$ к его элементам $\boldsymbol{b(x,n)}$. Всюду далее оракул $\mathfrak{I}$ регулярный и слабо фундированный.

Теорема. Истинные формулы KP $\mathfrak{I}$ *-перечислимы.*

Элементарные формулы $\boldsymbol{x \in y}$ и $\boldsymbol{x = y}$ $\mathfrak{I}$ *-перечислимы* равномерно по их $T(\mathfrak{I})$ –кодам x, y. Доказательство $\mathfrak{I}$ *-перечислимости* Δ_0 – формул проводится индукцией по построению формул.

Покажем, что множество истинных Σ-формул $\mathfrak{I}$ *-перечислимо.* Возьмем формулу $\exists \boldsymbol{x}\, J(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, где $J(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ - Δ_0 – формула. Так как истинностное значение формулы $J(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ вычисляется с оракулом $\mathfrak{I}$ *равномерно* по кодам x,y, множество $\{\boldsymbol{x}: J(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}$ $\mathfrak{I}$ *-перечислимо.* С регулярным и слабо фундированным оракулом $\mathfrak{I}$ выбираем элемент $\boldsymbol{x_0}$, для которого истинна формула $J(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y})$, так что истинна и формула $\exists \boldsymbol{x}\, J(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

Теорема. Аксиомы KP выполнимы на $\mathfrak{I}$ *-множествах.*

Аксиомы *экстенсиональности* и *регулярности* имеют место в силу определения $\mathfrak{I}$ *-множеств*, имеющих своими элементами $\mathfrak{I}$ *-множества* и «развертками» – счетные деревья с обрывом всех цепей.

Легко показать, что аксиомы *пары, объединения, бесконечности, выбора* – истинны с оракулом $\mathfrak{I}$, вычисляющим джамп (последнее следует из регулярности и слабой фундированности оракула $\mathfrak{I}$).

Аксиома *Δ_0-выделения*: $\exists \boldsymbol{c}\ \forall \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{c} \leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{a}\ \&\ J(\boldsymbol{x}))$, где $J(\boldsymbol{x})$ -Δ_0 – формула, верна по построению. Действительно, равномерно по $T(\mathfrak{I})$-коду множества $\boldsymbol{a}$ строится $\mathfrak{I}$*-разрешимое* множество Q = $\{b(a,n): \langle n \rangle \in d_a\}$, состоящее из $T(\mathfrak{I})$-кодов его элементов (отростков дерева d_a). По индукционному допущению, для каждого $\boldsymbol{x \in a}$ $\mathfrak{I}$ – *вычислима* истинность формулы $J(\boldsymbol{x})$. Далее, из $T(\mathfrak{I})$-кодов x, как из отростков (1-го уровня) строится новое дерево c. Тогда соответствующее ему $\mathfrak{I}$-*множество* $\boldsymbol{c} = \{\boldsymbol{b}(c,n): \langle n \rangle \in d_a\ \&\ J(\boldsymbol{b}(c,n))\}$ искомое.

Аксиома *Σ-подстановки*: $\forall \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{a}\ \exists \boldsymbol{y}\ J(\mathbf{x},\mathbf{y}) \to \exists \boldsymbol{b}\ \forall \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{a}\ \exists \boldsymbol{y}\in\boldsymbol{b}\ J(\mathbf{x},\mathbf{y})$, где $J(\mathbf{x},\mathbf{y})$ Σ-формула, выполнима на *$\mathfrak{J}$-множествах*. Действительно, с регулярным оракулом $\mathfrak{J}$ строим функцию f которая по $T(\mathfrak{J})$-коду элемента $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{a}$ выдает $T(\mathfrak{J})$ – код $\boldsymbol{y}$, для которого $J(\mathbf{x},\mathbf{y})$. *$\mathfrak{J}$-вычислимость* функции f следует из регулярности оракула $\mathfrak{J}$ и установленной выше *$\mathfrak{J}$-перечислимости* истинных Σ-формул. Так как область определения функции f (т.е. множество отростков дерева a) *$\mathfrak{J}$ -разрешима*, то и множество значений *$\mathfrak{J}$-вычислимой* функции f *$\mathfrak{J}$-разрешимо*. Построенное из $T(\mathfrak{J})$-кодов элементов $Valf$ (как из отростков) дерево d_b таково, что $\boldsymbol{b}$ – искомое *$\mathfrak{J}$ -множество.*

Система аксиом KP выполнима на *$\mathfrak{J}$-множествах* равномерно по $T(\mathfrak{J})$-кодам соответствующих деревьев. Таким образом, $|\,T(\mathfrak{J})\,|$ есть допустимый ординал.

Теорема. Аксиомы ZF без аксиомы степени выполнимы на *$\mathfrak{J}$-множествах*.

Аксиомы ZF (без аксиомы степени) отличаются от аксиом KP тем, что в схемах аксиом выделения и подстановки стоят произвольные формулы J. Поэтому, если оракул $\mathfrak{J}$ будет уметь распознавать истинность произвольных формул J, проинтерпретированных на *$\mathfrak{J}$-множествах*, то в дальнейшем проверка аксиом будет такая же, как в KP. Клиниевский оракул $H_{E,G}$, который мы построим, релятивизован к функционалам E, G, где $G(a, \beta_1, \dots, \beta_k, t)$ произвольный функционал 2-го типа, определяемый в зависимости от истинности формулы J (где a- код формулы J, $\beta_1, \dots, \beta_k$ – свободные переменные 1-го типа, t – натуральное число). Значения функционала G, а также истинность формулы J равномерно вычислимы по коду a на $H_{E,G}$-вычислимых тотальных аргументах. Описанная интерпретация равносильна интерпретации на $H_{E,G}$-множествах.

Аксиома *счетности*: Всякое бесконечное *$\mathfrak{J}$-множество* счетно.

Построим отображение f; $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{\omega}$, для чего переберем отростки дерева d_x, отбрасывая «лишние», т.е. выделим бесконечную последовательность без повторений $\{\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}_1, \dots\}$, исчерпывающую все множество $\boldsymbol{x}$. Это возможно в силу проверяемости равенств: если $\boldsymbol{m}\neq \boldsymbol{n}$, то $\boldsymbol{b(x,m)} \neq \boldsymbol{b(x,n)}$ с произвольным регулярным и слабо фундированным оракулом $\mathfrak{J}$. $<\boldsymbol{n}, \boldsymbol{y}_n> \in$графику f; откуда функция f *$\mathfrak{J}$ -вычислимая* и однозначная. Таким образом, аксиома счетности имеет место с произвольным регулярным и слабо фундированным оракулом, поэтому ни с каким регулярным и слабо фундированным оракулом не может быть воспроизведена аксиома степени.

Библиографический список

1. Гамова, А.Н. Обобщенные вычисления с оракулами / А.Н. Гамова // Алгебра и логика. – 1988. – Т. 27, №2. –С. 131–147.

Различные варианты нестандартного форсинга

Ганов В.А., Дегтерева Р.В.

АлтГУ, АлтГТУ, г. Барнаул

Сначала метод форсинга использовался в качестве вспомогательного средства для решения конкретных задач, например, для доказательства независимости континуум-гипотезы, ([1]). Но на заключительном этапе от него избавлялись. Между тем сама идея форсинга представляется интереснее тех задач, для которых он был придуман.

Идея форсинга заключена в логически корректном разъединении между понятием истинная формула и понятием вынуждаемая формула. При классическом определении форсинга при специальных условиях истинные суждения совпадают с вынуждаемыми. Но определенный интерес представляет нестандартный форсинг, когда истинные суждения не совпадают с вынуждаемыми. Некоторые варианты определения нестандартного форсинга рассматриваются в этой работе.

Пусть Z – элементарная арифметика с константами для всех натуральных чисел, и $Z(N)$ – естественная модель системы Z на N, где N $=\{0, 1, 2, \ldots\}$. Буквы n, m обозначают числовые константы и предметные переменные, значениями которых являются натуральные числа. Если φ – замкнутая формула языка Z, то запись $Z(N) \models \varphi$ обозначает истинность φ в модели $Z(N)$.

Пусть к сигнатуре системы Z добавлен символ P одноместного предиката. Далее, стандартным способом определяется система $Z(P)$, являющаяся консервативным расширением системы Z. *Вынуждающие условия* – это конечные множества формул вида $P(n)$ или $\neg P(n)$, причем каждое такое множество непротиворечиво. Для удобства изложение пусть пустое множество $\varnothing$ является вынуждающим условием. В произвольных случаях вынуждающие условия обозначаются буквой Q, возможно с некоторыми индексами.

Пусть Q – вынуждающее условие, φ – замкнутая формула языка $Z(P)$. Классическое определение отношения «*Q вынуждает* φ», (обозначение: $Q \Vdash \varphi$), осуществляется индукцией по логической глубине φ и почти полностью совпадает с определением отношения $Z(N) \models \varphi$,