АЛГЕБРА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Компьютеризация доказательства теоремы Мостовского

Н.В. Белякин, Л.Л. Смолякова
Институт математики СО РАН, г. Новосибирск;
АлтГУ, г. Барнаул

Данная работа касается противоречия, полученного одним из авторов в аксиоматической теории множеств Цермело-Френкеля.

Рассматривается широко известная системы аксиом арифметики Пеано; обозначение: *АП*. Фиксируется геделевская нумерация конечных наборов формул *АП*. Пусть S обозначает произвольное конечное подмножество аксиом *АП*, и запись *consis(S)* обозначает формулу *АП*, утверждающую, что подсистема S непротиворечива. Тогда верно следующее утверждение.

Теорема Мостовского. Для любой S в системе *АП* доказуема *consis(S)*.

Более того, показано, что существует примитивно рекурсивная функция $D(z)$ такая, что если z – геделевский номер S, то значение $D(z)$ есть геделевский номер доказательства *consis(S)*. При этом в *АП* существует доказательство того, что $D(z)$ действительно есть геделевский номер доказательства *consis(S)*.

Но построение функции $D(z)$ осуществляется индукцией по логической глубине рассматриваемых формул и имеет рутинный характер. Поэтому ставится задача построить несколько программ в современном языке программирования, которые наглядно демонстрировали бы основные этапы построения функции $D(z)$. Начальные шаги сделаны в этом направлении.

Важность функции $D(z)$ в том, что с ее помощью легко получается противоречие в известной теоретико-множественной системе Цермело-Френкеля. А этот факт требует пересмотра оснований математики.