УДК 514.765

О классификации конечных локальных колец

Е.В. Журавлев
АлтГУ, г. Барнаул

Пусть R – конечное коммутативное локальное кольцо характеристики $p = 2$, $J = J(R)$ – радикал Джекобсона кольца R, $R/J(R) = GF(p^r) = F$ – конечное поле и

$$J^4 = 0, \quad \dim_F J/J^2 = 2, \quad \dim_F J^2/J^3 = 2, \quad \dim_F J^3 = 1.$$

Тогда

$$R = F \oplus Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fv_1 \oplus Fv_2 \oplus Fw$$

и

$$J = Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fv_1 \oplus Fv_2 \oplus Fw,$$

где $\{u_1, u_2, v_1, v_2, w\}$ – отмеченный базис идеала J над полем F (подробнее см. [1, 2]), причем $u_1, u_2 \in J \setminus J^2$, $v_1, v_2 \in J^2 \setminus J^3$, $w \in J^3$.

Так как $u_iu_j \in J^2$ и u_iv, $u_iv \in J^3$, то

$$u_iu_j = a_{ij}^1 v_1 + a_{ij}^2 v_2 + b_{ij} w \text{ и } u_iv_j = c_{ij} w, \; v_ju_i = d_{ij} w$$

для некоторых $a_{ij}^1, \; a_{ij}^2, \; b_{ij}, \; c_{ij}, \; d_{ij} \in F, \; i = \overline{1,2}$.

Рассмотрим матрицы умножения:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как R – коммутативное кольцо, то $C = D$, а матрицы A_1, A_2, B являются симметрическими.

Если $R(A'_1, A'_2, B', C', D')$ и $R(A''_1, A''_2, B'', C'', D'')$ – изоморфные кольца, то пары матриц $\langle A'_1, A'_2\rangle$, $\langle A''_1, A''_2\rangle$ конгруэнтны, то есть существуют невырожденные матрицы $P, R \in M_2(F)$ такие, что

$$\begin{cases} A''_1 = P^T\left(r_{11}A'_1 + r_{12}A'_2\right)P, \\ A''_2 = P^T\left(r_{21}A'_1 + r_{22}A'_2\right)P. \end{cases}$$

Конгруэнтность является отношением эквивалентности и существует всего два различных класса такой эквивалентности с представителями

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ и } \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \right\rangle,$$

где $\delta = 0$, ε, $\varepsilon \notin \Gamma = \{x^2 + x \mid x \in F\}$ [3, с. 240].

Все попарно неизоморфные кольца, матрицы A_1, A_2 которых принадлежат первому классу, определяются следующими четверками матриц:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Библиографический список

1. Журавлев Е.В. Конечные локальные кольца порядка p^6 и характеристики p, радикал Джекобсона которых имеет индекс нильпотентности четыре // Известия АлтГУ. – 2006. – №1(49). – С. 17–32.

2. Журавлев Е.В. О классификации конечных локальных колец характеристики p^2, радикал Джекобсона которых имеет индекс нильпотентности четыре // Известия АлтГУ. – 2008. – № 1(57). – С. 18–28.

3. Corbas B., Williams G.D. Congruence of two-dimensional subspaces in $M_2(K)$ (characteristic 2) // Pacific Journal of mathematics. – 1999. – V. 188, № 2. – P. 237–249.