УДК 514.765

О левоинвариантных римановых метриках четырехмерных групп Ли с гармоническим тензором концикулярной кривизны

П.Н. Клепиков, О.П. Хромова
АлтГУ, г. Барнаул

Концикулярные преобразования (т.е. нетривиальные конформные преобразования, сохраняющие геодезические окружности) и один из их инвариантов – тензор концикулярной кривизны были введены К. Яно в [1]. Позднее была установлена их важность в геометрии некоторых F-структур: комплексных, почти комплексных, кэлеровых, почти кэлеровых, контактных, почти контактных, а также в теории относительности.

В данной работе получена полная классификация вещественных четырехмерных алгебр Ли, группы Ли которых наделены левоинвариантной римановой метрикой с гармоническим тензором концикулярной кривизны. Среди полученных в результате классификации алгебр Ли выделены те метрические алгебры Ли, которые не являются концикулярно-плоскими, т.е. имеют нетривиальный тензор концикулярной кривизны.

Пусть (M, g) – риманово многообразие размерности n; X, Y, Z, V – векторные поля на M. Обозначим через ∇ связность Леви-Чивита и через $R(X,Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z$ тензор кривизны Римана. Тензор Риччи r и скалярную кривизну ρ определим соответственно как $r(X,Y) = \mathrm{tr}(V \longrightarrow R(X,V)Y)$ и $\rho = \mathrm{tr}(r)$. Рассмотрим тензор концикулярной кривизны, определяемый равенством [1]

$$Z = R - \frac{\rho}{2n(n-1)} g \circ g,$$

где $\circ$ обозначает произведение Кулкарни-Номидзу (см. [2]), или в координатах

$$Z_{hijk} = R_{hijk} - \frac{\rho}{n(n-1)} (g_{ij}g_{hk} - g_{ik}g_{hj}).$$

Дивергенцию тензора концикулярной кривизны будем определять формулой

$$\mathrm{div}\, Z_{ijk} = g^{st} Z_{ijkt;s},$$

где $Z_{ijkt;s} = \frac{\partial Z_{ijkt}}{\partial x^s} - \Gamma^l_{si} Z_{ljkt} - \Gamma^l_{sj} Z_{ilkt} - \Gamma^l_{sk} Z_{ijlt} - \Gamma^l_{st} Z_{ijkl}$ – ковариантные производные тензора Z.

Определение 1. Назовем тензор конциркулярной кривизны *гармоническим*, если $\operatorname{div} Z = 0$.

Пусть далее G – группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, $\{\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]\}$ – соответствующая алгебра Ли. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между множеством скалярных произведений в $\mathfrak{g}$ и множеством левоинвариантных римановых метрик в G (см. [2]). Будем обозначать соответствующее скалярное произведение через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и называть пару $\{\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ *метрической алгеброй Ли*.

Фиксируем базис $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ в $\mathfrak{g}$. Положим $[E_i, E_j] = C_{ij}^k E_k$, $\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k$, $\langle E_i, E_j\rangle = g_{ij}$, где C_{ij}^k – структурные константы алгебры Ли, g_{ij} – метрический тензор.

Пусть $C_{ijs} = C_{ij}^k g_{ks}$, тогда символы Кристоффеля первого и второго родов вычисляются соответственно по формулам

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}(C_{ijk} - C_{jki} + C_{kij}),\ \Gamma_{ij}^s = \Gamma_{ij,k} g^{ks},$$

где $\|g^{ks}\|$ есть матрица обратная к $\|g_{ks}\|$.

Из вышеприведенных формул следует, что тензоры Римана R_{ijkt}, Риччи r_{ik}, скалярная кривизна ρ, тензор конциркулярной кривизны Z_{ijkt} являются функциями структурных констант C_{ij}^k и компонент метрического тензора g_{ij} (см. [3–5]).

Определение 2. Будем называть алгебру Ли группы Ли *разложимой*, если она представима в виде прямой суммы алгебр Ли меньших размерностей.

Определение 3. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *унимодулярной*, если след любого внутреннего дифференцирования алгебры Ли равен нулю, т.е. $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} X) \equiv 0, \forall X \in \mathfrak{g}$, где $\operatorname{ad} X(Y) = [X, Y]$, для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Придерживаясь системы обозначений работ [4, 5], сформулируем следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть G – вещественная четырехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда $div\, Z = 0$ в том и только в том случае, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ и ее структурные константы содержатся в таблице 1.*

Следствие 1. *Среди вещественных четырехмерных унимодулярных алгебр Ли групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой и гармоническим тензором конциркулярной кривизны только алгебра $A_{3,9} \oplus A_1$ имеет нетривиальный тензор конциркулярной кривизны.*

Теорема 2. *Пусть G – вещественная четырехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда $div\, Z = 0$ в том и только в том случае, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ и ее структурные константы содержатся в таблице 2.*

Следствие 2. *Среди вещественных четырехмерных неунимодулярных алгебр Ли групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой и гармоническим тензором конциркулярной кривизны только алгебра* $A_{4,6}^{\alpha,\beta}$ *имеет тривиальный тензор конциркулярной кривизны.*

Таблица 1

Четырехмерные унимодулярные алгебры Ли с гармоническим тензором конциркулярной кривизны

№	Алгебра Ли	Ненулевые структурные константы
1	$4A_1$	
2	$A_{3,6} \oplus A_1$	$C_{2,3}^1 = c$, $C_{1,3}^2 = -c$, где $c > 0$.
3	$A_{3,9} \oplus A_1$	$C_{1,2}^3 = a$, $C_{1,2}^4 = -am$, $C_{2,3}^1 = a(m^2+1)$, $C_{1,3}^2 = -a(m^2+1)$, где $a > 0$.

Таблица 2

Четырехмерные неунимодулярные алгебры Ли с гармоническим тензором конциркулярной кривизны

№	Алгебра Ли	Ненулевые структурные константы
1	$A_2 \oplus 2A_1$	$C_{1,2}^2 = a$, где $a > 0$.
2	$2A_2$	$C_{1,2}^2 = a$, $C_{3,4}^4 = g$, где $a > 0, g > 0$.
3	$A_{3,3} \oplus A_1$	$C_{1,3}^1 = C_{2,3}^2 = a$, где $a > 0$.
4	$A_{3,7}^{\alpha} \oplus A_1$, $\alpha > 0$	$C_{1,3}^1 = C_{2,3}^2 = \alpha l$, $C_{2,3}^1 = -C_{1,3}^2 = l$, где $l > 0$.
5	$A_{4,5}^{1,1}$	$C_{1,4}^1 = C_{2,4}^2 = C_{3,4}^3 = l$, где $l > 0$.
6	$A_{4,6}^{\alpha,0}$, $\alpha \neq 0$	$C_{1,4}^1 = \alpha l$, $C_{2,4}^3 = -l$, $C_{3,4}^2 = l$, где $l > 0$.
7	$A_{4,6}^{\alpha,\alpha}$, $\alpha > 0$	$C_{1,4}^1 = C_{2,4}^2 = C_{3,4}^3 = \alpha l$, $C_{3,4}^2 = -C_{2,4}^3 = l$, где $l > 0$.
8	$A_{4,9}^1$	$C_{1,4}^1 = C_{2,3}^1 = 2a$, $C_{2,4}^2 = C_{3,4}^3 = a$, где $a > 0$.
9	$A_{4,11}^{\alpha}$	$C_{1,4}^1 = 2C_{3,4}^3 = 2C_{2,4}^2 = 2a\alpha$, $C_{2,3}^1 = 2a\lvert\alpha\rvert$, $C_{3,4}^2 = -C_{2,4}^3 = a$, где $a > 0$.
10	$A_{4,12}$	$C_{1,3}^1 = C_{2,3}^2 = a$, $C_{1,4}^1 = C_{2,4}^2 = b$, $C_{2,4}^1 = -C_{1,4}^2 = d$, где $a > 0, d > 0$.

Работа выполнена в рамках программы стратегического развития ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» на 2012-2016 годы (мероприятие «Конкурс грантов-2014», проект №2014.312.1.4), а также при поддержке Совета по грантам Президента РФ (грант НШ–2263.2014.1), Правительства РФ (госконтракт № 14.B25.31.0029), Министерства образования и науки РФ (код проекта: 1148).

Библиографический список

1. Yano K. Concircular geometry, I–IV // Proc. Imp. Acad. Tokyo. 1940. – V. 16.

2. Бессе А. Многообразия Эйнштейна: пер. с англ.: в 2 т. – М: 1990.

3. Гладунова О.П., Славский В.В. Гармонический тензор Вейля левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных унимодулярных группах Ли // Мат. труды. – 2011. – Т. 14, № 1.

4. Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай // Мат. труды. – 2008. – Т. 11, № 2.

5. Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай // Мат. труды. – 2009. – Т. 12, № 1.

УДК 514.75

Односторонние поверхности

С.С. Никеев, М.А. Чешкова

АлтГУ, г. Барнаул

Впервые уравнение односторонней поверхности, открытой Мебиусом, было получено Машке [1]. Если гауссова кривизна листа Мебиуса равна нулю, то он называется плоским. Библиография работ на эту тему дана в работе [2]. К односторонним поверхностям относятся: скрещенный колпак [3, с. 304], римская поверхность [3, с. 305], поверхность Боя [3, с. 305], [4, с. 315], бутылка Клейна [3, с. 306; 4, с. 307].

В работах [4, 5] показано разрезание бутылки Клейна на два листа Мебиуса.

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим гладкую замкнутую неплоскую кривую γ без самопересечения, заданную 4π-периодической вектор-функцией $\rho = \rho(v)$, которая не является 2π-периодической и 2π-антипериодической. Так как

$$\rho = \rho(v + 4\pi), \tag{1}$$

то функция

$$s(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) + \rho(v + 2\pi)), \tag{2}$$