Библиографический список

1. Yano K. Concircular geometry, I–IV // Proc. Imp. Acad. Tokyo. 1940. – V. 16.

2. Бессе А. Многообразия Эйнштейна: пер. с англ.: в 2 т. – М: 1990.

3. Гладунова О.П., Славский В.В. Гармонический тензор Вейля левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных унимодулярных группах Ли // Мат. труды. – 2011. – Т. 14, № 1.

4. Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай // Мат. труды. – 2008. – Т. 11, № 2.

5. Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай // Мат. труды. – 2009. – Т. 12, № 1.

УДК 514.75

Односторонние поверхности

С.С. Никеев, М.А. Чешкова

АлтГУ, г. Барнаул

Впервые уравнение односторонней поверхности, открытой Мебиусом, было получено Машке [1]. Если гауссова кривизна листа Мебиуса равна нулю, то он называется плоским. Библиография работ на эту тему дана в работе [2]. К односторонним поверхностям относятся: скрещенный колпак [3, с. 304], римская поверхность [3, с. 305], поверхность Боя [3, с. 305], [4, с. 315], бутылка Клейна [3, с. 306; 4, с. 307].

В работах [4, 5] показано разрезание бутылки Клейна на два листа Мебиуса.

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим гладкую замкнутую неплоскую кривую γ без самопересечения, заданную 4π-периодической вектор-функцией $\rho=\rho(v)$, которая не является 2π-периодической и 2π-антипериодической. Так как

$$\rho=\rho(v+4\pi), \tag{1}$$

то функция

$$s(v)=\frac{1}{2}(\rho(v)+\rho(v+2\pi)), \tag{2}$$

есть 2π -периодическая не равная нулю, а вектор-функция

$$l(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) - \rho(v+2\pi)) \qquad (3)$$

есть 2π -антипериодическая не равная нулю.

Рассмотрим линейчатую поверхность

$$r(u,v) = s(v) + ul(v) \qquad (4)$$

Если при этом кривая $s = s(v)$ не вырожденная, а вектор $l = l(v)$ не параллелен постоянному, то когда точка кривой $s = s(v)$ завершит полный оборот, то прямая $L = (s(v), l(v))$ сменит направление на противоположное.

Рассмотрим вектор нормали $n = [r_u, r_v] = [s(v), l(v)]$ вдоль линии $s = s(v)$. Так как $s(v) = s(v+2\pi)$, $l(v) = -l(v+2\pi)$, то получим $n(v) = -n(v+2\pi)$. Вектор $n = n(v)$ сменит направление на противоположное, когда точка кривой $s = s(v)$ завершит полный оборот. Поверхность М есть односторонняя.

Вектор-функция $r(u,v) = s(v) + ul(v)$, определяет лист Мебиуса, для которого $s = s(v)$ – средняя линия, а $\rho = \rho(v) = r(1,v)$ – край.

Определим поверхность K уравнением

$$r(u,v) = s(v) + \sin(u)l(v) + \sin(mu)(l(v+\pi) + f(v)e), \qquad (5)$$

$u = 0,\dots,2\pi, v = 0,\dots,2\pi$ где $f = f(v)$ – антипериодическая функция, а вектор e есть постоянный.

Если m – четное число, то кривая $v = const$ есть кривая типа восьмёрки с m секциями и поверхность замкнутая. Если m – нечётное число, то кривая $v = const$ есть незамкнутая кривая, а поверхность K есть поверхность с краем.

Имеем $n(v) = [r_u, r_v] = [s(v), l(v)] + m[s(v), l(v+\pi) + f(v)e]$. Так как $s(v) = s(v+2\pi), l(v) = -l(v+2\pi)$, то получим $n(v) = -n(v+2\pi)$. Вектор нормали $n = n(v)$ сменит направление на противоположное, когда точка кривой $s = s(v)$ завершит полный оборот. Поверхность K – односторонняя.

Рассмотрим еще одну замкнутую поверхность P

$$r(u,v) = s(v) + \cos(u)l(v) + \sin(u)s(v), \qquad (6)$$

$u = 0,\dots,2\pi, v = 0,\dots,2\pi$.

Вектор нормали вдоль кривой $r(\frac{\pi}{2}, v) = 2s(v)$ равен $n(v) = [2s'(v), l(v)]$. Он сменит направление на противоположное, когда точка кривой $r = 2s(v)$ завершит полный оборот. Поверхность K также односторонняя.

Исследуем данные поверхности, когда кривая $\rho = \rho(v)$ расположена на поверхности переноса.

Рассмотрим поверхность переноса (рис. 1)

$R(u,v) = U(u) + V(v),$

$U(u) = (\cos(u), \sin(u), \sin(2u)), V(v) = (\cos(v), \sin(v), 0).$

Зададим на этой поверхности линию $u = \frac{kv}{2}$, где k – нечетное число. Тогда функция $\rho = \rho(м)$ есть 4π -периодическая функция. Имеем

$$\rho(v) = (\cos(\frac{kv}{2}) + \cos(v), \sin(\frac{kv}{2}) + \sin(v), \sin(kv)).$$

Тогда $s(v) = (\cos(v), \sin(v), \sin(kv)), l(v) = (\cos(\frac{kv}{2}), \sin(\frac{kv}{2}), 0).$

Построим эти поверхности.

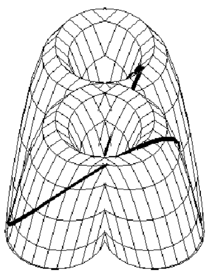


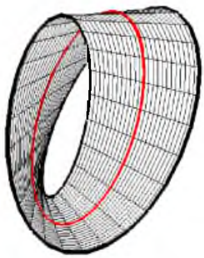
Рис. 1. Поверхность переноса и кривая на ней, $k = 1$.

Пример 1. Лист Мёбиуса при k=1 (рис. 2).

$$r(u,v) = (\cos(v) + u\cos(\frac{v}{2}), \sin(v) + u\sin(\frac{v}{2}), \sin(v)).$$

Лист Мёбиуса при k=3 (рис. 3).

$$r(u,v) = (\cos(v) + u\cos(\frac{3v}{2}), \sin(v) + u\sin(\frac{3v}{2}), \sin(3v)).$$



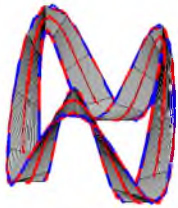


Рис. 2. Лист Мёбиуса, k=1 Рис. 3. Лист Мёбиуса, k=3

Пример 2. Бутылка Клейна при k=1, m=2 (рис. 4)

$$r(u,v) = (\cos(v) + \sin(u)\cos(\frac{v}{2}) - \sin(2u)\sin(\frac{v}{2}),$$

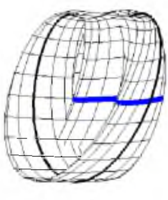
$$\sin(v) + \sin(u)\sin(\frac{v}{2}) + \sin(2u)\cos(\frac{v}{2}), \sin(v)).$$

Бутылка Клейна при k=1, m=4 (рис. 5).

$$r(u,v) = (\cos(v) + \sin(u)\cos(\frac{v}{2}) - \sin(4u)\sin(\frac{v}{2}),$$

$$\sin(v) + \sin(u)\sin(\frac{v}{2}) + \sin(4u)\cos(\frac{v}{2}), \sin(v)).$$

В разрезе получим кривую типа 8-ки с 2-мя и 4-мя секциями, соответственно в 1-м и 2-м случае.



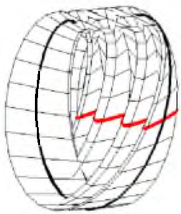


Рис. 4. Бутылка Клейна, m=2 Рис. 5. Бутылка Клейна, m=4

Пример 3. Скрещенный колпак при k=1 (рис. 7).

$$r(u,v)=(\cos(v)+\cos(u)\cos(\frac{v}{2})+\sin(u)\cos(v),$$

$$\sin(v)+\cos(u)\sin(\frac{v}{2})+\sin(u)\sin(v),\sin(v)+\sin(u)\sin(v)).$$

Скрещенный колпак при k=3 (рис. 8).

$$r(u,v)=(\cos(v)+\cos(u)\cos(\frac{3v}{2})+\sin(u)\cos(v),$$

$$\sin(v)+\cos(u)\sin(\frac{3v}{2})+\sin(u)\sin(v),\sin(v)+\sin(u)\sin(3v)).$$

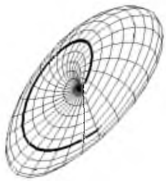


Рис. 7. Скрещенный колпак, k=1

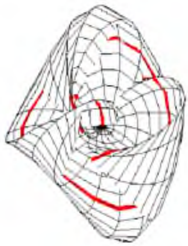


Рис. 8. Скрещенный колпак, k=3

Библиографический список

1. Mashke H. Note on the unilateral surface of Moebius // Trans. Amer. Math. Sos., 1:1(1900).

2. Сабитов И.Х. Изометрические погружения и вложения плоского листа Мебиуса в эвклидовы пространства // Известия РАН. – 2007. – Т. 71, №5.

3. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М. Аналитические поверхности. – М., 2006.

4. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. – М., 1981.

5. Чешкова М.А. О бутылке Клейна // Известия Алтайского университета. – Барнаул, 2012. – №1/1.