УДК 514.75

Обмотка тора и лист Мебиуса

М.А. Чешкова
АлтГУ, г. Барнаул

Впервые уравнение неориентируемой поверхности, открытой Мебиусом, было получено Машке [1]. Если гауссова кривизна листа Мебиуса равна нулю, то он называется плоским. Библиография работ на эту тему дана в работе [2]. В работах [3–5] строятся пересекающиеся листы Мебиуса, указано разрезание бутылки Клейна на два листа Мебиуса.

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим гладкую замкнутую неплоскую кривую γ без самопересечения, заданную с помощью 4π -периодической вектор-функци $\rho = \rho(v)$, которая не является 2π -периодической и 2π -антипериодической.

Так как $\rho(v) = \rho(v + 4\pi)$, то функция $s(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) + \rho_1(v))$, где
$\rho_1(v) = \rho(v + 2\pi)$
есть 2π -периодическая не равная нулю, а вектор-функция
$$l(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) - \rho_1(v))$$
есть 2π -антипериодическая не равная нулю.

Рассмотрим линейчатую поверхность $M\ : r(u,v) = s(v) + ul(v)$.

Когда точка кривой $s = s(v)$ завершит полный оборот, то прямая
$L = (s(v), l(v))$
сменит направление на противоположное.

Рассмотрим вектор нормали $n = [s'(v), l(v)]$ вдоль линии $s = s(v)$. Если $n \neq 0$, то $n(v)$ сменит направление на противоположное, когда точка кривой $s = s(v)$ завершит полный оборот. Поверхность M в этом случае есть односторонняя.

Линейчатая *поверхность* $r(u,v) = s(v) + ul(v)$ *есть лист Мебиуса,.*

Рассмотрим тор
$$r(u,v) = ((a + b\cos(u))\cos(v), (a + b\cos(u))\sin(v), b\sin(u)).$$

Зададим линию

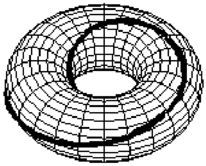
$$u=\frac{kt}{2}, v=ct \text{ , где } k \text{ – нечетное, } c \text{ – целое числа.}$$

Тогда вектор-функция

$$\rho(t)=((a+b\cos(\frac{kt}{2}))\cos(ct),(a+b\cos(\frac{kt}{2}))\sin(ct),b\sin(\frac{kt}{2})) \text{ –}$$

4π - периодическая, которая не является 2π -периодической и 2π - антипериодической (обмотка тора). Построим эти кривые и листы Мебиуса.

Пример 1. Положим $a=2, b=1, u=\frac{v}{2}$ и построим обмотку тора (рис. 1) и соответствующий лист Мебиуса, край и среднюю окружность (рис. 2).



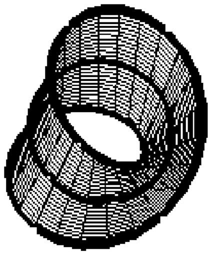
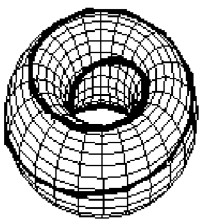


Рис. 1. Обмотка тора $a=2, b=1, u=\frac{v}{2}$

Рис. 2. Лист Мебиуса $a=2, b=1, u=\frac{v}{2}$

Пример 2. Положим $a=2, b=1, u=\frac{t}{2}, v=2t$ и построим обмотку тора (рис.3) и соответствующий лист Мебиуса, и край (рис.4).



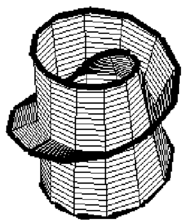


Рис. 3. Обмотка тора

$a = 2, b = 1, u = \frac{t}{2}, v = 2t$

Рис. 4. Лист Мебиуса

$a = 2, b = 1, u = \frac{t}{2}, v = 2t$

Пример 3. Положим $a = 2, b = 1, u = \frac{t}{2}, v = 3t$ и построим обмотку тора (рис. 5), и соответствующий лист Мебиуса и край (рис. 6).

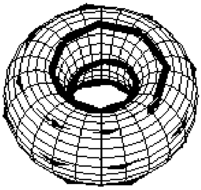


Рис. 5. Обмотка тора

$a = 2, b = 1, u = \frac{t}{2}, v = 3t$

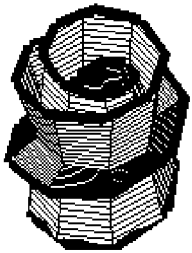


Рис. 6. Лист Мебиуса

$a = 2, b = 1, u = \frac{t}{2}, v = 3t$

Пример 4. Положим $a = 2, b = 1,, u = \frac{3v}{2}$ и построим обмотку тора (рис. 7) и соответствующий лист Мебиуса, край и среднюю окружность (рис. 8).

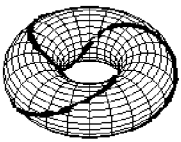


Рис. 7. Обмотка тора

$a = 2,\ b = 1,\ u = \frac{3v}{2}$

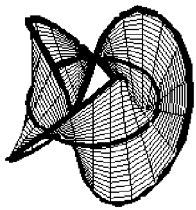


Рис. 8. Лист Мебиуса

$a = 2,\ b = 1,\ u = \frac{3v}{2}$

Библиографический список

1. Mashke H. Note on the unilateral surface of Moebius // Trans. Amer. Math. Sos. 1:1 (1900).

2. Сабитов И.Х. Изометрические погружения и вложения плоского листа Мебиуса в евклидовы пространства // Известия РАН. – 2007. – Т. 71, №5. – С. 197–224.

3. Чешкова М.А. О листе Мебиуса // Вестник Барнаульского государственного педагогического университета. – 2006. – Вып. 6. – С. 83–86.

4. Чешкова М.А. Самопересечение листа Мебиуса // Математическое образование в регионах России: труды международной научно-практической конференции. – Барнаул, 2007. – С. 50–54.

5. Чешкова М.А. О бутылке Клейна // Известия Алтайского университета. – Барнаул, 2012. №1/1. – С. 130–133.