Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства №2014/2, грантов РФФИ №13-08-01097 и 13-01-98016.

Библиографический список

1. Vardoulakis Sand-production and sand internal erosion: Continuum modeling // Alert School: Geomechanical and Structural Issues in Energy Production – 2006.

2. Папин А.А., Гагарин Л.А., Шепелев В.В., Сибин А.Н., Хворых Д.П. Математическая модель фильтрации грунтовых вод, контактирующих с многолетнемерзлыми породами // Известия АлтГУ. – Барнаул, 2013. Вып. 1/2 (77).

3. Васильев В.И., Максимов А.М., Петров Е.Е., Ципкин Г.Г. Тепломассоперенос в промерзающих и протаивающих грунтах. – М. : Наука, 1996.

4. Рекомендации по методике лабораторных испытаний грунтов на водопроницаемость и суффозионную устойчивость. – Ленинград, 1983.

5. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М. : Наука, 1978.

УДК 539.3

Численное решение задачи о напряженном состоянии вблизи трещины отрыва

С.С. Мадерн, А.В. Устюжанова

АлтГУ, Барнаул

При наличии трещины в упругом материале возникает необходимость анализа напряженного состояния вблизи вершины трещины с целью определения признаков возможного распространения трещины и последующего разрушения материала. Задачам исследования напряженного состояния в окрестности трещин посвящены ряд работ [1–3].

Рассматривается плоская задача о напряженном состоянии материала в окрестности трещины. Исследуемая область имеет вид прямоугольника, стороны которого расположены вдоль осей координат x, y. Трещина расположена в центре прямоугольника и представляет собой прямолинейный горизонтальный разрез. Берега разреза являются частью общей границы области.

Ставится задача определения в исследуемой области перемещений u, υ и напряжений σ_x, σ_y, σ_{xy}, которые должны удовлетворять уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0\,, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0\,.$$

Вне трещины поведение материала является упругим

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\big((1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\big),\ \sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\big(\nu\varepsilon_x + (1-\nu)\varepsilon_y\big),$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{xy},$$

где E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона.

Компоненты деформаций и перемещений связаны соотношениями

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ \varepsilon_y = \frac{\partial \upsilon}{\partial y},\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right).$$

Все величины в задаче являются безразмерными. В качестве характерного линейного размера выбирается горизонтальный размер прямоугольника. Вертикальный размер, отнесенный к горизонтальному, равен H. Разрез длиной $2l$ расположен на линии $y = \frac{H}{2}$.

Исследуемая область подвергается растяжению вдоль оси y. Граничные условия на внешних сторонах прямоугольника задаются для перемещений

$$\upsilon = -\upsilon_0 \text{ при } y = 0\,;\ \upsilon = \upsilon_0 \text{ при } y = H\,.$$

Берега разреза являются свободными от напряжений. При $y = \frac{H}{2}$ до линии разреза и после нее вертикальное перемещение $\upsilon = 0$.

Алгоритм численного решения поставленной задачи строится на основе метода конечных элементов [4]. Исследуемая область разбивается на конечные треугольные элементы. Сетка строится так, чтобы одна из ее линий совпадала с разрезом. При этом узлы, находящиеся на разрезе, нумеруются дважды, соответственно двум его берегам.

В ходе реализации алгоритма численного решения определяются поля напряжений и перемещений. В процессе деформирования разрез переходит в отверстие эллиптической формы, то есть раскрытие трещины происходит по типу трещины отрыва. Результаты численного решения дают возможность делать анализ напряженного состояния упругой области при наличии трещины.

Библиографический список

1. Нотт Дж. Ф. Основы механики разрушения. – М.: Металлургия, 1978.
2. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. – М.: Наука, 1985.
3. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1981.
4. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979.

УДК 536.25

Математическое моделирование двухслойных течений с испарением на основе точных решений

Е.В. Резанова

Одним из важных аспектов в изучении конвективных течений жидкостей является исследование влияния эффектов испарения на характер течений [1–3]. В данной работе рассматриваются стационарные течения в системе «жидкость – газ», находящиеся под действием продольных градиентов температуры. Двухслойные течения жидкости и газа в горизонтальном канале с непроницаемыми стенками сопровождаются испарением жидкости с термокапиллярной границы раздела. При моделировании процессов переноса в верхнем слое, состоящем из смеси газа и паров жидкости, учитываются эффекты Соре (термодиффузии) и Дюфура [4].

В качестве математической модели для определения скорости, распределения температуры и давления в нижнем слое системы используются уравнения Навье-Стокса в приближении Обербека-Буссинеска. Для моделирования течения в газо-паровом слое эту систему необходимо дополнить уравнением диффузии. Функции скорости, распределения температуры, давления, а также концентрации пара выстраиваются с помощью точных решений типа Бириха [5], вертикальная составляющая скорости полагается равной нулю, а температура и концентрация линейно зависят от продольной координаты (при этом, продольный градиент температуры и концентрации линейно зависит от поперечной координаты).

На свободной границе раздела выполнены кинематическое и динамические условия, температура удовлетворяет условию теплопереноса через границу раздела с учетом эффекта Дюфура [6–8], а концентрация