

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-08-00163).

Библиографический список

1. Гончарова О.Н. Моделирование течений в условиях тепло- и массопереноса на границе // Известия АлтГУ. – 2012. – № 73 (1/2). – С. 12–18.
2. Гончарова О.Н. Конвективные движения жидкостей под действием сопутствующих потоков газа: математическое моделирование, численные исследования // Омский научный вестник. – 2013. № 1(117). – С. 19–25.
3. Гроот С.Р. Термодинамика необратимых процессов. – М.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1956. – 281 с.
4. Резанова Е.В. Математическое моделирование двухслойных течений с учетом эффектов Соре и Дюфура // Известия АлтГУ. – 2014 – №81 (1/2) (в печати).
5. Бирих Р.В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // Прикладная механика и техническая физика. – 1966. – № 3. – С. 69-72.
6. Гончарова О.Н., Резанова Е.В. Моделирование двухслойных течений с учетом испарения на границе раздела на основе точных решений // Известия АлтГУ. – 2013. – № 1/2 (77). – С. 22–27.
7. Гончарова О.Н., Резанова Е.В. Пример точного решения стационарной задачи о двухслойных течениях при наличии испарения на границе раздела // ПМТФ. – 2014. – № 2. – С. 68–79.
8. Goncharova O.N, Hennenberg M., Rezanova E.V., Kabov O.A. Modeling of the convective fluid flows with evaporation in the two-layer systems // Interfacial Phenomena and Heat Transfer – 2013. – Vol. 1. – P. 317–338.

УДК 517.9 + 51-76

Метод Аллера–Бриана для описания воздушных потоков у поверхности листа растения с учетом влияния опущения

С.А. Саженков

*ИГиЛ СО РАН, НГУ, Новосибирск
КРИ Хэйлуцзянского университета, Харбин*

1. Предисловие. Работа посвящена построению новой математической модели аэродинамики воздушных потоков у поверхности листа

растения с учетом влияния опушения. Естественным образом, решение этой задачи лежит в области механики сплошных сред, то есть, лист моделируется как упругое или абсолютно твердое тело, обтекаемое воздухом (сжимаемым газом).

2. История вопроса. Очень простой и вместе с этим весьма востребованной является модель, предложенная в двухтомнике Гольдштейна [1]. В этой модели рассматривается процесс обтекания воздухом тонкой пластины с одним штырем, перпендикулярно приваренным к пластине. Считается, что воздух набегает на пластину параллельно ей. Дается ответ на вопрос, при каких условиях поток воздуха остается ламинарным после прохождения около штыря. Истоки этой модели лежат в области аэронавтики, более точно, в теории крыла летательного аппарата, что напрямую не имеет отношения к моделированию биологических процессов.

Тем не менее, в ряде работ, например, в работе Шройдера и соавторов [2], авторам удалось приспособить модель из монографии Гольдштейна к изучению течения воздуха в окрестности листа с трихомами одинаковой высоты.

Трихомами называются волоски (ворсинки) на поверхности листа. Основные функции трихом – защитные: длинные более редкие трихомы защищают лист от агрессии насекомых, короткие более частые трихомы создают микроклимат в непосредственной близости поверхности листа, в частности, защищают от высыхания под палящим солнцем или, в противоположном случае, от переохлаждения при заморозке.

Шройдером и соавторами проведены численные расчеты для некоторых растений, которые в рамках модели позволяют определить, при каких силе ветра и высоте трихом течение воздуха около листа остается ламинарным. Эти расчеты проведены посредством конечных явных алгебраических формул, поэтому применение даже простейших численных методов не потребовалось. Стоит отметить, что турбулентные режимы в рамках этой модели изучать невозможно.

3. О современных подходах. Более современной и гораздо более перспективной, чем в монографии Гольдштейна, является работа Хоффмана и соавторов [3]. В этой работе рассматривается механическая система, описывающая взаимодействие упругой пластины с достаточно часто расположенными на ней упругими цилиндрами малого диаметра и одинаковой фиксированной высоты. Проведена гомогенизация этой системы, то есть получена модель, в рамках которой отдельные цилиндры не различаются, а описывается эффективное течение воздуха в окрестности пластины. Гомогенизация проведена и ма-

тематически строго обоснована с помощью метода двухмасштабной сходимости Аллера–Нгуэсенса, который является достаточно глубоким методом функционального анализа. Хоффманом и соавторами проведены численные эксперименты с помощью вычислительных пакетов, разработанных в CAESAR (Center of Advanced European Studies and Research, Bonn, Germany). Найдены величины эффективных коэффициентов модели. Вообще, эта модель была выведена исходя из достаточно общих положений, и поэтому может быть применена для описания как ламинарных, так и турбулентных процессов.

4. Построение новой модели методом Аллера–Бриана. В настоящей работе построена новая математическая модель аэродинамики вблизи поверхности листа для случая трихом различной высоты. Построение этой модели основано на идеях из статьи [3] и на систематическом применении метода Аллера–Бриана многомасштабной сходимости [4]. Модель Хоффмана и соавторов допускает естественное обобщение на случай, когда количество высоких и низких трихом имеет одинаковый порядок. Скажем, например, на одной единице площади расположена одна высокая и три низких трихомы.

В сказанном выше мы предположили, что все множество трихом имеет всего два размера по высоте. Такое ограничение несущественно: в рамках модели Хоффмана и соавторов можно рассмотреть любое конечное множество высот трихом. Вместе с этим, в ряде работ, посвященных описанию строения листа растения, например, в статье Генаева и соавторов [5], замечено, что количество трихом разной высоты имеет разные порядки, то есть на одну высокую трихому на единицу площади листа приходится много низких трихом. Поэтому в настоящей работе построено естественное обобщение модели Хоффмана и соавторов. Искомая модель сконструирована методом гомогенизации Аллера–Бриана, позволяющим учитывать сложную иерархическую структуру трихом.

Построенная модель является неклассической системой интегродифференциальных уравнений. Она состоит из уравнений на макроскопическом уровне, то есть на уровне, на котором характерным размером является размер листа растения, и из уравнений на мезо- и микроскопическом уровнях. На мезо- и микроскопическом уровнях характерными размерами являются расстояния между высокими и низкими трихомами, соответственно.

Работа поддержана грантом РНФ 14-14-00734 «Изучение молекулярных механизмов развития органов растений методами системной биологии».

Библиографический список

1. S. Goldstein. Modern Developments in Fluid Dynamics. New York, Dover Publication, 1938, переиздание: 1965.
2. M.D.J. Schreuder, C.A. Brewer, and C. Heine. Modelled Influences of Non-exchanging Trichomes on Leaf Boundary Layers and Gas Exchange // *J. Theor. Biol.*, 2001, volume 210, pp. 23-32.
3. K.-H. Hoffmann, N.D. Botkin, and V.N. Starovoitov. Homogenization of interfaces between rapidly oscillating fine elastic structures and fluids // *SIAM J. Appl. Math.*, 2005, volume 65, no. 3, pp. 983-1005.
4. G. Allaire and M. Briane. Multiscale convergence and reiterated homogenization // *Proc. R. Soc. Edinb.*, 1996, issue 126A, pp. 297-342.
5. M.A. Genaev, A.V. Doroshkov, T.A. Pshenichnikova, N.I. Kolchanov, D.A. Afonnikov. Extraction of quantitative characteristics describing wheat leaf pubescence with a novel image-processing technique // *Planta*, 2012, volume 236, pp. 1943-1954.

УДК 517.958

Просачивание двухфазной жидкости через пористый грунт: вывод нелокальной модели Био методом двухмасштабной сходимости

С.А. Саженков¹, Е.В. Саженкова²

¹ИГиЛ СО РАН, НГУ, Новосибирск

КРИ Хэйлунцзянского университета, Харбин;

²НГУЭУ (НИНХ), Новосибирск

1. Постановка задачи. Рассматривается модельная линейная задача описания малых возмущений двухфазной вязкой сжимаемой жидкости в упругом пористом грунте. Движение жидких компонент описывается нестационарными уравнениями Стокса, движение упругого грунта – уравнениями Ламэ линейной теории упругости. На границе между жидкой и упругой фазами выполняется условие непрерывности перемещений и условие Рэнкина–Гюгонио. Эта система уравнений дополняется начальными условиями для перемещений и скоростей и условиями неподвижности на внешней границе.

Считается, что жидкость полностью заполняет поры и что размер пор очень мал по отношению к размеру всего пористого тела. В связи с