МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет математики и информационных технологий
Кафедра теоретической кибернетики и прикладной математики

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ

Учебно-методическое пособие

Барнаул

Издательство
Алтайского государственного
университета
2015

Составители:
доцент каф. теоретической кибернетики и прикладной математики, доцент ***В.В. Журавлева***
профессор каф. дифференциальных уравнений, доцент ***С.С. Кузиков***

В учебно-методическом пособии приводятся индивидуальные задания для лабораторных работ по дисциплине «Численные методы», изучаемой студентами факультета математики и информационных технологий Алтайского государственного университета в пятом и шестом семестрах. Для каждой работы описана постановка задачи в аналитической и численной форме, приведен перечень выполняемых заданий и даны методические указания по выполнению.

План УМД 2015 г., п. 35

Подписано в печать 16.11.2015. Формат 60х84/16
Усл.-печ. л. 1,8. Тираж 100 экз. Заказ №341
Типография Алтайского государственного университета:
656049, Барнаул, ул. Димитрова, 66

Лабораторная работа №1

по курсу «Численные методы» ФМиИТ, 5 семестр

Тема: *Численное решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка*

На отрезке $[a, b]$ требуется найти решение краевой задачи

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \tag{1}$$

$$d_1 u(a) + d_2 u'(a) = d, \quad e_1 u(b) + e_2 u'(b) = e, \tag{2}$$

$$|d_1| + |d_2| \neq 0, \quad |e_1| + |e_2| \neq 0.$$

На отрезке $[a, b]$ построим равномерную сетку:

$x_k = a + kh$, $k = 0, 1,..., N$, где $h = (b - a)/N$ – шаг сетки.

Задачу (1)–(2) аппроксимируем следующей конечноразностной задачей

$$\frac{(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})}{h^2} + \frac{p_k (y_{k+1} - y_{k-1})}{2h} + q_k y_k = f_k,$$

$$k = 1, 2, ..., N-1,$$

$$d_1 y_0 + d_2 \frac{(y_1 - y_0)}{h} = d, \tag{3}$$

$$e_1 y_N + e_2 \frac{(y_N - y_{N-1})}{h} = e.$$

Задачу (3) упростим и приведем к виду

$$a_k y_{k\text{-}1} - b_k y_k + c_k y_{k+1} = F_k, \quad k = 1, 2, ..., N-1, \tag{4}$$

$$y_0 = r_1 y_1 + s_1, \quad y_N = r_2 y_{N-1} + s_2. \tag{5}$$

Задачу (4)–(5) можно решить методом прогонки при выполнении следующих условий на её коэффициенты:

$|b_k| \geq |a_k| + |c_k|$, $k = 1, 2,..., N - 1$,

$|r_1| \leq 1$ (правая прогонка) или $|r_2| \leq 1$ (левая прогонка).

Причем хотя бы одно из этих неравенств должно быть строгим.

Метод правой прогонки

Решение системы (4) будем искать в виде

$$y_{k-1} = \alpha_k y_k + \beta_k. \tag{6}$$

Из первого условия (5) находим, что

$$\alpha_1 = r_1, \quad \beta_1 = s_1. \tag{7}$$

Из системы (4) и соотношений (6) получаем рекуррентные формулы

$$\alpha_{k+1} = \frac{c_k}{(b_k - \alpha_k a_k)}, \quad \beta_{k+1} = \frac{(\beta_k a_k - F_k)}{(b_k - \alpha_k a_k)}. \tag{8}$$

Формулы (7) и (8) позволяют определить α_k, β_k при $k = 1, 2,..., N$.

Из второго равенства (5) и равенства (6) при $k = N$ находим

$$y_N = \frac{(\beta_N r_2 + s_2)}{(1 - \alpha_N r_2)}. \tag{9}$$

Равенства (9) и (6) позволяют определить искомые значения сеточной функции y_k при $k = N, N-1,..., 0$.

Цель лабораторной работы:

Освоить решение методом прогонки краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

Порядок выполнения лабораторной работы:

1. Записать постановку задачи в аналитической форме (1)–(2) и численной (3). В вариантах 1 – 6 и 16 – 21 полагать a = 0,5, b = 1, в остальных a = 0, b = 1.
2. Провести преобразование задачи (3) к задаче вида (4)–(5). Проверить выполнение условий для метода прогонки.
3. Составить программу для решения задачи (4)–(5) методом прогонки.
4. Провести вычисления по программе.
5. Сравнить найденное численное решение с точным решением $u(x)$, оценить точность численного решения.

Варианты индивидуальных заданий:

№	$p(x)$	$q(x)$	$f(x)$	d_1	d_2	d	e_1	e_2	e	$u(x)$
1	$-3/x$	0	$4/x^2$	0	2	–4	3	2	1	$1 - \ln x$
2	$x + 1$	–2	$4(2x - 1)$	2	–1	3	2	3	0	$2(x-1)^2$
3	x	–3	$4 + 6x - 2x^2$	0	4	11	–2	1	1	$x^3 + 2x^2$
4	2	3	$2xe^{-x}$	1	–1	0	1	3	e^{-1}	xe^{-x}
5	$x - 1$	–2	$6+2x$	4	–1	2	2	–2	–2	$x^2 - 4x$

6	$1/x$	0	0	0	–1	–10	3	1	5	$5\ln x$
7	x	–2	–6	1	–5	4	1	–3	–1	$x^2 + 4$
8	$\frac{1,5}{(3x + 1)}$	$-\sqrt{3x+1}$	$2(3x + 1)$	1	–1	1	–1	2	1	$-2\sqrt{3x+1}$
9	$\frac{4x}{(x^2+1)}$	$\frac{-1}{(x^2+1)}$	$\frac{-3}{(x^2+1)^2}$	3	–2	3	2	0	1	$\frac{1}{(x^2+1)}$
10	$-x$	$-x$	$-e^{-x}$	3	–2	3	1	2	0	$(x + 1)e^{-x}$
11	$-3(x + 1)^2$	$\frac{-2}{(x+1)^2}$	3	3	–1	4	1	–2	1	$\frac{1}{(x+1)}$
12	0	$\frac{-2}{(x+1)^2}$	$\frac{4,5}{(x+1)^{3/2}}$	–1	1	1	–1	4	0	$-2(x + 1)^{0,5}$
13	$\frac{-0,5}{(x+1)}$	$-(x + 1)^{0,5}$	$-2(x + 1)^2$	–1	1	1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	2	$2(x + 1)^{3/2}$
14	$\frac{3}{(2x+1)}$	0	$\frac{12}{(2x+1)^{0,5}}$	6	–1	3	1	–1	0	$(2x + 1)^{3/2}$
15	0	$\frac{-3}{(x+1)^2}$	$\frac{4,5}{(x+1)^{0,5}}$	3	–2	0	1	–1	–2	$-2(x + 1)^{3/2}$
16	$2/x$	0	$3/x^2$	0	1	6	–2	2	6	$3\ln x$
17	2	–1	$(2 - 4x)e^{-x}$	–5	$e^{0,5}$	2	2	–2	0	$(2x - 1)e^{-x}$
18	$\frac{2}{(x+1)}$	$-3(x + 1)^2$	$3(x + 1)$	–3	9	6	1	2	0	$\frac{-1}{(x+1)}$
19	x^2	x^2	$(x^2 + x - 4)e^{-x}$	2	–2	$-8e^{-1/2}$	2	1	0	$(x - 2)e^{-x}$
20	$\frac{3x}{(x^2+1)}$	$\frac{2}{(x^2+1)}$	$\frac{4x^2}{(x^2+1)^3}$	5	0	8	3	2	1	$\frac{2}{(x^2+1)}$
21	$-2/x$	0	$-6/x^2$	0	5	5	6	3	6	$2\ln x$
22	$2x$	–4	$2x + 2$	–3	3	–3	4	2	2	$x^2 - x$
23	$\frac{2}{(x+2)}$	$\frac{-3}{(x+2)^2}$	$\frac{3}{(x+2)^{0,5}}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	4	$-\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	0	$4(x + 2)^{3/2}$
24	$x + 2$	–3	$6x^2 + 10x - 4$	–4	2	–4	3	4	1	$x^3 - 2x$
25	$-x$	$-x$	$-4e^{-x}$	3	–1	–2	e	1	2	$2xe^{-x}$
26	$x^2 - x$	$-2x$	$2 - 4x - 4x^2$	2	–1	0	2	–1	4	$(x + 1)^2$
27	$\frac{-0,5}{(x+1)}$	$-2\sqrt{x+1}$	$-2(x+1)^2$	–1	2	2	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	1	$(x + 1)^{3/2}$
28	$-2x$	6	$-2 + 6x - 2x^2$	–2	3	0	3	–2	–2	$x^3 - x^2$
29	$\frac{-1}{(x+2)}$	$\frac{1}{(x+2)^2}$	$\frac{1}{(x+2)^{0,5}}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	–4	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	18	$4(x + 2)^{3/2}$
30	$2x$	–6	$-4 + 6x + 4x^2$	3	–1	0	–2	4	–2	$x^3 - 2x^2$

Лабораторная работа №2
по курсу «Численные методы» ФМиИТ, 5 семестр

Тема: *Численное решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности*

В области $D = \{0 < x < 1;\ 0 < t < 1\}$ рассматривается следующая краевая задача для уравнения теплопроводности

$$
\begin{gathered}
u_t = u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 1, \\
u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1, \\
u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(1,t) = \mu_2(t), \quad 0 \le t \le 1.
\end{gathered} \tag{1}
$$

Построим в области D равномерную сетку

$$\omega_{h\tau} = \{(x_m,\ t_n):\ x_m = mh,\ t_n = n\tau,\ \ m = 0,\ldots,M,\ n = 0,\ldots,N,\ \ h = 1/M,\ \tau = 1/N\},$$

где M, N – задаваемые положительные целые. Иллюстрация этой сетки приведена на рисунке 1.

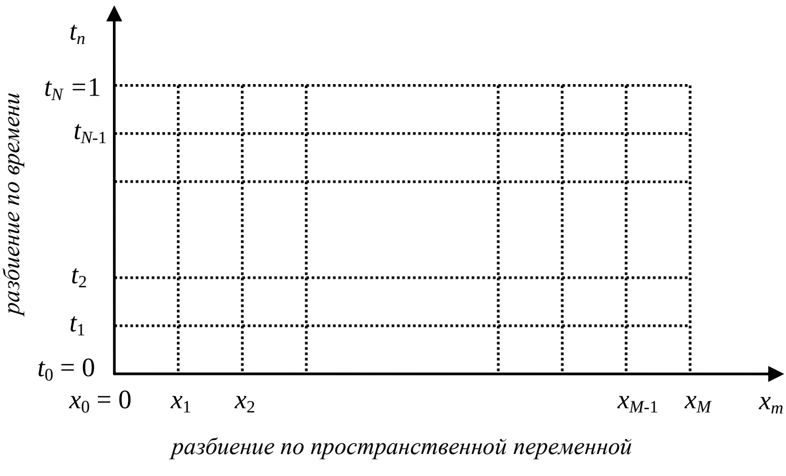


Рис. 1. Двухмерная сетка

Краевую задачу (1) аппроксимируем следующей конечноразностной задачей:

$$\frac{y_{m,n+1}-y_{m,n}}{\tau}=\sigma\frac{y_{m+1,n+1}-2y_{m,n+1}+y_{m-1,n+1}}{h^2}+$$

$$+(1-\sigma)\frac{y_{m+1,n}-2y_{m,n}+y_{m-1,n}}{h^2}+f_{m,n+1/2}, \tag{2}$$

$$m = 1,...,M-1, \quad n = 0,...,N-1,$$

$$\begin{aligned} &y_{m,0}=\varphi(x_m), \quad m=0,..,M, \\ &y_{0,n}=\mu_1(t_n), \quad y_{M,n}=\mu_2(t_n), \quad n=0,..,N. \end{aligned} \tag{3}$$

Систему уравнений (2) можно переписать в виде

$$\sigma y_{m-1,n+1}-\left(2\sigma+\frac{h^2}{\tau}\right)y_{m,n+1}+\sigma y_{m+1,n+1}=F_{m,n}, \tag{4}$$

$$m = 1,...,M-1, \quad n = 0,...,N-1,$$

где правые части задаются выражением

$$F_{m,n}=-\frac{h^2}{\tau}y_{m,n}-(1-\sigma)(y_{m-1,n}-2y_{m,n}+y_{m+1,n})-h^2 f_{m,n+1/2}.$$

Система (4) совместно с краевыми условиями (3) решается методом прогонки последовательно на каждом временном слое (соответственно при $n = 0, 1,.., N-1$).

При решении можно использовать как правую, так и левую прогонку (условия устойчивости решения методом прогонки к ошибкам округления для данной задачи выполняются автоматически).

Цель лабораторной работы:

Освоить решение методом прогонки начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Порядок выполнения лабораторной работы:

1. Используя заданную функцию $u(x,t)$, найти функции $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$.
2. Записать постановку задачи в аналитической и численной форме.
3. Составить программу для решения задачи (4)–(3) методом прогонки.
4. Провести вычисления по программе, полагая $\sigma = 0{,}5$.

5. Сравнить найденное решение с $u(x,t)$ при $t = 1$, оценить точность.

Замечание: При решении необходимо задавать шаги сетки согласно условию устойчивости для данной численной схемы!

Варианты индивидуальных заданий:

№	*Точное решение*	№	*Точное решение*
1	$u = t^3 + x$	*16*	$u = 2t^3 + 3x^2$
2	$u = tx^2 + 1$	*17*	$u = 3tx^2 + 1$
3	$u = (1 - t)^2 x + 2x^2$	*18*	$u = x^3(3 - t^2)$
4	$u = (1 + t)^3 + 2x$	*19*	$u = (1 - 2t)^2(3 - x)$
5	$u = (1 + t)x^2$	*20*	$u = 2x^2 + t(2 - x^2)$
6	$u = (2 - t)^2(1 - 2x)$	*21*	$u = t^2(1 - x)$
7	$u = t^2(4x - 2x^2)$	*22*	$u = x^2 + t(1 - x^2)$
8	$u = (2 + t)x^2 + 1$	*23*	$u = (1 - t^2)x$
9	$u = 3x^2 + t(1 - 2x^2)$	*24*	$u = t^2(x - x^2)$
10	$u = 2t^2 - x + 3$	*25*	$u = t^2 - x + 1$
11	$u = (3 + t)x^2$	*26*	$u = x^3(1 - t^2)$
12	$u = (1 - t)^2 x + x^2$	*27*	$u = (1 - t)^2(1 - x)$
13	$u = t^3 + 3x$	*28*	$u = (1 - t)\cos x + x$
14	$u = tx^2 + 2$	*29*	$u = \sin x - \cos(tx)$
15	$u = (2 - t)^2 x + 2x^2$	*30*	$u = \cos(\pi x)\sin(\pi t)$

Лабораторная работа №3
по курсу «Численные методы» ФМиИТ, 5 семестр

Тема: *Численное решение начально-краевой задачи для волнового уравнения*

В области $D = \{0 < x < a,\ 0 < t < T\}$ рассматривается краевая задача для волнового уравнения

$$
\begin{gathered}
u_{tt} = c^2 u_{xx} + f\left(x,t\right), \quad 0 < x < a, \quad 0 < t < T, \\
u\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right), \quad u_t\left(x,0\right) = \psi\left(x\right), \quad 0 \le x \le a, \\
u\left(0,t\right) = \mu_1\left(t\right), \quad u\left(a,t\right) = \mu_2\left(t\right), \quad 0 \le t \le T.
\end{gathered} \tag{1}
$$

Построим в области D равномерную сетку

$$\omega = \{(x_m, t_n):\ x_m = mh,\ t_n = n\tau,\ m = 0,...,M,\ n = 0,...,N,\ h = a/M,\ \tau = T/N\},$$

где M, N – задаваемые положительные целые.

Задачу (1) аппроксимируем следующей конечноразностной задачей со вторым порядком точности по каждой переменной

$$
\begin{gathered}
\frac{\left(y_{m,n+1} - 2y_{m,n} + y_{m,n-1}\right)}{\tau^2} = \frac{c^2\left(y_{m+1,n} - 2y_{m,n} + y_{m-1,n}\right)}{h^2} + f_{m,n}, \\
m = 1,..,M-1, \quad n = 1,..,N-1
\end{gathered} \tag{2}
$$

с разностными начальными и краевыми условиями

$$
\begin{gathered}
y_{m,0} = \varphi\left(x_m\right), \quad y_{m,1} = \varphi\left(x_m\right) + \tau\psi\left(x_m\right) + 0{,}5\tau^2\left(c^2\varphi_{xx}\left(x_m\right) + f_{m,0}\right), \\
m = 1,..,M-1, \\
y_{0,n} = \mu_1\left(t_n\right), \quad y_{M,n} = \mu_2\left(t_n\right), \quad n = 0,..,N.
\end{gathered} \tag{3}
$$

Систему уравнений (2) можно записать в виде

$$
\begin{gathered}
y_{m,n+1} = 2y_{m,n} - y_{m,n-1} + \frac{\tau^2 c^2}{h^2}\left(y_{m+1,n} - 2y_{m,n} + y_{m-1,n}\right) + \tau^2 f_{m,n}, \\
m = 1,..,M-1, \quad n = 1,..,N-1.
\end{gathered} \tag{4}
$$

Таким образом, неизвестные значения сеточной функции можно непосредственно определить через известные значения на двух предыдущих временных слоях. Подобные схемы называют явными.

Условие устойчивости данной численной схемы: $\tau \le h/c$.

Цель лабораторной работы:

Освоить численное решение по явной схеме краевой задачи для волнового уравнения.

Порядок выполнения лабораторной работы:

1. Используя заданную функцию $u(x,t)$, определить функции $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$.
2. Записать задачу в аналитической форме (1) и конечноразностную задачу (4)–(3).
3. Составить программу для решения задачи (4)–(3).
4. Провести вычисления по программе.
5. Сравнить решение с точным $u(x,t)$ при $t = T$ и оценить погрешность.

Варианты индивидуальных заданий:

№	c^2	a	T	$u(x,t)$
1	1	π	π	$\cos(2x) + \sin(t)$
2	2	1	π/2	$e^x + \cos(t)$
3	3	π	1	$e^t + \sin(x)$
4	4	π	π	$\sin(x/2) + \cos(\mathrm{t})$
5	5	1	2	$x^2 + xt^2 + t$
6	6	1	π/2	$x + x^2\sin(2t)$
7	7	π/2	1	$e^{x+t} + \cos(x)$
8	8	1	π/2	$x^3\cos(2t) + x$
9	9	1	1	$x^2e^t + x$
10	10	1	π	$\sin(t) + x^2 + x$
11	11	π	3π/2	$\cos(t) + \cos(x) + 1$
12	12	1	π/2	$\cos(t) + x^3 + 2x$
13	13	2	1	$e^{x-2t} + t$
14	14	π/2	1	$\sin(2x) + e^t$
15	15	1,2	1	$x^2e^{2t} + x$
16	16	π	π	$\cos(2x) + \sin(t)$
17	17	1	π/2	$e^x + \cos(t)$
18	18	π	1	$e^t + \sin(x)$
19	19	π	π	$\sin(x/2) + \cos(t)$

20	20	1	2	$x^2 + xt^2 + t$
21	21	1	π/2	$x + x^2\sin(2t)$
22	22	π/2	1	$e^{x+t} + \cos(x)$
23	23	1	π/2	$x^3\cos(2t) + x$
24	24	1	1	$x^2e^t + x$
25	25	1	π	$\sin(t) + x^2 + x$
26	26	π	3π/2	$\cos(t) + \cos(x) + 1$
27	27	1	π/2	$\cos(t) + x^3 + 2x$
28	28	2	1	$e^{x-2t} + t$
29	29	π/2	1	$\sin(2x) + e^t$
30	30	1,2	1	$x^2e^{2t} + x$

Лабораторная работа №4

по курсу «Численные методы» ФМиИТ, 5 семестр

Тема: *Метод переменных направлений для решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности*

В области $D = \{0 < x < a,\ \ 0 < y < b,\ \ 0 < t < T\}$ рассмотрим краевую задачу для двумерного уравнения теплопроводности

$$\begin{gathered} u_t = u_{xx} + u_{yy} + f\left(x, y, t\right), \\ 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad 0 < t < T, \\ u\left(x, y, 0\right) = \varphi\left(x, y\right), \quad 0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le b, \\ u\left(0, y, t\right) = \mu_1\left(y, t\right), \quad u\left(a, y, t\right) = \mu_2\left(y, t\right), \quad 0 \le y \le b, \quad 0 < t < T, \\ u\left(x, 0, t\right) = \mu_3\left(x, t\right), \quad u\left(x, b, t\right) = \mu_4\left(x, t\right), \quad 0 \le x \le a, \quad 0 < t < T. \end{gathered} \tag{1}$$

В области D построим равномерную сетку с шагами по направлениям x и y $h_x = a/M_1$, $h_y = b/M_2$ и шагом по времени $\tau = T/N$:

$$\begin{gathered} \omega = \{(x_k, y_m, t_n): x_k = kh_x, y_m = mh_y, t_n = n\tau, \\ k = 0,..., M_1, m = 0,..., M_2, n = 0,..., N\}, \end{gathered}$$

где M_1, M_2, N – задаваемые положительные целые.

Значение функции в узлах сетки (x_k, y_m, t_n) будем обозначать $U^n_{k,m} = U(x_k, y_m, t_n)$. Наряду с основными значениями искомой сеточной функции $U^n_{k,m}$ и $U^{n+1}_{k,m}$ вводится промежуточное значение $U^{n+1/2}_{k,m}$, которое можно формально рассматривать как значение сеточной функции U при $t = t_{n+1/2} = t_n + \tau/2$.

Переход от слоя n к слою (n+1) совершается в два этапа с шагами $0,5\tau$ согласно разностным схемам следующего вида:

$$\frac{\left(U^{n+1/2} - U^n\right)}{0,5\tau} = \Lambda_1 U^{n+1/2} + \Lambda_2 U^n + f^{n+1/2}, \tag{2}$$

$$\frac{\left(U^{n+1} - U^{n+1/2}\right)}{0,5\tau} = \Lambda_1 U^{n+1/2} + \Lambda_2 U^{n+1} + f^{n+1/2}, \tag{3}$$

для $n = 0,1,\ldots, N–1$.

Уравнения (2)–(3) должны быть записаны во всех внутренних узлах сетки (x_k, y_m). Операторы

$$\Lambda_1 U = \frac{\left(U_{k-1,m} - 2U_{k,m} + U_{k+1,m}\right)}{h_x^2},$$

$$\Lambda_2 U = \frac{\left(U_{k,m-1} - 2U_{k,m} + U_{k,m+1}\right)}{h_y^2}$$

аппроксимируют вторые производные по x и y со вторым порядком точности.

К уравнениям (2), (3) необходимо добавить начальные условия

$$U_{k,m}^0 = \varphi\left(x_k, y_m\right), \quad k = 0,..,M_1, \quad m = 0,..,M_2 \tag{4.0}$$

и разностные краевые условия (для каждого временного шага) в виде

$$U_{k,0}^{n+1} = \mu_3\left(x_k, t_{n+1}\right), \quad k = 0,..,M_1, \tag{4.1}$$

$$U_{k,M_2}^{n+1} = \mu_4\left(x_k, t_{n+1}\right), \quad k = 0,..,M_1, \tag{4.2}$$

$$U_{0,m}^{n+1/2} = \frac{\left(\mu_1\left(y_m, t_{n+1}\right) + \mu_1\left(y_m, t_n\right)\right)}{2} - \frac{\tau\Lambda_2\left(\mu_1\left(y_m, t_{n+1}\right) - \mu_1\left(y_m, t_n\right)\right)}{4}, \tag{4.3}$$

$$U_{M_1,m}^{n+1/2} = \frac{\left(\mu_2\left(y_m, t_{n+1}\right) + \mu_2\left(y_m, t_n\right)\right)}{2} - \frac{\tau\Lambda_2\left(\mu_2\left(y_m, t_{n+1}\right) - \mu_2\left(y_m, t_n\right)\right)}{4}, \tag{4.4}$$

$$m = 0,..,M_2.$$

Схема (2) неявна по направлению x и явна по направлению y, схема (3) неявна по направлению y и явна по направлению x.

Схему (2) перепишем в виде:

$$U_{k-1,m}^{n+1/2} - 2\left(1 + \frac{h_x^2}{\tau}\right)U_{k,m}^{n+1/2} + U_{k+1,m}^{n+1/2} = F_{k,m}^n,$$

$$F_{k,m}^n = \frac{h_x^2}{h_y^2}\left(-U_{k,m-1}^n + 2\left(1 - \frac{h_y^2}{\tau}\right)U_{k,m}^n - U_{k,m+1}^n\right) - h_x^2 f_{k,m}^{n+1/2}, \tag{5}$$

$$k = 1,..,M_1 - 1, \quad m = 1,..,M_2 - 1.$$

Схему (3) перепишем в виде:

$$U_{k,m-1}^{n+1} - 2\left(1 + \frac{h_y^2}{\tau}\right)U_{k,m}^{n+1} + U_{k,m+1}^{n+1} = F_{k,m}^{n+1/2},$$

$$F_{k,m}^{n+1/2} = \frac{h_y^2}{h_x^2}\left(-U_{k-1,m}^{n+1/2} + 2\left(1 - \frac{h_x^2}{\tau}\right)U_{k,m}^{n+1/2} - U_{k+1,m}^{n+1/2}\right) - h_y^2 f_{k,m}^{n+1/2}, \qquad (6)$$

$$k = 1,..,M_1 - 1, \quad m = 1,..,M_2 - 1.$$

Пусть на слое n определены значения $U_{k,m}^{n}$. Вычисляем правые части (5), затем методом прогонки вдоль строк m = 1,...,M_2–1 решаем задачу (5) и определяем $U_{k,m}^{n+1/2}$, после чего вычисляем правые части (6) и решаем задачу (6) вдоль столбцов k = 1,...,M_1–1, определяя $U_{k,m}^{n+1}$. При переходе от слоя (n+1) к слою (n+2) процедура счета повторяется и, таким образом, происходит чередование направлений.

Цель лабораторной работы:

Освоить метод переменных направлений решения краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Порядок выполнения лабораторной работы:

1. Используя заданную функцию $u(x,y,t)$, найти функции $f(x,y,t)$, $\varphi(x,y)$, $\mu_1(y,t)$, $\mu_2(y,t)$, $\mu_3(x,t)$, $\mu_4(x,t)$.
2. Записать постановку задачи в аналитической и численной форме.
3. Составить программу для решения задачи (5)–(6) с условиями (4.1)–(4.4) методом переменных направлений.
4. Провести вычисления по программе.
5. Сравнить найденное решение с точным $u(x,y,t)$ при $t = T$, оценить его точность.

Варианты индивидуальных заданий:

№	***a***	***b***	***T***	***u*(*x*,*y*,*t*)**
1	π	π	π	$\cos 2x + \cos y + \sin t$
2	1	1	π/2	$ye^x + \cos t$
3	π	1	1	$\sin x + y^2 + \cos t$
4	π	1	π	$\sin(x/2) + e^y + \cos t$
5	1	2	2	$x^2 + y^2 + t^2$

6	1	2	$\pi/2$	$x^2 + y\sin 2t$
7	$\pi/2$	1	1	$e^{y+t} + \cos x$
8	1	1	$\pi/2$	$x^3\cos 2t + e^y$
9	2	1	1	$xe^t + y^3$
10	1	$\pi/2$	π	$x^3 + \cos y + e^t$
11	π	$\pi/2$	1	$\cos x + \cos 2y + te^t$
12	1	π	1	$x^3 + t^3 + \cos y$
13	1	2	1	$e^{x+y} + t^3$
14	1	1,5	$\pi/2$	$xe^x + y + \cos 2t$
15	1	1	π	$x^3 + y^3 + \sin t$
16	π	π	π	$\sin 2x + \cos y + \cos t$
17	1	1	$\pi/2$	$ye^x + \sin t$
18	π	1	1	$\cos x + y^2 + \sin t$
19	π	1	π	$\cos(x/2) + e^y + \sin t$
20	2	1	2	$x^2 + y^2 + t^2$
21	1	2	$\pi/2$	$x^2 + y\cos 2t$
22	$\pi/2$	1	1	$e^{y+t} + \sin x$
23	1	1	$\pi/2$	$x^3\sin 2t + e^y$
24	1	2	2	$xe^t + y^3$
25	1	$\pi/2$	π	$x^3 + \sin y + e^t$
26	π	$\pi/2$	1	$\sin x + \sin 2y + te^t$
27	1	π	1	$x^3 + t^3 + \sin y$
28	2	1	2	$e^{x+y} + t^3$
29	1	1,5	$\pi/2$	$xe^x + y + \sin 2t$
30	1	1	π	$x^3 + y^3 + \cos t$

Лабораторная работа №5

по курсу «Численные методы» ФМиИТ, 5 семестр

Тема: *Численное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона попеременно-треугольным методом*

Рассмотрим в области $D = \{(x,y) : 0 < x < A,\ 0 < y < B\}$ задачу

$$-u_{xx} - u_{yy} = f(x,y), \quad 0 < x < A,\ 0 < y < B, \qquad (1)$$
$$u|_{\Gamma} = v(x,y) \text{ на границе области } D,$$

где $v(x,y)$, $f(x,y)$ – заданные функции.

Построим равномерную сетку с шагами $h_x = A/N_x$, $h_y = B/N_y$ по направлениям x, y и «временным» шагом τ:

$$\{(x_i, y_j, t_k): x_i = ih_x,\ y_j = jh_y,\ t_k = k\tau,\ i = 0,\dots, N_x,\ j = 0,\dots, N_y,\ k = 0,\dots, N\}.$$

Вычисления построим согласно разностной схемы

$$E + \omega\cdot R_1 \quad E + \omega\cdot R_2 \quad \frac{U^{k+1} - U^k}{\tau_{k+1}} - \Lambda U^k = f, \qquad (2)$$
$$1 \le i \le N_x - 1, \quad 1 \le j \le N_y - 1,$$
$$U^k\Big|_{\Gamma} = v, \quad 0 \le k \le N-1,$$

где E – единичный оператор, разностные операторы R_1, R_2 и Λ определяются по формулам:

$$R_1(U_{i,j}) = \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{h_y^2},$$
$$R_2(U_{i,j}) = -\frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{h_x^2} - \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{h_y^2},$$
$$\Lambda U_{i,j} = \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}}{h_y^2}.$$

Реализация приведенной схемы проходит в четыре этапа.
Для $k = 0,1, \dots, N-1$ решаются последовательно задачи

1. $R^k = \Lambda U^k + f$,
2. $(E + \omega R_1)W^k = R^k$,

3. $(E + \omega R_2)Q^k = W^k$,
4. $U^{k+1} = U^k + \tau_{k+1} \cdot Q^k$.

Решения этих задач имеют вид:

1. $$R^k_{i,j} = \frac{U^k_{i-1,j} - 2U^k_{i,j} + U^k_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{U^k_{i,j-1} - 2U^k_{i,j} + U^k_{i,j+1}}{h_y^2} + f_{i,j},$$

$i = 1, 2,.., N_x - 1$, $j = 1, 2,.., N_y - 1$.

2. $$W^k_{i,j} = \alpha W^k_{i-1,j} + \beta W^k_{i,j-1} + \gamma R^k_{i,j},$$

$W^k_{0,j} = 0$, $W^k_{i,0} = 0$, $i = 1, 2,.., N_x - 1$, $j = 1, 2,.., N_y - 1$.

3. $$Q^k_{i,j} = \alpha Q^k_{i+1,j} + \beta Q^k_{i,j+1} + \gamma W^k_{i,j},$$

$Q^k_{N_x,j} = 0$, $Q^k_{i,N_y} = 0$, $i = N_x - 1, \ldots, 2, 1$, $j = N_y - 1, \ldots, 2, 1$.

4. $U^{k+1}_{i,j} = U^k_{i,j} + \tau_{k+1} Q^k_{i,j}$, $i = 1, 2,.., N_x - 1$, $j = 1, 2,.., N_y - 1$.

Константы определяются по следующим формулам:

$\delta = \frac{4}{h_x^2}\sin^2\left(\frac{\pi \cdot h_x}{2A}\right) + \frac{4}{h_y^2}\sin^2\left(\frac{\pi \cdot h_y}{2B}\right)$ – минимальное собственное число; $\Delta = \frac{4}{h_x^2} + \frac{4}{h_y^2}$ – максимальное собственное число; $\omega = \frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}}$;

$$\alpha = \frac{\omega \cdot h_y^2}{Z}, \quad \beta = \frac{\omega \cdot h_x^2}{Z}, \quad \gamma = \frac{h_x^2 \cdot h_y^2}{Z}, \quad Z = h_x^2 h_y^2 + \omega \cdot (h_x^2 + h_y^2),$$

$\tau_k = \tau = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}$ – оптимальный шаг, где $\gamma_1 = \left(\frac{1}{\delta} + \omega + \frac{\Delta\omega^2}{4}\right)^{-1}$,

$\gamma_2 = \frac{1}{2\omega}$.

Число итераций, требуемое для вычислений сеточной функции с заданной точностью ε : $N = \left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln\rho}\right] + 1$, где $\rho = \frac{1 - \sqrt{\xi}}{1 + 3\sqrt{\xi}}$, $\xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$.

Замечание: конечноразностная задача (2) не может быть решена без начальных условий. Эти условия можно задать произвольно.

Цель лабораторной работы:

Освоить решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона попеременно-треугольным методом.

Порядок выполнения лабораторной работы:

1. Используя заданную функцию $u(x,y)$, найти функции $f(x,y)$, $v(x,y)$.
2. Записать постановку задачи в аналитической и численной форме.
3. Записать в развернутом виде конечноразностные задачи для второго и третьего этапов решения.
4. Составить программу для решения задачи Дирихле попеременно-треугольным методом.
5. Провести вычисления по программе, задав значение ε порядка $10^{-4} – 10^{-5}$.
6. Оценить погрешность решения.

Варианты индивидуальных заданий:

№	$u(x,y)$	*A*	*B*	*№*	$u(x,y)$	*A*	*B*
1	x^3y^2	1	2	*16*	$x + x^2 + y^3$	1	2
2	$x^2(1 – y)$	1	3	*17*	$x^2 – x + y^2$	3	2
3	$(x – x^2)y$	1	1,5	*18*	$x^3 + y^2 + x$	2	1
4	$(1 – x)y^2$	2	1	*19*	$3y(x – 2)(y – 1)$	2	2
5	$(1 – x)(1 – y)^2$	2	1,5	*20*	$x^2 + y^2 + 2y$	2	1
6	$x^2(1 – y)^2$	1,5	1	*21*	$\ln(y + 1) + x^2$	2	1
7	$x^2(1 + y^2)$	1	2,5	*22*	$(y + 1)^2 + x + x^2$	1	2
8	$x(1 – y^2)$	2	1,5	*23*	x^2y^3	1	1
9	$x + y^3$	3	1	*24*	$x^3(1 – y)$	1	2
10	$1 – x + y^2$	2	1	*25*	$(x^3 – x)y^2$	1	1
11	$x^2 + y^3 + x$	2	1	*26*	$(1 – x^2)y^2$	2	1
12	$4xy(x – 1)(y – 2)$	1	2	*27*	$(1 – x)^2(1 – y)$	1	1
13	$x^3 + y^3 + y$	2	1	*28*	$x^2(2 – y)^3$	2	2
14	$\ln(x + 1) + y^3$	2	1	*29*	$x^3(1 + y^2)$	2	1
15	$(x + 1)^3 + y$	1	2	*30*	$x^2(2 – y^2)$	2	1

Лабораторная работа №6

по курсу «Численные методы» ФМиИТ, 6 семестр

Тема: *Минимизация функции методом дихотомии*

Простейшим методом минимизации функции одной переменной является дихотомия – деление отрезка пополам. При реализации этого метода не требуется вычислять или оценивать производную функции.

Определение 1.

Точка $x^* \in X$ называется **точкой глобального минимума** функции f на множестве X, если для всех $x \in X$ выполняется равенство

$$f(x^*) \le f(x). \qquad (*)$$

Значение $f(x^*)$ называется минимальным значением функции f на множестве X.

Определение 2.

Точка $x^* \in X$ называется **точкой локального минимума** функции f, если существует такая δ-окрестность этой точки X_δ, что для всех $x \in X_\delta$ выполняется неравенство (*).

Если неравенство (*) выполняется как строгое, то x^* называют точкой строгого глобального или локального минимума, соответственно. Примеры точек минимума показаны на рисунке 2.

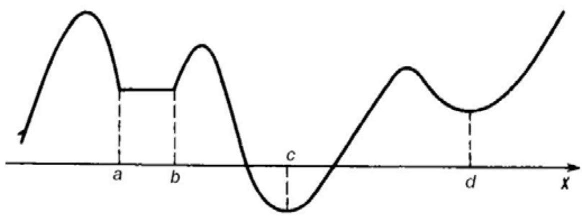


Рис. 2. Глобальный минимум ($x = c$), строгий локальный минимум ($x = d$) и нестрогие локальные минимумы ($x \in [a, b]$)

Определение 3.

Функцию $f(x)$ назовем **унимодальной на отрезке** $X = \{x \in R: a \le x \le b\}$, если она непрерывна на $X = [a, b]$, и существуют числа α, β такие, что $a \le \alpha \le \beta \le b$ и

1) $f(x)$ строго монотонно убывает при $a \le x \le \alpha$,
2) $f(x)$ строго монотонно возрастает при $\beta \le x \le b$,
3) $f(x) = f^* = \inf\{f(x): x \in X\}$ при $\alpha \le x \le \beta$.

Случай, когда один или два из отрезков $[a, \alpha]$, $[\alpha, \beta]$, $[\beta, b]$ вырождаются в точку, здесь не исключается. Если $\alpha = \beta$, то $f(x)$ называется **строго унимодальной** на отрезке $X = [a, b]$.

Обозначим через X^* множество точек минимума $f(x)$. Очевидно, что для унимодальной функции $X^* = [\alpha, \beta]$.

Опишем метод дихотомии, предполагая, что минимизируемая функция $f(x)$ унимодальна на отрезке $[a, b]$.

1-й шаг. Поиск минимума функции $f(x)$ начинается с выбора двух точек

$$x_1 = (a + b - \delta)/2,\ x_2 = (a + b + \delta)/2,$$

где δ – параметр метода ($0 < \delta < b - a$) выбирается вычислителем и может определяться целесообразным количеством верных десятичных знаков при задании аргумента. Ясно, что δ не может быть меньше машинного нуля ЭВМ, используемой при решении рассматриваемой задачи. Точки x_1, x_2 расположены симметрично на отрезке $[a, b]$ относительно его середины и при малых δ делят его почти пополам.

После выбора точек x_1, x_2 вычисляются значения $f(x_1)$, $f(x_2)$ и сравниваются между собой. Если $f(x_1) \le f(x_2)$, то полагают $a_1 = a$, $b_1 = x_2$, если же $f(x_1) > f(x_2)$, то $a_1 = x_1$, $b_1 = b$. Так как $f(x)$ унимодальна на $[a, b]$, то отрезок $[a_1, b_1]$ имеет общую точку со множеством X^* и его длина $l_1 = b_1 - a_1 = (b - a - \delta)/2 + \delta$.

k-й шаг. Пусть отрезок $[a_{k-1}, b_{k-1}]$, имеющий непустое пересечение с X^*, уже известен, и пусть $b_{k-1} - a_{k-1} = (b - a - \delta)/2^{k-1} + \delta > \delta$, $k \ge 2$. Тогда берем точки $x_{2k-1} = (a_{k-1} + b_{k-1} - \delta)/2$, $x_{2k} = (a_{k-1} + b_{k-1} + \delta)/2$, расположенные на отрезке $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ симметрично относительно его середины, и вычисляем значения $f(x_{2k-1})$, $f(x_{2k})$.

Если $f(x_{2k-1}) \le f(x_{2k})$, то полагаем $a_k = a_{k-1}$, $b_k = x_{2k}$, если же $f(x_{2k-1}) > f(x_{2k})$, то $a_k = x_{2k-1}$, $b_k = b_{k-1}$. Длина получившегося отрезка $[a_k , b_k]$ равна $l_k = (b - a - \delta)/2^k + \delta$.

В качестве приближения к минимуму выбираем $x_k^* = x_{2k-1}$, если $f(x_{2k-1}) \le f(x_{2k})$, и $x_k^* = x_{2k}$ иначе.

Описанный процесс деления отрезка пополам можно продолжать до тех пор, пока не получится отрезок $[a_k, b_k]$ длины $l_k = (b_k - a_k) < \varepsilon$, где ε – заранее заданная точность. Нетрудно получить, что для достижения точности ε требуется более $\log_2((b - a - \delta)/(\varepsilon - \delta))$ шагов.

Метод дихотомии без изменений можно применять для минимизации функций, не являющихся унимодальными. Однако, в этом случае нельзя будет гарантировать, что найденное решение является достаточно хорошим приближением к глобальному минимуму. В случае непрерывной функции можно гарантировать надежное приближение к одному из локальных экстремумов.

Цель лабораторной работы:

Освоить решение задачи минимизации унимодальной функции методом дихотомии.

Порядок выполнения лабораторной работы:

1. Графически определить отрезок $[a, b]$, на котором определенная вариантом индивидуального задания функция $f(x)$ является унимодальной.

2. Составить программу для минимизации функции $f(x)$.

3. Задать точность $\varepsilon = 0{,}000001$ и провести вычисления по программе.

4. Проверить выполнение необходимого и достаточного условий экстремума для найденной точки.

Варианты индивидуальных заданий:

№	$f(x)$	c	d	p
1	$f(x) = x^2 + ce^{dx}$	5	–0,25	
2		3	–0,55	
3		9	0,65	
4	$f(x) = 0{,}01x^4 + c \cdot arctg(dx)$	–1,4	1,6	
5		–0,9	3,5	
6		0,7	5,2	
7	$f(x) = cx + e^{\lvert x-d \rvert}$	4,6	–3,5	
8		3,8	–1,4	
9		27,5	1,5	
10	$f(x) = x^4 + px^3 + cx^2 + dx$	–4	2,5	–4,5
11		–2,6	3,8	2,9
12		–3	8,5	–1,6
13	$f(x) = cx^4 + \dfrac{p}{d + x^2}$	0,05	0,04	1
14		0,06	0,02	7
15		0,07	0,03	20
16	$f(x) = e^{px+c} + dx$	0,1	–2,25	0,75
17		0,2	–3,01	0,63
18		0,3	–1,65	0,81

19	$f(x) = px^2 + cx + d$	0,9	–5,5	6,4
20		6,1	9,2	5,8
21		7,2	–9,5	4,6
22	$f(x) = px^4 + e^{x+c}$	1,2		0,002
23		1,15		0,11
24		1,6		0,037
25	$f(x) = px^2 + arctg(cx)$	2,8		0,26
26		1,4		0,42
27		3,5		0,51
28	$f(x) = px^4 + c\,e^{dx}$	10	1	0,045
29		23	0,9	0,027
30		9,5	1,7	0,013

Лабораторная работа №7

по курсу «Численные методы» ФМиИТ, 6 семестр

Тема: *Минимизация функции методом золотого сечения*

На практике нередко встречаются функции, нахождение значений которых в каждой точке связано с большим объемом вычислений или дорогостоящими экспериментами, наблюдениями, и понятно, что тогда приходится дорожить каждым вычислением значения минимизируемой функции. Возможно (скажем, в биологических экспериментах), что число вычислений значений функции заранее жестко задано, превышение его недопустимо.

Рассмотрим метод минимизации унимодальной функции на отрезке, позволяющий решить задачу с требуемой точностью при меньшем количестве вычислений значений функций, чем метод дихотомии. Это метод золотого сечения.

Золотым сечением отрезка называется деление отрезка на две неравные части так, что отношение всего отрезка к длине большей части равно отношению длины большей части к длине меньшей части отрезка. Нетрудно проверить, что золотое сечение отрезка $[a, b]$ производится двумя точками

$$x_1 = a + (3 - \sqrt{5})(b - a)/2,$$
$$x_2 = a + (\sqrt{5} - 1)(b - a)/2,$$

расположенными симметрично относительно середины отрезка. Замечательно то, что точка x_1 в свою очередь производит золотое сечение отрезка $[a, x_2]$. Аналогично точка x_2 производит золотое сечение отрезка $[x_1, b]$.

Опираясь на указанное свойство золотого сечения, был предложен следующий метод минимизации функции $f(x)$, унимодальной на отрезке $[a, b]$.

1-й шаг. На отрезке $[a, b]$ возьмем точки x_1, x_2, производящие золотое сечение, и вычислим значения $f(x_1)$, $f(x_2)$. Если $f(x_1) \le f(x_2)$, то примем $a_1 = a$, $b_1 = x_2$, $x_1^* = x_1$; иначе $a_1 = x_1$, $b_1 = b$, $x_1^* = x_2$.

Так как функция $f(x)$ унимодальна на $[a, b]$, то отрезок $[a_1, b_1]$ имеет хотя бы одну общую точку со множеством точек минимума. Кроме того, длина отрезка $l_1 = b_1 - a_1 = (\sqrt{5} - 1)(b - a)/2$, и внутри отрезка $[a_1, b_1]$ содержится точка x_1^* с вычисленным значением $f(x_1^*) = \min\{f(x_1), f(x_2)\}$, которая производит золотое сечение отрезка $[a_1, b_1]$.

k-й шаг. Пусть отрезок $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ уже известен. Возьмем точки, производящие золотое сечение этого отрезка $x_{2k-1} = a_{k-1} + (3 - \sqrt{5})(b_{k-1} - a_{k-1})/2$, $x_{2k} = a_{k-1} + (\sqrt{5} - 1)(b_{k-1} - a_{k-1})/2$, и вычислим значения функции $f(x_{2k-1})$, $f(x_{2k})$.

Если $f(x_{2k-1}) \le f(x_{2k})$, то полагаем $a_k = a_{k-1}$, $b_k = x_{2k}$, иначе $a_k = x_{2k-1}$, $b_k = b_{k-1}$. Длина получившегося отрезка $[a_k , b_k]$ равна $l_k = b_k - a_k = ((\sqrt{5} - 2)/2)^k (b - a)$. В качестве приближения к минимуму выбираем в первом случае $x_k^* = x_{2k-1}$, и $x_k^* = x_{2k}$ иначе.

Если число вычислений значений $f(x)$ заранее неограничено, то описанный процесс можно продолжать до выполнения условия $l_k = b_k - a_k < \varepsilon$, где ε – заранее заданная точность.

Данная схема вычислений отличается от предыдущего метода лишь формулами, задающими x_{2k-1}, x_{2k}. Построим более экономную схему вычислений по методу золотого сечения.

Пусть найден отрезок $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ и известна точка x_{n-1}^*, производящая золотое сечение отрезка $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ такая, что $f(x_{n-1}^*) = \min\{f(x_i^*), 1 \le i \le n - 1\}$. В качестве пары возьмем точку $x_n = a_{n-1} + b_{n-1} - x_{n-1}^*$, также производящую золотое сечение отрезка $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ и вычислим значение $f(x_n)$.

Пусть для определенности $a_{n-1} < x_n < x_{n-1}^* < b_{n-1}$ (случай $x_{n-1}^* < x_n$ рассматривается аналогично). Если $f(x_n) \le f(x_{n-1}^*)$, то полагаем $a_n = a_{n-1}$, $b_n = x_{n-1}^*$, $x_n^* = x_n$, иначе $a_n = x_n$, $b_n = b_{n-1}$, $x_n^* = x_{n-1}^*$. Новый отрезок $[a_n, b_n]$ таков, что $[a_n, b_n] \bigcap X^* \ne \varnothing$, точка x_n^* производит золотое сечение отрезка $[a_n, b_n]$ и $f(x_n^*) = \min\{f(x_n), f(x_{n-1}^*)\} = \min\{f(x_i^*), i \le n\}$.

В качестве решения задачи можно принять пару x_n^*, $f(x_n^*)$. Уже при небольшом числе итераций n преимущество золотого сечения перед дихотомией становится ощутимым.

Цель лабораторной работы:

Освоить решение задачи минимизации унимодальной функции методом золотого сечения.

Порядок выполнения лабораторной работы и варианты индивидуальных заданий такие же, как в лабораторной работе №6.

Лабораторная работа №8

по курсу «Численные методы» ФМиИТ, 6 семестр

Тема: *Минимизация функции методом касательных*

Определение 4.

Функцию $f(x)$ назовем **выпуклой на отрезке** $[a, b]$, если для любых двух точек $u, v \in [a, b]$ выполнено условие

$$f\left(\alpha u+(1-\alpha)v\right)\le \alpha f\left(u\right)+(1-\alpha)f\left(v\right)$$

при любом $\alpha \in [0, 1]$. Данное свойство эквивалентно тому, что график функции лежит не ниже касательной в любой точке рассматриваемого отрезка.

Если знак в неравенстве строгий (кроме значений $\alpha = 1$ и $\alpha = 0$), то функция $f(x)$ называется **строго выпуклой** на отрезке $[a, b]$.

Опишем алгоритм метода касательных, предполагая, что минимизируемая функция $f(x)$ является выпуклой на отрезке $[a, b]$.

1-й шаг. Поиск минимума функции $f(x)$ начинается с построения касательных в концах выбранного отрезка $[a, b]$.

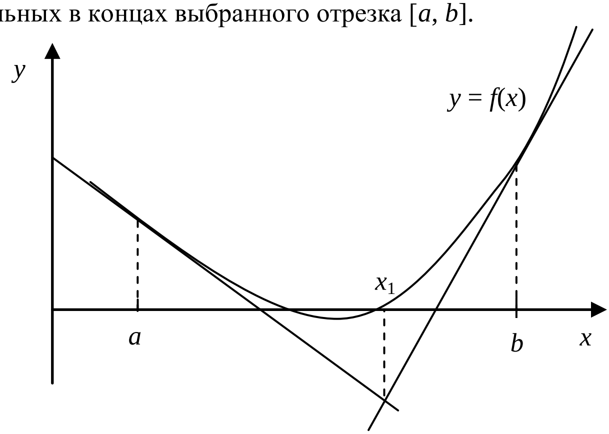


Рис. 3. Построение касательных в концах отрезка

Уравнения касательных в концах отрезка имеют вид

$$y_1\left(x\right)= f'(a)\cdot x+\left(f(a)-af'(a)\right),$$

$$y_2\left(x\right)= f'(b)\cdot x+\left(f(b)-bf'(b)\right).$$

В силу выпуклости функции точка пересечения касательных принадлежит отрезку $[a, b]$. Абсциссу пересечения касательных находим из условия $y_1(x) = y_2(x)$:

$$x_1 = \frac{f(a) - f(b) - af'(a) + bf'(b)}{f'(b) - f'(a)}.$$

Вычисляем производную в точке пересечения касательных, т.е. $f'(x_1)$. Если $f'(x_1) \geq 0$, то полагаем $a_1 = a$, $b_1 = x_1$, если же $f'(x_1) < 0$, то $a_1 = x_1$, $b_1 = b$. Так как функция $f(x)$ выпуклая на $[a, b]$, то отрезок $[a_1, b_1]$ имеет непустое пересечение с множеством X^*.

k-й шаг. Пусть отрезок $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ известен и $k \geq 2$. Тогда находим точку

$$x_k = \frac{f(a_{k-1}) - f(b_{k-1}) - f'(a_{k-1})a_{k-1} + f'(b_{k-1})b_{k-1}}{f'(b_{k-1}) - f'(a_{k-1})}$$

и вычисляем значение $f'(x_k)$.

Если выполнено $f'(x_k) \geq 0$, то полагаем $a_k = a_{k-1}$, $b_k = x_k$, если же $f'(x_k) < 0$, то $a_k = x_k$, $b_k = b_{k-1}$. В качестве приближения к минимуму на k-м шаге выбираем $x_k^* = (a_k + b_k)/2$.

Описанный процесс продолжаем до тех пор, пока не получится отрезок длины $l_k = (b_k - a_k) < \varepsilon$, где ε – заранее заданная точность.

Недостатком описанного метода является требование выпуклости минимизируемой функции. Кроме того, достаточно просто должны вычисляться значения функции и ее первой производной.

Рассмотрим упрощенный вариант, не требующий построения касательных. На k-м шаге находим середину отрезка $[a_{k-1}, b_{k-1}]$: $x_k = (a_{k-1} + b_{k-1})/2$ и вычисляем значение производной $f'(x_k)$. Далее аналогично. В этом варианте метода не требуется вычислять значения функции и его использование целесообразно в тех случаях, когда производная вычисляется проще и быстрее, чем сама функция.

Цель лабораторной работы:

Освоить решение задачи минимизации выпуклой функции методом касательных.

Порядок выполнения лабораторной работы и варианты индивидуальных заданий такие же, как в лабораторной работе №6.

Лабораторная работа №9
по курсу «Численные методы» ФМиИТ, 6 семестр

Тема: *Минимизация функции методом градиентного спуска*

Рассмотрим задачу минимизации функции $f(X) = f(x_1, x_2, .., x_n)$, заданной в n-мерном евклидовом пространстве E^n. Как правило, численные методы поиска минимума состоят в построении последовательности векторов $\{X^k\}$, удовлетворяющих условию монотонности: $f(X^1) > f(X^2) >... > f(X^n)$. Методы построения таких последовательностей называются методами спуска, в них элементы последовательности $\{X^k\}$ вычисляются по формуле:

$$X^{k+1} = X^k - \alpha_{\text{k}} P^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где P^k – направление спуска; α_{k} – длина шага в этом направлении.

Как известно, градиент функции в точке направлен в сторону скорейшего локального возрастания функции. Следовательно, при поиске минимума спускаться нужно по антиградиенту. Выбирая вектор антиградиента в качестве направления спуска, приходим к итерационному процессу

$$X^{k+1} = X^k - \alpha_{\text{k}} \operatorname{grad} f(X^k).$$

Рассмотрим метод градиентного спуска с дроблением шага. Выбираем некоторое начальное значение X^0. Затем выбираем некоторое $\alpha_k = \alpha = \text{const}$ и на каждом шаге процесса проверяем условие монотонности: $f(X^{k+1}) < f(X^k)$. Если это условие нарушается, то α дробим до тех пор, пока монотонность не восстановится. Время от времени полезно пробовать увеличить α с сохранением условия монотонности.

В методе наискорейшего спуска величина α_{k} определяется из условия минимизации функции

$$g(\alpha_{\text{k}}) = f(X^k - \alpha_{\text{k}} \operatorname{grad} f(X^k)),\ \alpha_{\text{k}} \geq 0,$$

то есть на каждом шаге решается одномерная задача минимизации:

$$\min_{\alpha \geq 0} g(\alpha).$$

Для окончания счета можно использовать следующий критерий: итерации прекращаем при выполнении условия $\left\| \operatorname{grad} f(X^{k+1}) \right\| < \varepsilon$, где $\left\| \operatorname{grad} f \right\| = \sqrt{\sum f_{x_i}^2}$. В итоге полагаем $X_{\min} = X^{k+1}$.

В градиентных методах спуск происходит по нормали к линии уровня функции, траектория спуска носит зигзагообразный характер и градиенты в любых двух последовательных точках (на двух последовательных шагах спуска) ортогональны.

Заметим, что теоретически для выпуклой функции можно выбрать начальное приближение произвольно. Однако практически в расчетах может возникать проблема с вычислением градиента, если точка находится на почти вертикальном участке поверхности (угол наклона касательной в точке почти $\pi/2$).

Цель лабораторной работы:

Освоить решение задачи минимизации многомерной функции методом скорейшего спуска.

Порядок выполнения лабораторной работы:

1. Проверить графически свойство выпуклости функции $f(x,y) = ax + by + \exp(cx^2 + dy^2)$.
2. Составить программу для минимизации функции, определенной вариантом индивидуального задания.
3. Задать ε = 0,000001 и провести вычисления по программе.
4. Проверить результат.

Варианты индивидуальных заданий:

№	a	b	c	d	№	a	b	c	d
1	1	–1,4	0,01	0,11	*16*	16	0,0	1,99	0,26
2	2	–1,3	0,04	0,12	*17*	17	0,1	2,56	0,27
3	3	–1,2	0,02	0,13	*18*	18	0,2	2,86	0,28
4	4	–1,1	0,16	0,14	*19*	19	0,3	3,24	0,29
5	5	–1,0	0,25	0,15	*20*	20	0,4	3,81	0,30
6	6	–0,9	0,36	0,16	*21*	21	0,5	4,00	0,31
7	7	–0,8	0,49	0,17	*22*	22	0,6	5,02	0,32
8	8	–0,7	0,64	0,18	*23*	23	0,7	4,84	0,33
9	9	–0,6	0,81	0,19	*24*	24	0,8	5,29	0,34
10	10	–0,5	0,94	0,20	*25*	25	0,9	5,76	0,35
11	11	–0,4	1,00	0,21	*26*	26	0,10	6,25	0,36
12	12	–0,3	1,21	0,22	*27*	27	0,11	6,76	0,37
13	13	–0,2	1,44	0,23	*28*	28	0,22	6,98	0,38
14	14	–0,1	1,69	0,24	*29*	29	0,33	7,29	0,39
15	15	0,0	1,96	0,25	*30*	30	0,34	8,41	0,40

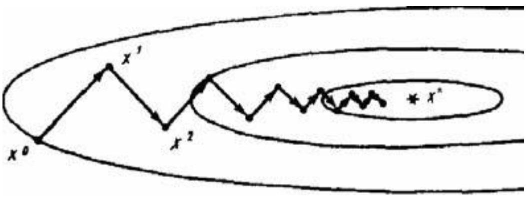
Лабораторная работа №10

по курсу «Численные методы» ФМиИТ, 6 семестр

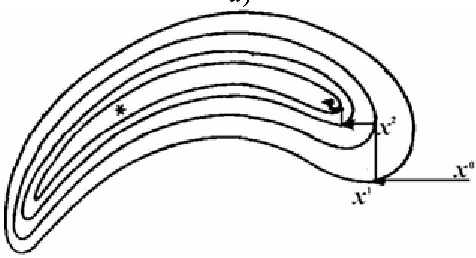
Тема: *Минимизация функции методом сопряженных градиентов*

Градиентный метод, вообще говоря, хорошо работает лишь на первых этапах поиска минимума, когда точки X^k удалены от точки минимума X^*, а вблизи точки X^* величина $\left\| X^k - X^* \right\|$ может перестать монотонно уменьшаться и ведет себя хаотически. Таким образом, сходимость метода ухудшается. Это связано с тем, что в малой окрестности точки минимума антиградиент, задающий направление поиска, мал по модулю, и если не обеспечено уменьшение абсолютной ошибки в вычислении компонент антиградиента, такое, что их относительные ошибки останутся небольшими, то вычисляемое приближенное направление сильно отличается от истинного.

Кроме того, градиентный метод сходится достаточно быстро, если поверхности уровня для минимизируемой функции близки к гиперсферам (при двух переменных – к окружностям). Если же линии уровня сильно вытянуты в каком-то направлении, то по нормали к этому направлению функция меняется значительно быстрее, чем вдоль направления. Такой характер функции называется овражным (рисунок 4а). "Дно оврага" к тому же может быть искривлено (рисунок 4б).



а)



б)

Рис. 4. Линии уровня овражной функции

Если начальная точка X^0 попадает на "склон оврага", то направление градиентного спуска из этой и последующих точек будет почти перпендикулярным ко "дну оврага", хотя надо бы двигаться вдоль "дна оврага". Из-за малых шагов процесс практически останавливается вдали от точки минимума X^*. Таким образом, сходимость градиентного метода может быть очень медленной.

Применение метода сопряженных градиентов позволяет существенно ускорить сходимость. Этот метод обладает замечательным свойством: положительно определенная квадратичная форма n переменных минимизируется не более, чем за n шагов. Данный метод эффективен для минимизации гладких функций.

Опишем по шагам алгоритм метода сопряженных градиентов.

1. Вычисляем $p_0 = \text{grad } f(X_0)$ в точке X_0.

2. На k-м шаге (k = 1, 2,...) решаем задачу минимизации по α функции

$$g(\alpha) = f(X_k - \alpha p_k),$$

в результате чего определяем величину шага α_k и точку $X_{k+1} = X_k - \alpha_k p_k$.

3. Вычисляем величины $f(X_{k+1})$ и $\text{grad } f(X_{k+1})$.

4. Если $\|\text{grad } f(X_{k+1})\| < \varepsilon$, то точка X_{k+1} – решение задачи, в противном случае определяем коэффициент β_k по формуле

$$\beta_k = \begin{cases} -\dfrac{\text{grad } f(X_{k+1}), \text{grad } f(X_{k+1})}{\text{grad } f(X_k), \text{grad } f(X_k)}, & k+1 \notin I, \\ 0, & k+1 \in I. \end{cases}$$

Здесь $I = \{0, 2n, 3n, \dots\}$ – множество индексов. Значения k, для которых $\beta_k = 0$, называют моментами обновления метода. Таким образом, обновление метода происходит через каждые n шагов.

5. Вычисляем p_{k+1} по формуле

$$p_{k+1} = \text{grad } f(X_{k+1}) - \beta_k p_k.$$

Возвращаемся к п.2.

Цель лабораторной работы:

Освоить решение задачи минимизации многомерной функции методом сопряженных градиентов.

Порядок выполнения лабораторной работы и варианты индивидуальных заданий такие же, как в лабораторной работе №9.

Библиографический список

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы : учебник для вузов. – М.: Наука, 1987.

2. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988.

3. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978.

4. Кузиков С.С. Элементы методов вычислительной математики : учебное пособие. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2013.

5. Кузиков С.С., Хворова Л.А. Введение в численные методы : учебное пособие. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2008.

6. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989.