О группе обратимых элементов конечных локальных колец характеристики p

Е.В. Журавлев

АлтГУ, г. Барнаул

Конечное кольцо с единицей называется локальным или вполне примарным, если все его делители нуля образуют единственный максимальный идеал J. В работе [1] полностью описана структура мультипликативной группы колец Галуа. В частности, доказано, что мультипликативная группа обратимых элементов R^* произвольного коммутативного конечного локального кольца R является прямым произведением некоторой циклической подгруппы $<b>$ порядка p^r-1 и подгруппы обратимых элементов $1+J$.

Пусть R – конечное коммутативное локальное кольцо с единицей такое, что $J^4 = 0$ и $J^3 \neq 0$. Тогда $R/J = GF(p^r) = F$ и характеристика кольца равна p^k для некоторого $1 \leq k \leq 4$. В настоящей работе определено разложение группы $R^* = <b> \times (1+J)$ обратимых элементов кольца R в прямое произведение циклических подгрупп в некоторых частных случаях.

Теорема 1. Пусть R – конечное коммутативное локальное кольцо характеристики p,

$$\dim_F J/J^2 = 3,\ \dim_F J^2/J^3 = 1,\ \dim_F J^3 = 1,\ J^4 = 0.$$

Тогда

(1) если $p = 2$, то $R^* \cong \mathbb{Z}_{2^r-1} \times \left(\mathbb{Z}_4^r\right)^2 \times \mathbb{Z}_2^r$ или $R^* \cong \mathbb{Z}_{2^r-1} \times \mathbb{Z}_4^r \times \left(\mathbb{Z}_2^r\right)^3$;

(2) если $p = 3$, то $R^* \cong \mathbb{Z}_{3^r-1} \times \mathbb{Z}_9^r \times \left(\mathbb{Z}_3^r\right)^3$;

(3) если $p > 3$, то $R^* \cong \mathbb{Z}_{p^r-1} \times \left(\mathbb{Z}_p^r\right)^5$,

где $\mathbb{Z}_n$ – кольцо вычетов по модулю n, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 2. Пусть R – конечное коммутативное локальное кольцо характеристики p,

$$\dim_F J/J^2 = 2,\ \dim_F J^2/J^3 = 2,\ \dim_F J^3 = 1,\ J^4 = 0.$$

Тогда

(1) если $p = 3$, то $R^* \cong \mathbb{Z}_{3^r-1} \times \mathbb{Z}_9^r \times \left(\mathbb{Z}_3^r\right)^3$ или $R^* \cong \mathbb{Z}_{3^r-1} \times \left(\mathbb{Z}_3^r\right)^5$;

(2) если $p > 3$, то $R^* \cong \mathbb{Z}_{p^r-1} \times \left(\mathbb{Z}_p^r\right)^5$.

Доказательство теорем основано на результатах классификации конечных локальных колец, полученных автором в работе [2].

Библиографический список

1. Raghavedran R. Finite associative rings // Compositio Math. – 1969. – V. 21. – P. 195–229.

2. Журавлев Е.В. Локальные кольца порядка p^6 с 4-нильпотентным радикалом Джекобсона // Сибирские электронные математические известия [Электронный ресурс]. – 2006. – Том 3. – С. 15–59. – Режим доступа: http://semr.math.nsc.ru.

3. Chikunji C.J. On unit groups of completely primary finite rings // Math. J. Okayama Univ. – 2008. – V. 50. – P. 149–160.

О бесконечно базируемых векторных пространствах

И.М. Исаев, А.В. Кислицин

АлтГПА, г. Барнаул

Пусть F – бесконечное поле, R – некоторая F-алгебра, $\vec{R}$ – подпространство векторного пространства R (не обязательно являющееся подалгеброй). Полином $f(x_1, x_2,..., x_n) \in F[x_1, x_2,..., x_n]$ назовем тождеством векторного пространства $\vec{R}$, если $f(x_1, x_2,..., x_n) = 0$ в алгебре R при всех $x_1, x_2,..., x_n \in \vec{R}$ и тождеством алгебры R, если $f(x_1, x_2,..., x_n) = 0$ для всех $x_1, x_2,..., x_n \in R$. Скажем, что R – конечно базируемая алгебра (КБ-алгебра), если все тождества R следуют из конечной совокупности тождеств R. В противном случае будем говорить, что R – не конечно базируемая алгебра (НКБ-алгебра). Аналогичную терминологию будем применять к векторным пространствам.

В работах [1, 2, 6] рассматривалась алгебра $\overline{V} = V \oplus E$, где V – векторное пространство, E – некоторое подпространство пространства линейных преобразований V с умножением $(v_1 + e_1)(v_2 + e_2) = e_2(v_1)$. В частности, в работе [2] было доказано, что вопрос конечной базируемости $\overline{V}$ сводится к вопросу конечной базируемости пространства E. Кроме того, в работе [5] исследовались базисы слабых тождеств. Тождества же векторных пространств (определенные так же, как и выше) можно считать «самыми слабыми».

Пусть $A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in F \right\}$, $A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in F \right\}$ и $A = A_1 \oplus A_2$ – F-алгебры, $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$ и $\vec{A}$ – алгебры A_1, A_2 и A соответственно, рассматриваемые как векторные пространства над полем F. Для этих пространств справедливы следующие утверждения.